QK1
.J5969
1904
v.27

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

SUPPLÉMENT

DISCUSSION

SUR LE

FŒTICIDE MÉDICAL

Séance du 21 avril 1903 de la 4e Section

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1904

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

SUPPLÉMENT

DISCUSSION

SUR LE

FŒTICIDE MÉDICAL

Séance du 21 avril 1903 de la 4e Section

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1904

Imprimatur

Mechliniae, 27 Julii 1904.

J. Thys, can., lib. cens.

QUATRIÈME SECTION

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL (*)

La séance est ouverte à 4 h. 1/2, à l'issue de l'Assemblée générale du mardi 21 Avril, sous la présidence de M. le Dr Faidherbe, président en exercice de la quatrième Section.

M. le Dr Ch. Van Aubel, directeur de la Maternité Sainte-Anne, à Bruxelles, est invité à résumer le *Rapport médical* qu'il a rédigé sur la question du *fœticide médical.* Nous reproduisons ici ce rapport *in extenso.*

Rapport du Dr Ch. Van Aubel

L'auteur de ce rapport, reconnaissant l'importance du côté théologique et moral de cette question, croit néanmoins devoir se borner à l'étudier au point de vue médical. Cet exposé, s'il ne se trompe, servira utilement de point de départ à un débat, dans le cours duquel le problème pourra être abordé sous tous les aspects.

La femme enceinte peut être exposée à la mort, du fait de la grossesse, ou par suite du développement d'une maladie intercurrente, ou encore à cause d'un rétrécissement du bassin rendant l'accouchement à terme impossible.

Y a-t-il lieu, dans ces cas, et pour sauver cette femme d'interrompre la grossesse à une période où l'enfant n'est pas viable (avortement provoqué ou avortement médical), ou bien de tuer et

(*) Voir Annales de la Société scientifique, t. XXVII, première partie, p. 153, séance du mardi, 21 Avril 1903.

de broyer l'enfant à terme (embryotomie sur l'enfant vivant) pour l'extraire du sein de sa mère (*) ?

Cette question du fœticide thérapeutique a fait l'objet, en 1852, d'une discussion célèbre à l'Académie de Médecine de Paris. Celle-ci conclut à la légitimité de l'intervention.

Les résultats que donnaient alors l'opération césarienne (extraction de l'enfant par l'abdomen) et la symphyséotomie (agrandissement momentané du bassin par section du bassin) étaient loin d'être encourageants.

Les progrès réalisés depuis, en obstétrique, grâce à l'application des méthodes antiseptiques et aux perfectionnements apportés aux procédés opératoires, ont fait entrer cette question du fœticide thérapeutique dans une phase nouvelle.

Les discussions qui ont eu lieu en août 1899, au Congrès d'Amsterdam, sur l'opération césarienne, la symphyséotomie et l'accouchement prématuré artificiel, les débats du mois d'avril dernier à la Société obstétricale de France, de juin 1902 à la Société de Médecine de Berlin, de septembre dernier au Congrès de Rome sur l'avortement médical, donnent à la question un caractère tout particulier d'actualité.

Nous diviserons ce rapport en trois parties. Dans la première nous nous occuperons de l'avortement provoqué ou médical; dans la deuxième, de l'embryotomie sur l'enfant vivant; et, dans la troisième partie, nous traiterons de la grossesse extra-utérine.

I. — DE L'AVORTEMENT PROVOQUÉ OU MÉDICAL

Les cas dans lesquels le médecin peut être appelé à envisager la question de l'avortement provoqué ne sauraient être examinés d'une manière générale; ils doivent être considérés isolément. J'étudierai donc chaque cas en particulier, et donnerai, pour

(*) Il n'y a pas lieu d'examiner ici la question de l'interruption de la grossesse à une période où l'enfant est viable (accouchement prématuré artificiel). L'élevage des enfants prématurés est aujourd'hui facile, et l'on peut dire avec Tarnier que, grâce à la couveuse ou à d'autres moyens donnant les mêmes résultats, " l'époque de la viabilité de l'enfant, au point de vue clinique, arrive à se confondre avec l'époque de la viabilité légale (6 mois) ".

chacun, l'avis des auteurs qui, dans ces derniers temps, se sont prononcés sur la question.

Affections du système nerveux. — Parmi ces affections, il n'y a guère que la chorée grave des femmes enceintes (chorea gravidarum) et les psychoses avec tendances au suicide, qui puissent faire songer à l'interruption de la grossesse. Schauta, professeur à Vienne, se basant sur une statistique de 4000 accouchements, admet que la grossesse doit être interrompue chez une choréique lorsque l'alimentation est impossible, et qu'il se présente des symptômes de manie. Zweifel, professeur à Leipzig, partage complètement cette manière de voir.

Affections oculaires. — La plupart des accoucheurs et des ophtalmologistes admettent que dans la rétinite albuminurique et dans l'amaurose urémique, il faut provoquer l'avortement. J'ai pourtant soigné, à ma clinique, une albuminurique qui présentait des phénomènes de rétinite, et chez laquelle les symptômes ont en partie disparu après un accouchement *spontané* avant terme. Cette malade a été vue par notre collègue M. le Dr De Lantsheere.

Affections cutanées. — Certains spécialistes conseillent l'accouchement provoqué dans les cas sérieux de pytiriasis versicolor, de prurit, d'eczéma, de pemphigus, d'herpes gestationis.

Affections des organes respiratoires. — De ces affections, la tuberculose pulmonaire est la seule qui pourrait fournir une indication à l'opération. Cette question a fait, l'année dernière, l'objet de nombreuses discussions à la Société de Médecine de Berlin. La plupart des orateurs (Dührssen, professeur à Berlin, Kaminer, etc.) se sont prononcés pour l'accouchement prématuré artificiel; d'autres (Hamburger), se basant sur ce fait que les enfants issus de ces mères ont une existence fort précaire (23 enfants morts sur 51 enfants nés de 10 phtisiques), ont conseillé l'avortement provoqué.

Pour diminuer le nombre des tuberculeux, Kohegyi (Hongrie) va jusqu'à provoquer l'avortement de la tuberculeuse chez laquelle on peut démontrer l'existence de bacilles tuberculeux!

Pinard, à Paris et La Torre, à Naples rejettent l'avortement ou l'accouchement prématuré artificiel dans la tuberculose.

Schauta réserve cette opération aux cas de tuberculose légère, quand il présume que, sous l'influence de la grossesse, l'affection

fera des progrès rapides; dans la tuberculose grave, et même dans la tuberculose miliaire, il pratique l'accouchement prématuré, et ce dans l'intérêt de l'enfant.

Zweifel, chez les femmes tuberculeuses, n'intervient que lorsque le poids du corps de la mère diminue considérablement.

Krönig (Leipzig) pense qu'avant de se décider, il faut toujours considérer les conditions sociales de la patiente : chez les femmes de la classe ouvrière on observe souvent, après la délivrance, une marche rapide du processus tuberculeux. J'ai eu, maintes fois, l'occasion d'observer des cas de tuberculose pulmonaire qui se sont améliorés après l'accouchement, lorsque ces tuberculeuses se trouvaient placées dans de meilleures conditions hygiéniques. D'autres cas n'ont pas, il est vrai, présenté la même évolution heureuse.

D'après Kuttner, qui a réuni une statistique de 15 cas de *tuberculose du larynx,* l'avortement artificiel doit être fait dès que les lésions tuberculeuses s'étendent. Les chances de sauver la femme seraient d'autant plus grandes, que la grossesse serait moins avancée. Ces chances seraient diminuées à partir du septième mois.

Affections cardiaques. — La plupart des accoucheurs admettent que les affections cardiaques justifient rarement l'interruption de la grossesse. Rein, de Saint-Pétersbourg, a pratiqué une fois sur 2690 accouchements, l'avortement pour affection cardiaque.

On ne peut démontrer que la grossesse ait une influence fâcheuse sur la marche d'une maladie du cœur. L'accouchement est infiniment plus dangereux pour le cœur que la grossesse.

D'après Schauta, la sténose mitrale paraît être plus dangereuse que les autres lésions cardiaques.

Maladies infectieuses (Rougeole, variole, scarlatine, érysipèle, typhus, diphtérie, choléra, influenza). — Ne légitiment pas d'indication à l'avortement. Si ces affections, comme c'est le cas pour la variole, provoquaient des hémorragies utérines sérieuses, il y aurait lieu de procéder au tamponnement. Celui-ci pourrait alors, indirectement mais pas fatalement, arrêter l'évolution de la grossesse.

Schauta pense que dans le typhus au début, l'avortement pourrait être utile.

La diphtérie, l'érysipèle, la scarlatine constituent, en raison du

danger d'infection dans les suites de couches, une contre-indication à l'avortement.

L'avortement sera également contre-indiqué dans la *rage,* la *morve,* la *pustule maligne;* il en sera de même dans le *rhumatisme.*

Pour Olshausen, l'*infection septique de l'utérus gravide* résultant de l'introduction accidentelle de germes pathogènes dans l'utérus, par exemple après des tentatives d'avortement criminel, amène fatalement la mort de l'enfant. Elle serait une indication, heureusement très rare, de l'avortement.

Les *intoxications* par la morphine, le plomb, le mercure, le tabac, ne nécessitent pas d'intervention, d'autant plus que dans ces cas, l'avortement se produit le plus souvent spontanément. Dans l'intoxication par le phosphore, les métrorragies étant fréquentes, celles-ci peuvent exiger le tamponnement et amener indirectement, comme pour la variole, une fausse couche.

L'avortement doit être également rejeté dans la *péritonite,* alors même que la fièvre est très élevée. Il en est de même dans l'*appendicite* que l'on opérera, sans tenir compte de l'existence de la grossesse (Schauta).

D'après Schauta, l'*ictère grave,* accompagné de fièvre intense avec diminution de volume du foie et symptômes nerveux, constitue une indication immédiate de l'interruption de la grossesse; il en est de même pour les *tumeurs du foie* amenant une cachexie prononcée. Dans les *coliques hépatiques* graves, on fera la cholécystectomie sans interrompre l'évolution de la grossesse.

Dans l'*anémie pernicieuse* des femmes enceintes Gusserow estime que la grossesse devrait être enrayée. Schauta, au contraire, pense que l'accouchement provoqué hâterait l'issue fatale.

Le *diabète* des gravides étant d'un mauvais pronostic (20 °/o de décès) et l'accouchement déterminant des troubles graves, le professeur de Vienne conseille de mettre fin à la grossesse dès les premiers mois. Herman (Londres), dans un travail paru en 1902, est du même avis. La mort de l'enfant aurait lieu dans 50 °/o des cas, et l'évolution du diabète pourrait s'arrêter d'autant mieux que l'avortement a été provoqué plus tôt.

Olshausen est d'avis que dans l'*ostéomalacie récidivante grave* apparaissant dès le début de la grossesse, il faut pratiquer, dans les premiers mois, l'extirpation totale de l'utérus, par la voie abdo-

minale ou mieux par la voie vaginale. On sait, en effet, que dans l'ostéomalacie, la guérison se produit quelquefois après l'accouchement.

Les *myomes,* les *kystes dermoïdes,* ne constituent plus aujourd'hui une indication d'avortement. Dans les *carcinomes opérables* l'extirpation totale de l'utérus est préconisée; dans les *carcinomes inopérables,* on pratiquera la section césarienne *(césarienne vaginale)* dès que l'enfant sera viable (Simpson d'Édimbourg, Schauta).

Les *tumeurs malignes des organes abdominaux* nécessiteraient l'interruption de la grossesse avant leur ablation, si la grossesse peut contrarier l'exécution technique de celle-ci (Schauta).

Maladies des reins. — Relativement aux affections des reins, les avis sont très partagés. Pinard et La Torre pensent qu'elles ne constituent pas une indication de pratiquer l'avortement ou l'accouchement prématuré artificiel.

Rein, sur 2690 accouchements faits à Kiew pendant treize ans, a pratiqué six fois l'avortement pour affections des reins. Hofmeier (Wurtzbourg), Schauta, Olshausen sont partisans de l'intervention dans la néphrite chronique préexistante à la grossesse si, sous l'influence du traitement, les phénomènes graves ne s'amendent pas. Dans la néphrite aiguë, ils se comportent comme dans la néphrite chronique. Hofmeier n'intervient pas. Dans le rein de grossesse, les conditions étant plus favorables, la plupart des accoucheurs ne pratiquent pas l'avortement.

Nous avons vu à propos des affections oculaires, les idées admises au sujet de la rétinite albuminurique.

Vomissements incoercibles. — Cette complication fréquente de la grossesse constituait autrefois une des principales indications de l'intervention. Il n'en est plus de même aujourd'hui; les nouvelles méthodes thérapeutiques : traitement dans un institut, repos absolu, alimentation peu irritante jointe à l'évacuation et à la désinfection du tube intestinal (Clivio de Parme), injections de solution physiologique (Condamine de Lyon), la suggestion, etc., tendent de plus en plus à restreindre le champ de l'avortement. Pinard, La Torre, Olshausen, Schauta, Zweifel, Sinclair (Manchester), et d'autres l'ont presque complètement abandonné. Dans une pratique de plusieurs années, Zweifel n'a fait que trois ou quatre fois l'avortement pour vomissements incoercibles. L'inter-

ruption de la grossesse n'empêche d'ailleurs pas toujours la mort; Schauta a perdu une femme chez laquelle il avait fait l'avortement. Il faut, dans les cas de vomissements incoercibles et selon les conseils de Zweifel, Olshausen et Schauta, considérer surtout la manière dont se comporte le poids de la malade.

Incarcération de l'utérus gravide irréductible. — Grâce aux progrès de la chirurgie abdominale, l'utérus gravide en rétroversion irréductible ne nécessite plus l'avortement. Plusieurs méthodes nouvelles (procédé de Seeligmann) rendent possible la réposition par la voie vaginale. Lorsque la manœuvre est impraticable, la laparotomie permet de tourner la difficulté.

De l'exposé qui précède il résulte que les méthodes de traitement se perfectionnant, les indications de l'avortement médical deviennent de moins en moins nombreuses. L'école obstétricale d'aujourd'hui aboutit, comme l'a dit Schauta au Congrès de Rome, *à la restriction aussi complète que possible de l'interruption de la grossesse.*

Je ne saurais donc mieux terminer cet exposé qu'en citant les paroles du professeur Lavrand, de Lille, dans son récent traité de déontologie médicale " Le médecin chrétien " : " Le progrès a comblé l'abîme qui, disait-on, séparait à jamais la pratique médicale et les théories de la morale. Celle-ci se réjouit de ce retour vers elle des idées et des choses ; elle y voit le présage d'autres découvertes qui supprimeront également de l'obstétrique moderne la provocation de l'avortement. Ces bienfaisants progrès ne seront-ils point hâtés si, comme il faut l'espérer, les recherches s'orientent désormais vers ce but ? "

II. — DE L'EMBRYOTOMIE SUR L'ENFANT VIVANT

Nous avons vu qu'un rétrécissement du bassin peut rendre impossible l'accouchement par les voies naturelles.

Le médecin aura alors le choix entre l'opération césarienne ou la symphyséotomie, l'embryotomie sur l'enfant vivant et l'accouchement prématuré artificiel.

Pinard, dans le rapport qu'il a présenté en août 1899 au Congrès d'Amsterdam, sur les indications de ces opérations, arrive aux conclusions suivantes :

" Dans la pratique des viciations pelviennes doivent disparaître :

1° L'accouchement prématuré artificiel;

2° Toute opération (forceps, version) impliquant la lutte de la tête fœtale contre la résistance osseuse du bassin;

3° L'embryotomie sur l'enfant vivant.

L'obstétrique opératoire doit comprendre, dans les rétrécissements du bassin :

1° L'agrandissement momentané du bassin;

2° L'opération césarienne conservatrice ou suivie de l'hystérectomie;

3° L'embryotomie sur l'enfant mort. „

Pinard se basait pour établir ces conclusions sur sa statistique de la clinique Baudelocque; pour lui, le droit de vie ou de mort de l'enfant n'appartient à personne, ni au père, ni à la mère, ni au médecin et seul, celui-ci a le droit de choisir l'opération qu'il jugeait convenable de pratiquer, sans en référer à la parturiente ou à la famille.

Ces conclusions ne furent pas admises par la plupart des membres du Congrès. Elles furent combattues par Léopold (Dresde), Treub (Amsterdam), Pestalozza (Florence), Barnes (Londres), Nijhoff (Copenhague) et beaucoup d'autres.

Léopold, opposant à Pinard une statistique de 25,000 accouchements, formula les règles suivantes :

Dans les bassins de 6 centim. et au-dessous, pratiquer l'opération césarienne;

Dans les bassins de 6 à 7 1/2 centim., à la clinique, faire l'opération césarienne plutôt que la symphyséotomie; en pratique civile, et pour ne pas exposer la femme aux terribles conséquences de l'opération césarienne ou de la symphyséotomie faites dans un milieu infecté : l'embryotomie;

Dans les bassins de 7 1/2 centim., l'accouchement prématuré artificiel. Si l'on est appelé à terme : attendre l'accouchement spontané, en ayant recours, au besoin, à la position de Walcher ou à la version, “ la tête fœtale dernière traversant plus facilement le bassin que la tête première „.

En cas d'insuccès, l'opération césarienne à la clinique; en pratique civile, la perforation.

Léopold conseille encore, lorsque l'enfant est mourant, de faire l'embryotomie plutôt que l'opération césarienne, même à la clinique.

Nous voyons donc que Pinard et Léopold sont d'accord pour admettre qu'*il faut, en clinique, abandonner l'embryotomie sur l'enfant vivant*. L'un recommande la symphyséotomie et l'autre la césarienne. Léopold fait seulement une restriction en ce qui concerne l'enfant mourant.

Si l'accoucheur de Dresde se refuse à pratiquer la césarienne ou la symphyséotomie dans certains cas de la pratique civile, c'est parce qu'il redoute, et à juste titre, de voir ces opérations être exécutées dans des conditions si peu hygiéniques qu'elles exposeraient les jours de la mère. Quoi qu'en dise Pinard, la symphyséotomie n'est pas une opération facile, et l'on ne peut admettre, avec lui, que " seuls les accoucheurs qui ne sont pas familiarisés avec la symphyséotomie peuvent penser et dire que c'est une opération difficile et compliquée ".

Le jour viendra où la technique opératoire plus perfectionnée et plus simple rendra ces opérations praticables même dans la masure de l'ouvrier; personne ne songera plus, alors, à refuser au chirurgien le droit de pratiquer l'opération qu'il jugera utile.

J'en veux pour preuves les résultats qu'ont donnés dans ces derniers temps la pubiotomie (section latérale du bassin) faite avec la scie-fil de Gigli (*) et la césarienne vaginale ou opération d'Acconci-Dührssen (**).

Ces opérations sont très faciles à exécuter. Elles peuvent être tentées par tout médecin quelque peu au courant des pratiques de la petite chirurgie. *La pubiotomie prendra la place de la symphyséotomie,* sa technique étant plus simple et ses suites opératoires moins dangereuses. *La césarienne vaginale remplacera la césarienne abdominale dans tous les cas où il y aura lieu de pratiquer cette opération pour une indication autre qu'un vice du bassin.*

En attendant la réalisation de cet idéal, *je conseillerai au médecin praticien qui se trouverait en présence d'un cas de rétrécissement*

(*) La pubiotomie à l'aide de la scie-fil de Gigli fut pratiquée pour la première fois en 1897 par Bonardi, de Lugano.

(**) Cette opération a été proposée, en 1876, par Dührssen dans les cas de carcinome utérin. Rühl, de Dillenberg, l'avait cependant déjà faite en 1865 dans un cas de troubles graves de l'accouchement, suites de fixation vaginale de l'utérus.

modéré du bassin (7 1/2 centim.), d'avoir recours à la version podalique, et cela pour deux raisons : d'abord, parce que la tête dernière passe plus facilement que la tête première ; ensuite, parce qu'en cas d'insuccès, la mort de l'enfant après la version suit rapidement l'intervention, tandis qu'après une application infructueuse de forceps au D. S., la mort de l'enfant demande souvent plusieurs heures. En agissant ainsi, le médecin ne devra pratiquer la perforation que sur l'enfant mort. Il se conformera à la loi religieuse qui prescrit : tu ne tueras point.

III. — DE LA GROSSESSE EXTRA-UTÉRINE

La plupart des accoucheurs modernes admettent que, dans la grossesse extra-utérine au début, il faut faire la laparotomie aussitôt que le diagnostic est certain, la femme étant exposée au danger de l'hémorragie résultant de la rupture du sac fœtal. Il est vrai d'ajouter que le diagnostic de grossesse extra-utérine au début est extrêmement difficile. Le diagnostic deviendra tout à fait certain après l'évacuation d'une caduque de grossesse. D'après Winkel, cette caduque serait évacuée dans les deux tiers des cas, déjà dans les quatre premiers mois, même si le fruit continue à vivre.

Tous les chirurgiens sont d'avis qu'il convient d'intervenir immédiatement par la laparatomie lorsqu'il se produit une rupture du sac fœtal, celle-ci entraînant une hémorragie mortelle, sauf lorsque l'hémorragie se produit dans un espace enkysté (hématocèle). Le fœtus est alors généralement mort.

Pour la seconde moitié de la grossesse extra-utérine, les avis sont partagés. Les uns interviennent immédiatement, que le fœtus soit viable ou non (Gusserow, Olshausen) ; les autres, comptant sur la possibilité d'un enfant vivant, reculent l'intervention. La littérature médicale contient, on le sait, la relation de plusieurs cas d'enfants extra-utérins vivants (*).

M. le Dr Faidherbe remercie le rapporteur et fait ressortir l'importance de son travail. *(Applaudissements.)*

(*) BIBLIOGRAPHIE : Bulletins de l'Académie de Médecine de Paris, 1852. Comptes rendus du Congrès périodique international de Gynécologie et d'Obstétrique, 3e session, Amsterdam, 1899.

Le R. P. Vermeersch, S. J., professeur de Théologie morale au Collège de la Compagnie de Jésus, à Louvain, donne ensuite lecture du rapport qu'il a préparé *sur les décisions du Saint-Siège relatives au fœticide médical.*

Rapport du R. P. Vermeersch

L'invitation que vous avez bien voulu m'adresser est tout à votre honneur. J'y reconnais et cette modestie qui est la parure habituelle et charmante du vrai savoir, et cette touche religieuse propre au médecin qui, lorsque la matière ne l'entraîne pas, la domine lui-même au point de devenir le croyant le plus conscien-

---

IV^e Congrès international de Gynécologie et d'Obstétrique de Rome, 1902. Analyses dans *Centralbl. Gynaek,* sept. et oct. 1902, et dans *Semaine médicale,* sept., 1902.

Annales de la Société obstétricale de France, 1902.

De l'interruption de la grossesse chez les femmes tuberculeuses (Soc. de Médecine de Berlin). Analyses dans *Semaine médicale,* juin 1902.

J. Clivio (Parme), Le vomissement incoercible des femmes enceintes (*Rassegna d'ostetr. e ginecol.*, octobre 1901).

G. Miranda (Naples), Contribution au traitement du vomissement incoercible des gravides (*Archiv. di ostetric. et ginecol.*, sept. 1901).

G. I. Herman (Londres), Diabète et grossesse (*Edimb. medic. Journal,* février 1902).

J. Helbron (Berlin), Sur le décollement de la rétine dans la néphrite de grossesse (*Berliner Klinische Wochenschrift*, 1902, n^os 4 et 5).

Rieck (Altona), Sur le traitement de la grossesse extra-utérine (*Münchener Medicin. Wochenschrift*, 1902, n° 31).

Hofmeier, Sur la justification de la perforation de l'enfant vivant (*Zeitschrift f. Geburtshülfe und Cynaekol.*, 1903, Bd. 48).

L. Gigli, Section latérale de la symphyse pubienne : ses avantages et sa technique (*Annali di ostetr. e ginecol.,* octobre 1894).

Gigli, Taghio lateralizzato del pube (*Bollettino della Società Toscana di ostetr. e ginecol.*, mai 1902).

H. Van de Velde (Haarlem), L'hébotomie (pubiotomie) (*Centrabl. f. Cynäk.,* sept. 1902).

Pestalozza (Florence), Deux cas de section latérale du bassin, d'après Gigli (*Centrabl. f. Cynäk.*, janvier 1903).

Léopold Meyer (Copenhague), Un cas de section latérale à travers l'os pubis, d'après Gigli (*Centralbl. f. Cynäk.,* 28 mars 1903).

cieux et même l'apôtre de sa religion, et tout l'esprit enfin de notre grande Société qui a pris pour devise : " Il ne saurait y avoir d'opposition réelle entre la raison et la foi ".

Sur le point d'aborder une question importante et délicate entre toutes, puisque pour beaucoup d'êtres humains elle est, à la lettre une question de vie ou de mort, vous avez voulu entendre, avant tout, exposer les doctrines professées là-dessus par le Saint-Siège, décidés que vous étiez à n'en contredire aucune, pour trouver dans cette docilité même une garantie éventuelle contre de déplorables erreurs.

Je viens d'expliquer ainsi la présence, dans cette réunion, d'un profane tel que moi, et le tour de parole qui m'est accordé. Pouvais-je vous refuser le concours de ma bonne volonté et ne pas tâcher au moins de satisfaire votre juste désir?

UNGARO (Naples), Dystocie avec maladie du cœur et sténose cicatricielle du col utérin. Césarienne vaginale (*Centralbl. f. Gynäkol.*, août 1902).

JAHREISS (Ausbourg), Deux césariennes vaginales pour éclampsie (*Centralbl. f. Gynäkol.*, septembre 1902).

A. REGNOLI (Rome), Sur la césarienne vaginale et une nouvelle indication de l'opération (*Centralbl. f. Gynäkol.*, novembre 1902).

BRUNN (Halle), Sur la technique et l'emploi de la césarienne vaginale (*Centralbl. f. Gynäkol.*, décembre 1902).

RÜHL (Dillenberg), Sur la technique et l'emploi de la césarienne vaginale. Observations à la thèse du professeur Brunn (*Centralbl. f. Gynäkol.*, 7 mars 1903).

HIRSCHL, Sur la chorée des gravides (*Monatsschrift f. Geburtsh. und Gynäk.*, janvier 1903).

SCHAUTA, Accouchement provoqué dans les maladies internes (*Wiener medicin. Wochenschrift*, janvier 1903).

Dr ALAIN, Du fœticide thérapeutique (thèse).

TARNIER et BUDIN, Traité de l'art des accouchements, Paris, 1901.

RIBEMONT et LEPAGE, Précis d'obstétrique, Paris, 1893.

E. HUBERT, Cours d'accouchements, Louvain, 1885.

E. HUBERT, Le devoir du médecin, Louvain, 1897.

DÜHRSSEN (traduction VAN AUBEL), Vade-mecum d'obstétrique, Liége, 1892.

FRITSCH (traduction STAS), Traité clinique des opérations obstétricales, Milan, 1902.

SKUTSCH, Geburtshilfliche operationslehre, Iena, 1901.

MORISANI, Manuale delle operazioni ostetriche, Milan, 1902.

OLSHAUSEN et VEIT, Lehrbuch der Geburtshilfe, Berlin, 1900.

S. POZZI, Traité de gynécologie.

D. LAVRAND, Le médecin chrétien, Paris, 1901.

L'Église catholique, Messieurs, n'exprime pas toujours sa pensée avec la même autorité.

Il est, en premier lieu, une expression absolument authentique, irréformable, à laquelle Dieu a daigné ajouter la garantie de l'infaillibilité. L'organe qui rend de tels oracles est le Souverain Pontife, soit qu'à la face du monde il prononce seul la décision suprême d'une cause intéressant la foi ou les mœurs, soit qu'il associe à son jugement ses frères dans l'Épiscopat. L'acte qui contient cet enseignement définitif peut être d'ailleurs un acte formel, rédigé tout exprès dans ce but ; et il peut consister en un fait qui n'est pas susceptible d'une autre interprétation. Supposé, par exemple, que dans les écoles de théologie l'on soit d'accord pour réprouver une pratique, non d'une manière dubitative et après une investigation présentée comme personnelle, mais au nom même de la morale chrétienne : si cet accord se maintient pendant un temps assez long, l'enseignement des écoles se confondra en réalité avec l'enseignement d'une Église qui, en ces matières, ne saurait errer.

Mais, vous concevez aisément pourquoi l'Église use avec la plus grande réserve de cette souveraine autorité. Elle charge plus souvent un organe constitué et accrédité par elle de donner, quand il le faut, aux problèmes si graves qui touchent la foi ou la morale, une solution entourée de toutes les garanties humaines de compétence et d'intégrité. Cet organe est le *Saint-Office.*

Les décisions de cette Congrégation ou de ce tribunal suprême ne sont pas strictement infaillibles. Une sentence isolée rendue par lui, tout en constituant déjà un préjugé très grave pour ou contre une opinion, n'enlève pas nécessairement au sentiment contraire toute vraisemblance et tout crédit. Mais quand les décisions se sont répétées, quand elles ont été acceptées par les auteurs catholiques jusqu'à former la doctrine courante, alors elles nous imposent l'obligation de ne pas y contredire extérieurement, et même d'y donner notre adhésion intérieure, à moins que — supposition bien gratuite — on n'ait l'évidence morale d'une méprise.

Agir autrement serait se rendre coupable d'une présomptueuse témérité.

Voilà les principes qui nous permettront, je l'espère, de mettre au point le côté théologique de la question du fœticide. L'appli-

cation de ces principes requiert une grande circonspection, pour ne pas se tromper sur l'objet même de décisions aussi graves et ne pas en étendre le moins du monde la portée.

Je suivrai l'ordre adopté par M. le Dr Van Aubel dans son savant rapport, et m'efforcerai d'indiquer la nature et la portée des réponses du Saint-Siège concernant l'*avortement artificiel*, — l'*embryotomie sur l'enfant vivant*, — l'*extirpation des embryons extra-utérins.*

I. — DE L'AVORTEMENT PROVOQUÉ OU MÉDICAL

La question de l'avortement est vieille en date. Et jusque vers le milieu du siècle dernier, les moralistes catholiques étaient d'accord pour condamner absolument et dans tous les cas toute action n'ayant d'autre *but immédiat* que l'expulsion d'un fœtus vivant avant l'époque de la viabilité. Auparavant, je ne pense pas que l'on puisse citer un contradicteur sérieux, en dehors du P. Théophile Raynaud, de la Compagnie de Jésus, mort en 1666. Homme d'une érudition prodigieuse, mais d'un moindre discernement, le P. Raynaud inclinait par tempérament vers l'étrangeté et le paradoxe, et dès lors est-il peu digne de confiance dans les matières délicates.

Les médecins du reste donnaient la main aux théologiens, et, si mes renseignements sont exacts, à la fin seulement du XVIIIe siècle, ils commencèrent à excuser l'intervention chirurgicale destinée à sauver la mère aux dépens de son fruit. L'Angleterre vit éclore l'opinion; elle traversa la Manche, et de France passa en Allemagne.

Des théologiens très respectables fléchirent à leur tour, dans le courant du siècle dernier, et admirent, pour certains cas extrêmes, l'honnêteté de l'avortement. Nommons le plus célèbre de tous, le P. Ballerini, professeur au Collège Romain, auquel s'adjoignit, avec quelque hésitation pourtant, le P. Lehmkuhl, une illustration toujours vivante de la théologie morale en Allemagne.

En présence de ce mouvement, le Saint-Siège garda assez longtemps le silence. La première réponse bien formelle du Saint-Office date du 24 juillet 1895. Elle fut sollicitée en ces termes par Mgr Sonnois, archevêque de Cambrai :

“ Certain médecin, appelé auprès de femmes enceintes gravement malades, remarquait parfois que la maladie mortelle n'avait pas d'autre cause que la grossesse elle-même, c'est-à-dire la présence de l'embryon dans la matrice. Pour arracher la mère à une mort inévitable et imminente, il ne lui restait d'autre ressource que de provoquer l'avortement ou l'expulsion du fœtus. Il suivait d'ordinaire cette voie, en ayant soin toutefois de choisir ces moyens et ces opérations qui ne tuaient pas le fœtus dans le sein maternel, mais tendaient à l'en faire sortir vivant, voué cependant à une mort prochaine vu l'absence complète de maturité.

„ Mais, après avoir lu la réponse du 19 août 1889, adressée par le Saint-Siège à l'archevêque de Cambrai, et portant “ que l'on ne pouvait pas enseigner avec sécurité la légitimité d'une opération quelconque directement meurtrière pour le fœtus, même si elle était requise pour sauver la mère „, Titius (le médecin en question) se prend à douter de l'honnêteté de ses pratiques chirurgicales, qui l'amenaient à provoquer assez souvent l'avortement dans le but de sauver des femmes enceintes gravement malades.

„ Pour se rassurer, Titius demande s'il peut, en sûreté de conscience, dans les circonstances décrites, renouveler les opérations indiquées. „

Réponse. “ Il ne le peut pas, d'après les décrets antérieurs, c'est-à-dire ceux du 28 mai 1884, et du 19 août 1889. „

Trois ans plus tard, une nouvelle décision confirme en tous points la précédente.

L'évêque de Sinaloa (*) avait posé les questions suivantes :

“ I. Peut-on hâter l'accouchement, chaque fois qu'un bassin trop étroit empêche la sortie du fœtus au temps normal?

II. Si le bassin de la mère est si étroit que l'accouchement prématuré lui-même est impossible, peut-on provoquer l'avortement ou pratiquer, au temps voulu, l'opération césarienne? „

Il reçut ces réponses : “ A la première question. L'accouchement prématuré n'est pas défendu en soi, s'il est pratiqué pour de justes raisons au temps et de la manière qui permettent, en tenant

(*) Diocèse du Mexique.

compte des faits habituels, de pourvoir à la vie de la mère et de l'embryon.

„ A la deuxième question. Quant à la première partie : non, d'après le décret du 24 juillet 1895 sur le caractère illicite de l'avortement. — Quant à la deuxième partie : rien n'empêche de faire subir à la mère, au temps voulu, l'opération césarienne. „

Ces deux réponses se trouvent encore renforcées par une troisième, toute récente, qui est relative à la grossesse extra-utérine.

Elles se reportent, vous l'avez entendu, à des rescrits antérieurs, de 1884 et de 1889, qui condamnent la craniotomie et refusent, au point de vue moral, de distinguer l'embryotomie de l'avortement.

Depuis qu'elles ont été divulguées, aucun moraliste catholique ne s'est permis de publier une opinion contraire. Et le P. Lehmkuhl a formellement rétracté son avis antérieur.

Dans cet état de choses, nos principes nous conduisent à la conclusion suivante : *il n'est, en aucun cas, permis de pratiquer l'avortement ; c'est-à-dire de tenter n'importe quelle opération n'ayant d'autre utilité immédiate que de détacher un fœtus non viable du sein de la mère.*

II. — DE L'EMBRYOTOMIE SUR L'ENFANT VIVANT

Jadis on ne posait pas la question de l'embryotomie. Elle était résolue d'avance, par l'arrêt de proscription qui frappait l'avortement. Au siècle dernier pourtant, cette destruction violente de l'enfant avant sa naissance a trouvé grâce devant quelques théologiens, depuis qu'on eut découvert le moyen de baptiser l'embryon dans le sein de la mère. Le défenseur le plus habile et le plus instruit de la cause fut un prélat romain, Mgr Avanzini ; et le Cardinal d'Annibale avoue, dans sa *Morale,* avoir lui-même pendant quelque temps partagé cet avis.

Le crédit de tels noms apparaît dans la première réponse du Saint-Siège concernant la question. Elle émane de la Sacrée-Pénitencerie. Ce tribunal de grâce a pour mission de résoudre, pour les fidèles, les cas de conscience qu'ils lui soumettent. Interrogée en 1872 sur ce qu'il fallait penser de l'embryotomie, elle renvoya le pétitionnaire aux auteurs approuvés, tant anciens que

modernes, en lui recommandant la prudence. C'était équivalemment lui permettre de se former une conviction, même d'après les écrivains qui regardaient la pratique comme parfois justifiable.

Cette tolérance ne fut pas de longue durée. En 1884, le Saint-Office fut, en ces termes, saisi de la cause :

" Peut-on, dans les écoles catholiques, enseigner en sûreté de conscience, que l'opération chirurgicale appelée craniotomie est permise, lorsque, à son défaut, la mère et l'enfant vont périr, tandis que, en la pratiquant, on fait périr l'enfant et on sauve la mère ? "

La réponse fut négative; et, vu la gravité de la solution, on ajouta dans la rédaction, qu'elle était pleinement approuvée par le Saint-Père. Remarquez les expressions :

Réponse. " Après un long et mûr examen de tous les éléments, en tenant compte également du mémoire rédigé par des catholiques entendus et transmis par votre Éminence à cette Congrégation, les membres furent d'avis de répondre : *Qu'on ne pouvait, en sûreté de conscience, enseigner cette opinion.*

" Cette réponse, que le Souverain Pontife a pleinement ratifiée dans l'audience qu'il m'a accordée, je la transmets à Votre Éminence, etc. "

L'an 1889, paraît, dans le même sens, une réponse conçue en termes analogues, mais on en étend la portée à toute opération qui tendrait directement à faire périr l'embryon ou la mère. En voici la teneur :

" Dans les écoles catholiques on ne peut, suivant la déclaration du 28 mai 1884, enseigner, en sûreté de conscience, l'honnêteté de l'opération appelée la *craniotomie*, ou de n'importe quelle opération chirurgicale, qui tende directement à tuer l'enfant ou la mère. "

Pour le dire en passant, ces mots : *Tuto doceri non potest* — on ne peut enseigner en sûreté de conscience — signifient, qu'au jugement du Saint-Siège, l'opinion incriminée n'a pour elle aucune raison sérieuse, au moins dans l'état actuel de la science.

Ces réponses sont confirmées par les deux décisions citées plus haut et qui englobent l'avortement dans la même réprobation ; l'an dernier encore, un décret insiste expressément sur le caractère illicite de ces opérations en général.

Il en résulte, Messieurs, que le Saint-Office a pris définitivement

position dans la question de l'embryotomie sur le fœtus vivant; et cette position la condamne. Nous ne pourrions donc, même dans un cas extrême, regarder l'opération comme permise.

III. — DE LA GROSSESSE EXTRA-UTÉRINE

Il y a peu de temps, quelque dix ans, je pense, on consulta à la fois, sur une extirpation d'un fœtus extra-utérin, deux Jésuites, le P. Lehmkuhl, en Allemagne, le P. Sabetti, aux États-Unis, et un Rédemptoriste, le P. Aertnys, de Hollande. Les deux premiers permirent l'extraction (*); le troisième la condamna.

C'est à cette occasion que les théologiens se mirent à traiter de la grossesse extra-utérine.

Une première réponse du Saint-Office, datée de 1895, paraît plutôt favorable à l'avis le plus large.

En effet, la question III : " La laparatomie est-elle licite dans le cas de grossesse extra-utérine, c'est-à-dire de fœtus qui ne sont pas à leur place ? " reçut cette réponse :

" Sous l'empire de la nécessité, il est permis de pratiquer la laparatomie, pour extraire du sein maternel des fœtus ectopiques, pourvu que, dans la mesure du possible, on veille sérieusement et au temps voulu à la vie du fœtus et de la mère. "

Je dois reconnaître cependant que tous ne comprirent pas cette réponse de la même façon; et que le P. Aertnys, ainsi que M. Esbach, l'entendirent dans le sens sévère.

Et cet avis prévalut certainement l'an passé. La Propagande avait transmis au Saint-Office la question suivante, posée par le Doyen de la Faculté de théologie de Montréal : " Est-il permis parfois d'extraire du sein de la mère des embryons ectopiques avant la maturité, c'est-à-dire avant six mois révolus depuis la conception ? "

Le 5 mars 1902, le Saint-Office répondit :

" Non, d'après le décret du 4 mai 1898, qui veut que, dans les limites du possible, on pourvoie sérieusement et en temps oppor-

(*) En ce sens, du moins, qu'ils regardèrent comme permise l'excision d'une tumeur dont la présence crée pour la mère un danger de mort imminent, que la tumeur contienne d'ailleurs ou non un fœtus.

tun à la vie du fœtus et de la mère; et quant à la détermination du temps, le requérant doit se rappeler, d'après le même décret, qu'aucun accouchement prématuré n'est licite que pratiqué au moment et de la manière qui, d'après les prévisions ordinaires, permettent de sauver la mère et l'enfant. „

La fréquence des cas de grossesse extra-utérine, les exemples d' “ ectopeurs „ arrivés à terme et sauvés avec la mère, ou d'autres, morts simplement faute d'avoir été extraits après la viabilité, auront, je pense, beaucoup influencé ces décisions.

Vous connaissez, mieux que moi, l'espèce si intéressante observée par M. le Dr Delétrez. L'excellent chef de clinique de l'Institut chirurgical opéra, l'an passé, une femme, qui porta pendant douze mois un enfant extra-utérin. Après avoir été expulsé de la trompe, ce fœtus continua à se développer dans l'abdomen jusqu'à sept mois, mourut ensuite et demeura pendant cinq mois enterré dans le ventre de sa mère, inconsciente du cadavre qu'elle recélait.

Personnellement, Messieurs, après quelque tergiversation, j'ai adopté, ici encore, l'avis sévère. Mais, en ce moment, je dois me borner à préciser la portée des décisions du Saint-Siège. La dernière réponse du Saint-Office fournit évidemment un très fort argument aux adversaires de l'interruption de la grossesse extra-utérine avant l'époque de la viabilité. Cependant cette réponse est encore isolée. La difficulté de la mettre d'accord avec une réponse antérieure à laquelle elle renvoie cause une certaine obscurité. Aussi n'oserais-je pas, à l'heure actuelle, imposer mon opinion, et condamner celui qui croirait avoir de bonnes raisons pour innocenter l'opération *pratiquée au moment où elle paraît moralement nécessaire au salut de la mère* sans pouvoir être différée.

Permettez-moi seulement de rappeler la nécessité — trop souvent, hélas ! méconnue des parents — de baptiser, au moins sous condition, jusqu'aux moindres embryons ou œufs humains dans lesquels il reste encore un germe probable de vie.

Ma tâche est finie, Messieurs. Vous le voyez : les décisions de l'Église sont dominées par cette grande pensée de l'égale dignité de chaque personne humaine. Ni la mère ne peut être sacrifiée à l'enfant, ni l'enfant à la mère. Ces deux vies sont également inviolables : seul le suprême auteur de la vie a le droit d'en disposer.

Cette considération semble avoir échappé totalement à certains médecins protestants ou incrédules qui raisonnent dans les Académies ou les Congrès sur la question qui nous occupe. Ils comparent les deux vies de la mère ou de l'enfant qui paraissent en conflit. D'après les services qu'elle promet, les chances de durée, l'une est estimée préférable à l'autre. Et ils prononcent, ils exécutent la sentence de mort sur le plus débile. Raisonner ainsi, Messieurs, c'est méconnaître le caractère sacré de la personne, c'est l'avilir au rang des choses. Ainsi, dans un naufrage, on jette la marchandise vulgaire et on sauve la précieuse.

La sévérité du Saint-Siège aura pour résultat immédiat et direct de laisser périr à regret certaines mères qu'un meurtre eût pu sauver. Résultat assurément affligeant et pénible! Mais, d'autre part, Messieurs, n'est-il pas arrivé, dans la doctrine contraire, que des interventions intempestives ont tranché impitoyablement les jours d'un petit être qui ne demandait qu'à vivre avec sa mère, et, relisez le rapport de M. le Dr Van Aubel, n'y a-t-il pas de quoi être effrayé des multiples causes pour lesquelles, dans le camp adverse, on pratique les avortements et les embryotomies ?

Ne l'oublions pas non plus : la nécessité est la mère des inventions. Forcé de respecter l'être même le plus chétif, l'homme appliquera toutes les ressources de son esprit à trouver pour les êtres plus grands d'autres moyens de salut que le meurtre des petits. La rigueur des moralistes peut hâter ainsi ces bienfaisants progrès de l'art opératoire qui éliminent les raisons ou les prétextes médicaux de cruelles immolations. Alors, bien loin de lui en vouloir pour sa sévérité, la science médicale, fière de ses découvertes humanitaires, se tournera, pleine de gratitude, vers l'Église, pour lui dire : je vous remercie de m'avoir fait souvenir du grand précepte : *Tu ne tueras point ! (Applaudissements.)*

M. le Président remercie le R. P. Vermeersch et donne la parole à M. le Dr E. Hubert, professeur à l'Université catholique de Louvain.

Discours de M. le Professeur Hubert

Messieurs,

Je vous remercie de m'avoir invité à venir prendre part à cette discussion. L'honneur que vous m'avez fait, je le reporte à celui vers qui il remonte : vous vous êtes souvenus que Louis Hubert a attaché son nom à la grave question que vous allez examiner. Il a eu le courage — il en fallait en 1852 — de la porter devant l'Académie royale de Médecine ; elle y souleva des débats passionnés, et l'Académie vota la seule conclusion qu'elle pouvait émettre correctement : “ La question du fœticide est de celles dont la solution doit être abandonnée à la conscience du praticien. „

J'ai trouvé les conclusions de l'homme de science et de l'homme de foi dans l'héritage paternel et je les ai gardées fidèlement.

Le droit naturel, la morale et la religion sur lesquels il fondait sa doctrine, combattue alors par la généralité des médecins, n'ont pas changé, mais depuis 1852 la médecine a évolué, le fœticide, jadis en faveur, est tombé dans la réprobation et pour le condamner, la science aujourd'hui ajoute le poids de ses faits matériels aux autorités de raison.

J'aurais aimé traiter le sujet avec tous les développements et le soin qu'il comporte ; vous ne m'en avez pas laissé le temps et, pris à l'improviste, au lieu du gros travail, ce n'est qu'une preuve de bonne volonté ou un témoignage de sympathie que je vous apporte.

Il y a une vingtaine d'années, quelques théologiens — parmi lesquels surtout des Pères Jésuites — ont soutenu la licéité du fœticide par des arguments très intéressants sans doute, mais dont les juges du Saint-Office n'ont pas admis la validité. Ils ont jeté le trouble dans les consciences des médecins chrétiens, car, s'il est licite dans certains cas de sacrifier une vie pour en sauver une autre, nous ne pouvons plus nous croiser des bras qui ne sont plus liés, et, *pouvant* intervenir, nous devons, semblerait-t-il, immoler l'une ou l'autre plutôt que de les laisser périr ensemble.

L'indécision a pris fin. Consultée par l'archevêque de Lyon : *An tuto doceri posse in scholis catholicis, licitam esse craniotomiam quando eâ omissâ mater et filius perituri sint, eâ è contrà admissâ,*

salvanda sit mater infante pereunte? — la Congrégation du Saint-Office " *omnibus diù ac maturè perpensis* „, répondit, le 28 mai 1884 : " *Tuto doceri non posse.* „ — Et cinq ans plus tard, le 19 août 1889, répondant cette fois à l'archevêque de Cambrai, la Congrégation a ajouté : " *Idem dici debere quoàd quamcumque operationem directè occisivam fœtus vel matris gestantis.* „

Le sens de ces décisions n'est pas douteux : ce qu'on ne peut enseigner, on ne peut le faire et *toute opération directement* destructive du fœtus ou de la mère est condamnée. Donc, que la femme enceinte soit mise en péril par la maladie, par l'étroitese de son bassin ou par la grossesse ectopique, nous ne pouvons la défendre contre ces périls par le fœticide, sans nous mettre en rébellion contre l'enseignement de l'Église, défini par le Saint-Office. *Roma locuta est* et, pour le médecin catholique, il n'y a plus à discuter, il y a à se soumettre. — Alors, que venons-nous faire ici?

Devant une confirmation nouvelle du " *non occides* „ biblique, il ne nous reste qu'à nous conformer à notre devise sociale et à tâcher de montrer que l'enseignement de notre foi n'est pas en contradiction avec les données de la science. Je puis le faire victorieusement, sans réplique possible — non pour tous les cas particuliers signalés dans le remarquable rapport de M. le Dr Van Aubel — mais au moins pour le plus commun, celui où femme et enfant à terme sont mis en péril par une angustie pelvienne.

L'enfant a le droit de vivre aussi bien dix minutes avant de naître que dix ans après, et ce droit inhérent à sa nature, on ne peut le lui prendre sans *injustice.*

La femme, sans conteste, a le même droit.

Ces deux droits personnels, également sacrés, lorsqu'ils entrent en conflit se limitent l'un l'autre et, d'après les définitions du Saint-Office, on ne peut plus soutenir " *tuto doceri non posse* „ que l'un ou l'autre peuvent se défendre par le meurtre.

Le meurtre ne trouve de *justification* que dans l'état de *légitime défense* ou d'*agression injuste.* Or, l'enfant n'est pas un agresseur *injuste* et, le fût-il, la femme a pour se défendre d'autres moyens, plus sûrs pour elle, que le meurtre.

On a trop perdu de vue ces vérités, élémentaires cependant, inscrites dans la législation de tous les peuples civilisés : la *mère* n'a pas le droit de vie et de mort sur ses enfants ; le *père,* pas

davantage. Et ce droit que n'ont pas les progéniteurs et que, par conséquent, ils ne sauraient déléguer, où le *médecin* le puiserait-il ? Dans sa conscience ou dans les obligations de sa fonction sociale ? Ni l'une ni les autres ne peuvent le pousser hors du droit ou de la morale.

Ces principes doivent-ils fléchir devant les considérations tout à fait secondaires de la valeur relative des existences en jeu ou des préférences du mari ?

Qui décidera quelle existence est la plus précieuse ? et qu'importe au fond : précieuse ou non, le droit à la vie est le même pour le faible que pour le fort.

On a dit : le mari doit préférer la compagne qu'il s'est choisie à l'enfant qu'il ne connaît même pas encore. Soit ! mais il pourrait prendre fantaisie à ce mari — dont on fait un juge — de préférer l'enfant et alors, en logique, c'est l'épouse qu'il faudrait occire ! Que nous importent les préférences maritales ? Il ne s'agit pas d'une question de goût, et des préférences n'engendrent pas un droit.

Nous avons hâte d'aborder le côté scientifique ou médical de notre sujet, nous nous y sentons plus à l'aise et, aujourd'hui, absolument inexpugnable.

Les statistiques les plus récentes — que nous empruntons aux professeurs Budin et Pinard, de Paris — établissent que sur 200 existences en jeu :

l'embryotomie	perd	11,5	femmes	+	100	enfants	=	111 morts;
la symphyséotomie	„	12	„	+	14	„	=	26 „
la césarienne	„	6,6	„	+	5,7	„	=	12 „

Voilà les faits matériels : ils ont l'éloquence claire et sans réplique des chiffres, et nous pouvons conclure que, matériellement comme moralement, l'opération césarienne est la ressource indiquée, elle sauvegarde le mieux tous les intérêts : pour l'enfant, c'est le salut assuré (*), pour la mère, c'est cinq chances sur cent

(*) L'opération ne fait courir aucun risque à l'enfant, et s'il vit encore au moment où l'on attaque la matrice, on *doit* l'avoir vivant, la mortalité se réduit donc pour lui à zéro. Si les statistiques renseignent encore une mortalité, c'est qu'elles renferment des cas où l'on s'est décidé trop tard à faire le sauvetage. Le malheur n'est pas imputable à l'opération, mais à l'opérateur.

de survie en plus que si l'on se décide pour la symphyséotomie ou le fœticide.

Cela étant, la femme peut-elle repousser l'opération qui sauve? A notre avis, non : ni en conscience, parce qu'elle a des devoirs naturels vis-à-vis de son enfant — ni en raison, parce que, à remplir son devoir elle s'expose le moins elle-même.

S'ensuit-il qu'on puisse la traiter comme l'enfant ou le fou qui se débat contre la raison et l'opérer malgré elle ? Nous estimons qu'on ne peut pas violer sa liberté et qu'il faut obtenir son consentement par la persuasion.

Aux affolées, sourdes à tout, nous déclarons que nous ne tuons pas les petits enfants — et nous affirmons, en toute vérité, qu'elles souffriront moins et courront moins de risques à laisser sauver le leur tout de suite, qu'à le faire tuer ou à le laisser lentement mourir.

Un langage ferme a d'autant plus de chances d'être écouté qu'il offre à la mère la ressource qu'elle a tout intérêt à choisir. S'il ne l'était pas cependant? — Où l'on n'accepte pas nos conseils, nous n'acceptons pas d'ordres; nous refusons absolument le rôle de sacrificateur et, contraint de nous résigner à la seule intervention *légitime* qui reste, nous attendrions que l'enfant ait succombé pour, alors, le mutiler.

Cette attente, nous dit-on, est souvent funeste et nous risquons d'avoir deux morts à déplorer au lieu d'une ! Cela est vrai, mais à qui la faute? Certainement pas à nous ! Qu'on ne nous impute donc pas le malheur que nous avons voulu éviter, mais qu'on ne nous a pas permis d'écarter.

On nous a dit : " Mais s'il s'agissait de votre femme et de votre enfant?... „ Cet argument *ad hominem*, à effet... sur certain public, examiné de face est de nulle valeur. La résolution que je prendrais ne deviendrait pas la bonne par cela seul que je l'aurais prise et alors, pour trancher la question, qu'importe ce que je ferais? Mais il ne me convient pas d'user d'échappatoires et je réponds, tout simplement : je n'ai pas deux morales — ou deux médecines — celle que j'enseigne, et une autre pour mon usage particulier.

Je n'ai examiné que le cas où la défense de la conduite du médecin catholique est devenue aussi facile que complète. Mais il en est d'autres — très rares en réalité — où le sacrifice d'un germe,

condamné d'ailleurs par les conditions mêmes où la nature l'a placé, pourrait, parfois, sauver une femme que ce sacrifice seul peut encore sauver. Les médecins matérialistes n'hésitent pas et nous reprochent de ne pas faire comme eux. Ils restent dans leur logique. Ils ne veulent voir que l'*utilité* de l'acte opératoire; nous, nous nous préoccupons avant tout de sa *moralité* et, ayant choisi pour règle de conduite, non l'*utile* mais le *bien*, respectueux du principe supérieur, nous devons assister le cœur saignant à des catastrophes qu'il eût, peut-être, été possible, mais qu'il n'est pas permis d'empêcher. “ *Non possumus* „, parce que “ *non licet* „.

Messieurs, restons médecins chrétiens, hommes de science et hommes de foi, demandant la voie droite à deux lumières émanées de la même source. Leurs indications ne peuvent être contraires qu'en apparence et momentanément : les incertitudes ou les doutes doivent se dissiper comme les ombres de la nuit devant les progrès du soleil qui monte.

L'Assemblée accueille par ses applaudissements cet éloquent plaidoyer où elle aime à retrouver un filial écho des enseignements de l'éminent fondateur de la chaire obstétricale de Louvain, feu le professeur L. J. Hubert. M. Faidherbe, se faisant l'interprète de la Section, exprime sa gratitude à l'orateur qui a bien voulu apporter à cette séance l'appoint de sa grande autorité.

La parole est donnée à M. le D^r^ Delassus, professeur aux Facultés catholiques de Lille.

Discours de M. le Professeur Delassus

Messieurs,

Vous venez d'entendre le rapport si clair, si net, si documenté du R. P. Vermeersch sur les décisions de Rome au sujet de la licéité du Fœticide.

Si j'ai bien compris, il n'est jamais permis d'attenter directement à la vie du produit de la conception, quel que soit son âge,

même quand la mère et le produit vont mourir tous deux, et que l'expulsion de l'enfant pourrait sauver la mère.

C'est donc une défense qui nous est faite et à laquelle un fils de l'Église doit se soumettre.

Dans ces conditions, il me semble qu'avant de continuer l'examen de ce sujet inscrit à l'ordre du jour et sur lequel j'ai rédigé quelques observations, il me semble qu'il y a une question préalable à poser : Pouvons-nous encore discuter les conditions dans lesquelles nous aurions à faire une opération que notre conscience de catholique nous interdit?

Nous ne pouvons discuter, me semble-t-il, qu'à une condition, à savoir que " la décision de Rome serait réformable ".

La décision de la Congrégation romaine est-elle réformable? telle est la question qu'avant toute chose je poserai au R. P. Vermeersch.

Le R. P. Vermeersch. — M. le Professeur Delassus me demande si, à mon sens, la décision du Saint-Siège est irréformable, s'il n'est pas permis à des praticiens soucieux de se conformer aux décisions de l'Église, de faire valoir respectueusement certaines extrémités pénibles où ils peuvent être acculés. Je réponds : non, la décision n'est pas strictement irréformable, mais elle ne me semble avoir aucune chance d'être réformée. Néanmoins, tout en s'inclinant devant elle, les particuliers demeurent libres de soumettre à nouveau le cas au Saint-Office.

M. le Professeur Delassus. — Puisque le Révérend Père nous dit qu'à son avis, il ne nous est pas défendu de poser à nouveau la question à Rome, que, s'il y a peu de chances d'obtenir la réforme d'une décision mûrement prise, nous pouvons cependant présenter à nouveau de respectueuses observations, des aperçus nouveaux, des faits nouveaux, puisqu'il ne nous est pas défendu d'aller pour ainsi dire en appel du premier jugement, je prendrai la confiance de vous soumettre les notes que j'avais rédigées sommairement en vue de cette discussion.

Il n'est pas douteux que nous nous trouvions devant un conflit entre la science médicale et la morale catholique. Sur un point précis, la médecine dit : " oui ", la théologie dit : " non ". En face

de cette contradiction, la conscience du médecin catholique peut se troubler.

J'ai l'impression que la question a été souvent mal posée. Il semble que l'on ait toujours en vue ces cas où le médecin doit prendre parti pour la mère ou pour l'enfant, sacrifiant ainsi les droits de l'un aux droits de l'autre, comme du temps où, si l'on faisait l'opération césarienne, on provoquait presque à coup sûr la mort de la mère en donnant à l'enfant toutes les chances de vie, ou réciproquement quand, par l'embryotomie, on sacrifiait sûrement l'enfant en sauvant la mère. Dans l'esprit du public, cette façon de concevoir la situation est bien ancrée et l'on y parle " de tuer l'enfant pour sauver la mère ".

Il est à peine besoin, ce me semble, de faire remarquer que telle n'est pas la situation. Nous supposons, par définition, par établissement de la question, que les deux êtres vont mourir si l'on n'intervient pas, et nous nous demandons s'il n'est pas permis de sauver le seul qui puisse être sauvé. Il ne s'agit pas de choix à faire entre deux existences, mais bien d'*en sauver une sur deux condamnées à périr*.

Je supprime donc du même coup tous les plaidoyers très justes, très judicieux, prononcés en faveur des droits de l'enfant. Certains médecins, en vérité, en ont fait trop bon marché, et il n'est pas permis à une saine morale de sanctionner un tel dédain de la vie d'un être humain.

Dès lors, le problème se trouve singulièrement simplifié, et je me permets de le poser en termes précis, que je commenterai ensuite :

Une femme étant grosse d'un enfant non encore viable, s'il est scientifiquement démontré :

A. Qu'elle va mourir avec son enfant;

B. Qu'elle va succomber uniquement du fait de la présence de cet enfant dans son sein ;

C. Que l'expulsion provoquée de cet enfant, en toute hypothèse voué à la mort, reste le seul moyen connu de sauver la mère;

D. Que le salut de la mère est l'unique raison de l'expulsion provoquée.

Est-il exact que la morale catholique interdise de provoquer cette expulsion, même s'il s'y ajoute l'intention d'administrer le baptême au fœtus, qui sans cela en sera sûrement privé?

Voyons chacune des conditions ainsi posées :

A. Je dis : *S'il est scientifiquement démontré.* Du coup j'élimine l'objection qui consiste à dire : Le médecin peut se tromper, la maladie n'est pas aussi grave qu'il le pense. Il ne s'agit pas ici de médecin mais de la science médicale, et nous n'avons pas à envisager les erreurs dues à l'ignorance; il ne peut être question que du médecin au courant de la science actuelle, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique. Donc la femme va mourir.

B. Non seulement elle va mourir, mais elle meurt *uniquement du fait de la présence de cet enfant dans son sein*. La cause n'est pas douteuse, et la relation de cause à effet est bien établie. Je fais donc abstraction des cas où la mort pourrait être la conséquence d'une autre maladie, ce qui rendrait l'expulsion du fœtus inutile.

C. L'expulsion de l'enfant doit rester *le seul moyen connu* de sauver la mère. Cela suppose que *tout* a été employé sans succès, selon les données de la science actuelle. Par cette condition, nous nous mettons à l'abri des interventions hâtives, d'emblée, de parti pris pour ainsi dire, et nous supposons, nous l'avons dit, le médecin au courant des ressources de la science.

D. Le salut de la mère est *la seule et unique raison* de l'expulsion de l'enfant. C'est éliminer toutes les hypothèses que l'on pourrait faire sur des motifs inavouables de la femme qui désirerait n'avoir pas de famille, par crainte de grossesse, d'accouchement, d'allaitement, de charges diverses. J'écarte aussi le cas du praticien qui tenterait ou proposerait le moyen plus radical et plus facile de l'expulsion, soit par crainte d'une difficulté dans une opération grave plus tard à terme si la femme y doit parvenir, soit par l'impossibilité où il serait de faire cette opération et de la diminution du prestige qu'il pourrait en subir. C'est dire que je condamne absolument le sacrifice que l'on ferait du fœtus parce que l'on ne serait pas dans de bonnes conditions pour pratiquer plus tard l'opération césarienne. En pareil cas, le médecin a le devoir de mettre sa malade à même de recevoir tous les soins que comporte sa situation, dût-elle pour cela se déplacer, ou faire appel à un chirurgien de profession ayant la compétence qui manquerait au médecin traitant.

De même j'estime que l'accoucheur ne pourrait provoquer l'expulsion fœtale pour se rendre aux désirs de la famille qui appréhendrait les suites d'une opération grave.

Si en dehors de tout cas concret, la réponse *théorique* à ce problème *théorique* était affirmative, la question serait bien simplifiée, car pratiquement il ne resterait plus dans chaque cas particulier qu'à juger si les conditions requises sont observées ou réalisées.

Entre le médecin et sa conscience, entre l'homme de l'art et la discipline religieuse à laquelle il obéit se poseront les questions suivantes :

Cette femme va-t-elle mourir ? — Oui, selon les données de la science.

L'enfant mourra-t-il avec la mère ? — Oui.

Tous les moyens actuellement connus comme ayant une efficacité ont-ils été employés ? — Oui.

L'expulsion du produit est-elle la dernière ressource, l'*ultima ratio* qui puisse empêcher les deux êtres de mourir et puisse sauver au moins la mère ? — Oui, encore.

La proposez-vous pour le seul motif de sauver la mère, sans aucune convenance personnelle ou intérêt particulier ? — Oui.

Ne vous semble-t-il pas, Messieurs, que posée ainsi, la réponse est sur vos lèvres ? Ne vous semble-t-il pas que le bon sens dicte la réponse ?

Je sais bien que la théologie ne peut pas faire état des arguments *dits de bon sens,* dans ces délicates questions où le sentiment ne doit pas intervenir, mais j'aime à croire que le bon sens est ici d'accord avec la vérité morale et philosophique. Les théologiens nous répondront, Rome nous donnera, je l'espère, la solution que nous attendons avec anxiété.

Car, Messieurs, est-il situation plus angoissante que celle du médecin aux prises avec une telle réalité ?

Il est homme de science et homme de foi chrétienne.

Cette jeune femme va mourir et avec elle son enfant, cause unique de la maladie et de la mort de sa mère.

Il a lutté avec toutes les ressources de sa science et, implacable, la maladie évolue vers le dénouement fatal.

Cette femme aurait encore pu donner à l'Église des âmes, à la patrie des défenseurs !

Il songe à cet enfant qui va mourir. Dans sa foi, il voudrait lui administrer le baptême, et lui ouvrir le Ciel.

Il a sous la main le moyen de réaliser tout cela : sauver la mère, baptiser l'enfant; il peut être le ministre de la religion et celui de la science, et notez-le bien, sans aggraver le sort de l'enfant, il peut sauver la mère.

La gloire de Dieu, le salut d'une âme, le bien de l'humanité, avec la pureté absolue de l'intention, tels sont les seuls mobiles qui dirigent ses actes.

Eh bien! si la sentence dont nous parlons est absolue, s'il est fidèle à ses convictions religieuses, il arrêtera le geste sauveur, et verra mourir deux êtres, quand il avait des chances de sauver au moins l'un.

Dites-moi s'il est une situation plus poignante.

Messieurs, nous ne sommes pas ici pour discuter ces hautes questions morales, et je ne puis passer en revue les arguments donnés par les moralistes qui s'en sont occupés. Tout cela me conduirait sur le terrain de la théologie qui n'est pas le mien. Mais je crois rester sur le terrain médical en disant deux mots d'une objection maintes fois faite, et qui n'est pas sans produire une sérieuse impression. La voici :

“ Permettre cette pratique c'est ouvrir la porte toute grande aux abus, à toutes les négligences. Nombre d'enfants seront ainsi sacrifiés à la légère; le moyen étant facile autant que radical, on n'en cherchera pas de meilleur. „

Je déclare volontiers que je suis tout à fait de cet avis. Il n'est pas douteux que l'on élargit dans certains milieux avec une extrême facilité, le cadre des indications de l'expulsion provoquée du fœtus dans les maladies de la grossesse. Tous les médecins sérieux protestent contre cette tendance et pour cela, ils n'ont pas à faire appel à des considérations morales ou religieuses : il leur suffit de s'appuyer sur la saine pratique médicale. Vous venez d'entendre l'énumération des maladies dans lesquelles certains médecins ont proposé, comme moyen de traitement de la mère, l'expulsion prématurée du fœtus non viable.

Eh bien! je le déclare, je ne connais pas d'argument plus terrible contre le fœticide. Au lieu d'être l'*ultima ratio,* ces médecins en font presque la *prima ratio*, et les moralistes ont

cent fois raison de protester. Aussi ai-je pris soin d'insister sur les conditions de nécessité requises pour recourir à ce moyen suprême.

Mais je me permettrai aussi de faire remarquer que l'objection n'est pas un argument de principe. Empêcher une chose au nom de l'abus que l'on en fait n'est pas dire que la chose en elle-même est mauvaise et doit être interdite en principe.

Si l'abus possible de l'avortement obstétrical était la base de la prohibition qui nous émeut tant, je m'en féliciterais, car j'y verrais la preuve que la pratique sans abus n'est pas défendue en principe. Or, dans les termes où nous avons posé le] problème, il paraît bien que nous soyons loin de l'abus et qu'il ne serait même plus possible de tomber dans cette faute.

Je m'arrête ici, Messieurs; vous remarquerez que je n'ai pas abordé le fond même de la question. Nous ne sommes pas réunis pour cela et cela n'est pas de notre compétence. J'ai simplement voulu poser le problème dans des conditions bien définies, et vous demander si vous ne jugeriez pas opportun de demander un nouvel examen de la question par la Congrégation romaine.

M. le professeur Delassus donne ensuite lecture d'un projet de questions à présenter au Saint-Office.

Ce discours, écouté avec la plus grande attention, est suivi d'une discussion dont voici le résumé.

Discussion

Le R. P. Vermeersch. — J'admire, bien sincèrement, l'habileté avec laquelle M. Delassus tire parti de quelques mots de ma conclusion pour appuyer les vœux de son bon cœur, et se flatter de démontrer que les sévères décisions du Saint-Office n'atteignent pas l'hypothèse émouvante sur laquelle il appelle notre attention. Son argumentation serait pour le moins spécieuse, si j'avais prétendu traiter à fond la question théologique de l'avortement intentionnel, et résumer les raisons qui en font, dans tous les cas, condamner la pratique. Mais cette discussion n'était pas à l'ordre du jour. Il s'agissait seulement d'études médicales, que l'on voulait faire précéder d'un exposé succinct des réponses du

Saint-Siège. On me fit l'honneur de me demander cet exposé. En le présentant à cette assemblée, j'ai tâché de répondre à son désir sans dépasser le cadre qui m'était tracé. Si, dans mon humble travail, j'ai réussi à nettement préciser la portée des réponses du Saint-Office, j'en serai très heureux, mais il n'y faut pas chercher ce que je n'ai pas eu l'ambition d'y mettre, la démonstration d'une thèse de théologie. Tout à fait incidemment, j'ai fait valoir, en faveur de l'Église, ce respect qu'elle professe pour l'égale dignité de toute personne humaine, fût-elle chétive ou encore à naître; mais la violation de cette égalité ne constitue pas le grief unique ou principal que l'on fait à l'avortement ou au fœticide médical.

Bien volontiers, d'ailleurs, je reconnais tout ce que la situation décrite par M. le Professeur Delassus a de poignant. J'ajouterai même qu'en pratique, j'éviterais, dans un cas particulier, de troubler la bonne foi d'un médecin qui se croirait autorisé à recourir à l'avortement comme à un moyen extrême de sauver la mère d'un enfant non viable; je me tairais. Mais ici, on demande la doctrine, il faut dire la vérité entière.

Cette espèce sur laquelle insiste M. Delassus n'est pas ignorée des théologiens. Ballerini l'invoque, et conclut même alors, à l'obligation de pratiquer l'avortement. Ses raisons n'ont pas, cependant, empêché le Saint-Office de formuler son interdiction en termes absolus. Comment espérer, ensuite, qu'un nouvel exposé de ce cas puisse modifier son attitude?

Pour toucher, un instant, aux raisons de cette sévérité, il faut, en morale, se préoccuper non seulement du résultat, mais aussi des moyens. *Non sunt facienda mala ut eveniant bona.* Un meurtre utile n'est pas permis. Prouvez-moi que votre intention enlève à l'avortement son caractère homicide, et je rends les armes.

J'ajouterai — comme considération accessoire — qu'en admettant l'avortement dans le cas si pathétiquement décrit par M. Delassus, on serait fatalement amené à le légitimer dans d'autres hypothèses. Si l'immolation volontaire d'un enfant n'est pas toujours un homicide, pourquoi le serait-il quand la mère, bien malgré elle, se trouve acculée à la nécessité de sacrifier une vie dont la durée et l'utilité sont encore incertaines, pour sauver la sienne, dont toute une famille peut-être réclame la conservation? D'autres iront même jusqu'à permettre l'avortement pour sauver

l'honneur : celui-ci n'est-il pas plus précieux que la vie? Cette crainte d'abus de plus en plus grands fit, il y a quelque dix ans, condamner tout avortement par un congrès de médecins.

Le *sens commun*, enfin, est digne de tous les égards, et le théologie n'en fait pas fi; mais, donné comme guide aux hommes pour les cas ordinaires, ses indications ne sont plus sûres, dans les situations extraordinaires et rares où l'application des principes est nécessairement laborieuse.

M. le Dr Lavrand, professeur aux Facultés catholiques de Lille. — Messieurs, mon intention était de présenter, au sujet de cette grave question du fœticide thérapeutique, des considérations analogues à celles qu'a si bien développées mon excellent collègue, M. Delassus. Mon intervention dans ce débat n'a donc plus de raison d'être. Je voudrais seulement, afin qu'aucun doute ne pût subsister dans nos esprits, soumettre au R. P. Vermeersch, s'il le permet, le cas bien précis que voici : que ferait-il et quelle serait sa réponse si l'accoucheur, dans la chambre de la patiente, lui posait cette question : " La mère et le fœtus non viable vont mourir; je puis sauver la mère et baptiser le fœtus, mais la conséquence de mon intervention sera, en fin de compte, la mort de celui-ci, car, non viable, je le place, en outre, dans des conditions où il lui est impossible de vivre. Quelle conduite la morale catholique me permettra-t-elle de suivre? "

Le R. P. Vermeersch. — Le cas que me propose M. le Professeur Lavrand a été envisagé, si je ne me trompe, dans l'exposé que j'ai eu l'honneur, Messieurs, de vous présenter : si je ne puis éviter une interrogation de ce genre, devant une question aussi catégorique, il ne me resterait qu'à prononcer le " *Non licet* ".

M. le Dr Lavrand. — Le R. P. laisserait donc l'accoucheur agir sous sa responsabilité, sans se prononcer s'il n'était pas mis en cause, mais, interrogé, il répondrait : " *Non licet* ". Voilà donc la conduite du médecin croyant nettement tracée, sans hésitation possible; quoi qu'il lui puisse coûter, il est tenu, en conscience, d'obéir.

Il ne nous reste qu'à remercier le R. P. Vermeersch de la magistrale étude qu'il a bien voulu faire, devant nous, de la partie théologique de ce grave problème du fœticide thérapeutique.

M. le Dr Faidherbe, président de la Section. — Je ne me suis jamais trouvé dans le cas de poser la question de l'avortement pour accidents graves de grossesse, et je crois que certains médecins, même bien intentionnés, deviennent trop facilement pessimistes et ont une tendance à intervenir trop hâtivement.

J'ai eu l'occasion de voir une jeune femme de 27 ans, suspecte de tuberculose et de syphilis tertiaire, qui, enceinte pour la seconde fois, fut prise de vomissements incoercibles. Les traitements antérieurement entrepris n'avaient pu amener aucune amélioration; je commençai à la soigner quand elle en était au troisième mois, et tous mes efforts ne purent produire la suspension des vomissements pendant plus de quatre à cinq jours consécutifs; malgré cela, je réussis à conduire la grossesse jusqu'à sept mois et demi et provoquai alors l'accouchement prématuré qui amena un enfant vivant de 2 kgr. 100. La mère se rétablit, bien qu'elle eût une convalescence difficile (*); elle ne pesait plus que 31 kgr. au lieu de 53. Elle était encore en bonne santé apparente cinq ans après son accouchement, malgré une vie des plus irrégulières. L'enfant mourut à huit mois, de méningite tuberculeuse.

J'ai également donné mes soins à une jeune femme de 24 ans. Lors d'une première grossesse, un confrère l'avait fait avorter à quatre mois environ, pour vomissements; à la suite de cette intervention, elle resta gravement malade et dut subir, au bout de cinq mois, une opération sérieuse. Devenue enceinte deux mois après et prise de vomissements violents dès le second jour, elle s'affaiblit rapidement, et au quatrième mois l'avortement parut devoir se faire spontanément; cependant par le repos absolu, un régime sévère, une médication appropriée et notamment par les injections de glycérophosphate et de cacodylate, je pus l'amener à terme et obtenir un enfant bien constitué qui, muni d'une bonne nourrice, s'est parfaitement développé. La mère s'est rétablie plus rapidement qu'on ne l'eût espéré, étant donné son état de faiblesse.

Certainement, dans ces deux cas, la question de l'avortement

(*) Elle eut pendant près de quinze jours des températures vespérales de 40°1 à 40°5, par suite de la formation d'un phlegmon au creux épigastrique; elle s'était brisée une aiguille de seringue de Pravaz sous la peau, en se faisant des piqûres de morphine.

eût dû se poser et on aurait pu scientifiquement le regarder comme indiqué. L'obligation morale de lutter quand même a cependant amené des résultats excellents, comme dans un autre fait où les vomissements extrêmement menaçants ont cessé à partir du quatrième mois, et ont permis à la mère de se rétablir.

D'ailleurs l'avortement provoqué est-il parfaitement inoffensif et de nature à toujours sauver la mère? Je ne le pense pas; de nombreux exemples prouvent que, malgré les précautions prises, l'intervention peut entraîner de sérieux dangers pour la femme. Dans un cas que connaissent aussi MM. les professeurs Lavrand et Delassus, un jeune médecin très expérimenté, très sagace, très au courant des méthodes d'antisepsie, fit avorter sa femme à trois mois et demi pour des vomissements incoercibles; il se développa, peu après, un phlegmon du ligament large qui emporta l'opérée.

M. le Dr Delassus répond à quelques-unes des observations qui ont été présentées. Il insiste sur l'opportunité d'une nouvelle question qui serait posée au Saint-Office et aurait pour but non de revenir sur un point de doctrine déjà tranché, mais de préciser à nouveau une situation dont tous les aspects n'ont pas été proposés à l'examen de la Cour romaine.

Après quelques échanges d'observations, l'assemblée déclare ne pas voir d'inconvénient à ce qu'une nouvelle formule, dont M. le Professeur Delassus rédigerait le texte, en tenant compte des règles qui doivent être observées en cette grave matière, soit soumise à l'examen de cette haute juridiction.

M. le Dr Loontjens adresse quelques questions, d'ordre médical, à M. le Dr Van Aubel, rapporteur.

M. le Dr Van Aubel y répond.

M. le Dr Faidherbe, président, fait observer qu'il serait difficile, vu l'heure avancée, d'aborder le côté médical de la question, si important qu'il soit. Il est d'avis qu'une séance spéciale pourrait être avantageusement consacrée à la discussion du rapport de M. Van Aubel, c'est-à-dire à l'étude du fœticide *envisagé spécialement au point de vue médical et obstétrical.*

M. le Dr Warlomont, vice-président, veut s'acquitter d'un devoir en remerciant ses confrères français, au nom de la quatrième Section, de la brillante collaboration qu'ils ont bien voulu apporter à cette réunion : M. le Dr Faidherbe a pris une part personnelle active à sa préparation et vient de présider avec distinction ces graves débats, MM. les Drs Delassus, Lavrand, Lemière, professeurs à la Faculté catholique de médecine de Lille, viennent de donner une fois de plus à la Société scientifique de précieux gages de leur sympathie et de leur dévouement. *(Applaudissements.)*

M. le Dr Faidherbe, président, remercie en son nom et au nom de ses confrères de Lille. Personne ne demandant la parole, il déclare la séance levée (7 heures).

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

—

1903

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT :

Cette revue, publiée en exécution de l'article 3 des statuts, paraît tous les 3 mois, depuis janvier 1877, par livraisons de 350 pages environ. Elle forme chaque année deux forts volumes in-8°.

Le prix d'abonnement est de 20 francs par an, pour tous les pays de l'Union postale.

Les membres de la Société ont droit à une réduction de 25 °/₀.

ON S'ABONNE

au secrétariat de la Société scientifique de Bruxelles

11, rue des Récollets, 11

LOUVAIN.

L'administration rachète le numéro de Janvier 1897 de la Revue, ou l'année 1897 entière ; faire l'offre au secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets, Louvain.

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE : **M. Paul Mansion**, *6, quai des Dominicains, Gand.*

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

PREMIER FASCICULE

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1903

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

BRUXELLES, POLLEUNIS ET CEUTERICK, IMPRIMEURS, RUE DES URSULINES, 37.

MÊME MAISON A LOUVAIN, RUE DES ORPHELINS, 32.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem
vera dissensio esse potest.
CONST. DE FID. CATH., c. IV

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1903

Mo. Bot. Garden
1905

PREMIÈRE PARTIE

—

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise : " *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* " (*).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (**).

Art. 4 — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(*) Const. de Fid. cath., c. IV.

(**) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des Questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles. En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui nommer un successeur pour achever son mandat (*).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra

---

(*) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société Scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (*).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

ART. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

ART. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

ART. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques.* II. *Sciences physiques.* III. *Sciences naturelles.* IV. *Sciences médicales.* V. *Sciences économiques.*

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

ART. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

ART. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable

---

(*) ANCIEN ART. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale en octobre pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. ANNALES, 1878, t. II, 1re partie, p. 161; 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879 ;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses Annales s'il y a lieu.

LETTRES

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictiónem

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV[a] de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque

in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat ; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportum que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré dans la Constitution IV *de fide catholica,* le Saint Concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 Janvier 1879, l'An 1 de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis Bruxellas

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id, elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet « Nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse ». Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis,

vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae apud S. Petrum die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils, les membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que « Entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister ». Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 mars 1901, l'An Vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

ANNÉE 1903

Listes des membres fondateurs

S. É. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (1)	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (1)	Anvers.
Le chanoine MAES (1)	Bruges.
Le chanoine DE LEYN (1)	Bruges.
LEIRENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (1)	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le Duc D'URSEL, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cte DE T'SERCLAES (1)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut (1)	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE-CONCEPTION	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS	Liége.
Le Cte DE BERGEYCK	Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT (1), correspondant de l'Institut	Louvain.

(1) Décédé.

Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège de la Compagnie de Jésus.	Louvain.
Collège Saint-Joseph	Alost.
Le chanoine de Wouters [1])	Braine-le-Comte [(Hain.).
Antoine d'Abbadie ([1]), membre de l'Institut . .	Paris.
S. É. le cardinal Haynald ([1]), archevêque de Kalocsa et Bàcs	Kalocsa(Hongrie)
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. Gr. Mgr Du Roussaux ([1]), évêque de. . . .	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens, archevêque de. . .	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin ([1]), évêque de	Namur.
Eugène Pecher	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife	Catane.
S. Exc. Mgr Rinaldini, nonce apostolique. . .	Madrid.
S. Exc. Mgr Granito di Belmonte, nonce apostolique.	Bruxelles.
Éd. Goedseels	Uccle.

Liste des membres honoraires

S. A. R. Charles-Théodore, duc en Bavière . .	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie ([1]), membre de l'Institut . .	Paris.
Amagat, membre de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique	Paris.
Mgr Baunard, recteur de l'Université catholique.	Lille.
Joachim Barrande ([1])	Prague.
A. Béchamp	Lille.
Aug. Béchaux, correspondant de l'Institut. . .	Paris.
Le Prince Boncompagni ([1]) de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.

([1]) Décédé.

Boussinesq, membre de l'Institut.	Paris.
L. De Bussy, membre de l'Institut	Paris.
Desplats	Lille.
P. Duhem, correspondant de l'Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre	Sérignan.
Le docteur Foerster.	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l'Institut. . . .	Lille.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut .	Paris.
P. Hautefeuille (1), membre de l'Institut . . .	Paris.
Dr Heis (1)	Münster.
Charles Hermite (1), membre de l'Institut . . .	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut.	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent, membre de l'Institut	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut.	Paris.
F. Le Play (1)	Paris.
Dr W. Lossen	Königsberg.
Le général Newton	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l'Institut. . .	Laval.
Louis Pasteur (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (1), de la Société royale de Londres.	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux (1), membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Secchi, S. J. (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery.	Pantin.
Aimé Witz.	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
R. Zeiller, membre de l'Institut	Paris.

(1) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles

---

ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique émérite de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.

d'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

d'ADHÉMAR (Vte Robert), professeur suppléant aux Facultés catholiques, 121, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord — France).

ALEXIS-M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

ALLARD (François), industriel. — Châtelineau (prov. de Hainaut).

AMAGAT, membre de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique, 19, avenue d'Orléans. — Paris.

ANDRÉ (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture. — Héverlé (Louvain).

d'ANNOUX (Cte H.), boulevard Alexandre Martin. — Orléans (Loiret — France).

ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon, 12, quai des Messageries. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire) — France).

ARDUIN (abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

BAIVY (Dr), place Saint-Aubin. — Namur.

BALBAS (Thomas), ingénieur des mines. — San-Sébastian (Espagne).

di BARTOLO (Can. Salvatore), 71, Ruggiero Settimo. — Palermo (Sicile).

BAUNARD (Mgr), recteur de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

BAYET (Adrien), 33, Nouveau Marché-aux-Grains. — Bruxelles.

BEAUVOIS (Eug.), à Corberon (Côte-d'Or — France).

BÉCHAUX (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

BEDEL (abbé R.), prêtre de Saint-Sulpice, directeur du Grand Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône — France).

BEERNAERT (Auguste), Ministre d'État, membre de l'Académie royale de Belgique et associé de l'Institut de France, 11, rue d'Arlon. — Bruxelles.

BELPAIRE (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.

DE BERGEYK (C^te^), château de Beveren-Waes (Flandre orientale).

BERLEUR (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

BERLINGIN (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot, par Viviers (Aveyron — France).

BERTRAND (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.

BÉTHUNE (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.

BIBOT (Dr), Place Léopold. — Namur.

DE BIEN (Fernand), 150, rue du Trône. — Bruxelles.

BLEUSET, S. J. (R. P. J.), Collège du Sacré-Cœur, 56, rue de Montigny. — Charleroi.

BLONDEL (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (prov. de Hainaut).

BOLSIUS, S. J. (R. P. Henri), A. 14, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

BORGINON (Dr Paul), 58, rue Dupont. — Bruxelles.

BOULAY (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 80, rue Colbert. — Lille (Nord — France).

BOURGEAT (chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

BOUSSINESQ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, 75, rue Claude Bernard. — Paris.

DU BOYS (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, 54, rue du Mans. — Alençon (Orne — France).

VAN DEN BRANDEN DE REETH (S. Gr. Mgr), archevêque de Tyr, 82, rue du Bruel. — Malines.

BRANLY (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.

BREITHOF (F.), 85, rue de Bruxelles. — Louvain.

DE BROUWER (Michel), ingénieur, 24, rue d'Ostende. — Bruges.

VAN DER BRUGGEN (Bon Maurice), Ministre de l'Agriculture. — Bruxelles.

Bruylants, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Buisseret (Anatole), professeur à l'École des cadets, 5, rue Bosret. — Namur.

de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.

Cabeau (abbé Charles), professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

Camboué, S. J. (R. P. Paul), missionnaire apostolique. — Tananarive (Madagascar).

Capart (Jean), 227, rue du Trône. — Bruxelles.

Capelle (abbé Éd.), 13, rue Peyras. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Cappellen (Guillaume), commissaire d'arrondissement, 4, place Marguerite. — Louvain.

Caratheodory (Costa), 101, avenue Louise. — Bruxelles.

Cartuyvels (Jules), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture et des Travaux publics, 215, rue de la Loi. — Bruxelles.

Casarès (Firmino), farmacia, 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Cicioni (R. D. Giulio Prior), professeur au Séminaire de Perugia (Italie).

Cirera y Salse (Dr Luis), profesor libre de electroterapia, 19, prâl, calle Fontanella. — Barcelone (Espagne).

Cirera, S. J. (R. P. Richard), Lauria, 21. — Barcelone (Espagne).

Claerbout (Cyrille), instituteur, conférencier agricole de l'État, à Pitthem (Flandre occidentale).

Claerhout (abbé J.), directeur des Écoles catholiques de Pitthem (Flandre occidentale).

Cloquet (L.), professeur à l'Université, 2, rue Saint-Pierre. — Gand.

Cogels (J.-B. Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — Bilbao (Espagne).

Collège de la Compagnie de Jésus, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 10 and 11, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises — via Brindisi).

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.
Colombier, 18, rue des Fossés Saint-Jacques. — Paris (Ve).
Convent (Dr Alf.), à Woluwe-Saint-Lambert.
Coomans (Léon), pharmacien, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.
Coomans (Victor), chimiste, 5, rue des Brigittines. — Bruxelles.
Cooreman (Gérard), 1, place du Marais. — Gand.
Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.
Courtoy (Dr), place de la Monnaie. — Namur.
Cousin (L.), ingénieur, 10, rue Simonis. — Bruxelles.
Cousot (Dr Georges), membre de la Chambre des Représentants. — Dinant.
Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
de Croy (Pce Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou le Rœulx (prov. de Hainaut).
Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg (Suisse).
Daubresse (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins. — Louvain.
Davignon (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.
Debaisieux, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
De Becker (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.
De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.
De Brouwer (chan.), curé-doyen. — Ypres.
De Buck (Dr D.), 7, rue des Boutiques. — Gand.
Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Jersey (Iles de la Manche — Angleterre).
Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem (Bruxelles).
De Greeff, S. J. (R. P. Henri), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

De Jaer (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Dejaer (Jules), directeur général des mines, 73, avenue de Longchamps. — Uccle (Bruxelles).

Delacre (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 16, boulevard du Fort. — Gand.

Delaire (A.), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard Saint-Germain. — Paris.

De Lannoy (Stéphane), conservateur des étalons des poids et mesures, 18, rue du Cornet. — Bruxelles.

De Lantsheere (Dr J.), oculiste, 215, rue Royale. — Bruxelles.

De Lantsheere (Léon), professeur à l'Université de Louvain, membre de la Chambre des Représentants, 83, rue du Commerce. — Bruxelles.

Delattre, S. J. (R. P. A.-J.), ancienne abbaye. — Tronchiennes (Gand).

Delaunois (Dr G.), à Bon-Secours, par Péruwelz (prov. de Hainaut).

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer, 24, rue de Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.

Deleu (L.), ingénieur aux chemins de fer de l'État, 84, avenue de l'Hippodrome. — Ixelles (Bruxelles).

Delvigne (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 18, rue de la Pacification. — Bruxelles.

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, 4, rue de l'Horticulture. — Ixelles (Bruxelles).

Demanet (chan.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du Saint-Esprit. — Louvain.

De Moor (Dr), médecin en chef de l'Hospice Guislain, 57, rue des Tilleuls. — Gand.

De Munnynck, O. P. (R. P.), couvent des RR. PP. Dominicains, rue Juste-Lipse. — Louvain.

De Muynck (abbé), professeur à l'Université, Collège du Pape. — Louvain.

Denoël, ingénieur au Corps des mines, 86, avenue de Longchamps. — Uccle (Bruxelles).

Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles,

Deschamps, S. J. (R. P. Alfred), docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Deschamps (Fernand), docteur en droit, 9, rue Leys. — Bruxelles.

De Smedt, S. J. (R. P. Charles), président de la Société des Bollandistes, correspondant de l'Institut, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Desplats (Dr), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Tilly (lieutenant-général J.), de l'Académie royale de Belgique, 162, rue Masui. — Bruxelles.

De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 5, rue de Ligne. — Bruxelles.

De Veer, S. J., (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 448, Singel. — Amsterdam.

De Vuyst (P.), inspecteur de l'Agriculture, 22, avenue des Germains. — Bruxelles.

De Walque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Walque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 16, rue Simonon. — Liége.

De Wildeman (É.), conservateur au Jardin Botanique de l'État, 10, rue du Soleil. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

D'Hondt (Frédéric), directeur du laboratoire communal. — Courtrai.

Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, 44, rue de Bériot. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).

Dressel, S. J. (R. P.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Fauquemont (Limbourg hollandais).

Drion (Bon Adolphe), avocat. — Gosselies.

Dubois (Ernest), professeur à l'Université, 26, quai de l'École. — Gand.

Dufrane (Dr), chirurgien à l'hôpital, 25, rue d'Havré. — Mons.

Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dupont (Dr Émile), médecin de bataillon, chef des laboratoires de bactériologie et de radiographie à l'Hôpital militaire, 12, rue Goffart. — Bruxelles.

Duquenne (Dr Louis), 255, rue Sainte-Marguerite. — Liége.

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonzo (J.-M.), docteur en sciences naturelles, 7, plaza Santa-Cruz. — Madrid.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 339, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

Eynaud (L.), inspecteur général du Génie maritime, 19, rue du Colisée. — Paris.

Fabre (J.-H.), naturaliste. — Sérignan par Vaucluse (Vaucluse — France).

Fabry (Louis), docteur ès-sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille.

Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université de Gand, 42, rue des Patriotes. — Bruxelles.

Faidherbe (Dr Alexandre), 38, rue de l'Hospice. — Roubaix (Nord — France).

de Favereau de Jenneret (Bon), Ministre des Affaires étrangères. — Bruxelles.

Fernandez Osuna (Dr J. F.), catedrático de patología médica, San Anton, 71. — Granada (Espagne).

Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).

Ferrata (S. É. le cardinal), à Rome.

Ferron (Eug.), commissaire du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, avenue de la Porte-Neuve. — Luxembourg (Grand-Duché).

de Fierlant (B^{on} Albert), ingénieur, 206, rue du Trône. — Bruxelles.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), 12, calle de Isabel la Católica. — Madrid.

Folie (F.), membre de l'Académie royale de Belgique. — Grivegnée (prov. de Liége).

de Fooz, 18, rue de Bériot. — Louvain.

Forni (C^{te} Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).

Fournier, O. S. B. (Dom Grégoire), abbaye de Maredsous, par Maredret-Sosoye (gare : Denée-Maredsous — prov. de Namur).

de Foville (abbé), directeur du Séminaire Saint-Sulpice. — Paris.

Francotte (Gustave) Ministre de l'Industrie et du Travail. — Bruxelles.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

de Garcia de la Vega (B^{on} Victor), docteur en droit, 57, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier-Villars, 55, quai des Grands Augustins. — Paris.

Gautier (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.

Gelin (E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Gérard (Ern.), ingénieur en chef, inspecteur général au Ministère des Chemins de fer, Postes et Télégraphes, chef du cabinet du Ministre, 15, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

Gilbert (Paul), ingénieur à Heer-Agimont (Namur).

Gillard, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.), membre de la Chambre des Représentants, château d'Iseghem (Flandre Occidentale).

Gilson, professeur à l'Université, 501, boulevard du Château. — Gand.

Glibert (D^{r} D.), inspecteur du travail. — Uccle (Bruxelles).

Glorieux (D^{r}), 36, rue Jourdan. — Bruxelles.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle (Bruxelles).

Gonzalez y Castejon, lieutenant-colonel d'Etat-Major, professeur de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

GOOSSENS (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

GOOSSENS, S. J. (R. P. Fernand), 11, rue des Récollets. — Louvain.

GORIS (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

GOSSELET (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin. — Lille (Nord-France).

GRAFFIN (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

GRANDMONT (Alphonse), avocat. — Taormina (Sicile-Italie).

GRANITO DI BELMONTE (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Bruxelles.

GRÉGOIRE (abbé Victor), professeur à l'Université, 44, rue de Bériot. — Louvain.

GRINDA (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, 74 y 76, Fuencarral. — Madrid.

DE GROSSOUVRE (A.), ingénieur en chef des mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

GUELTON (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur et de l'Instruction publique, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

GUERMONPREZ (Dr), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

HACHEZ (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de l'Astronomie. — Bruxelles.

HAGEN, S. J. (R. P.), Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).

HAHN, S. J. (R. P. Guillaume), Collège de N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

HALOT (Alex.), consul du Japon, secrétaire du Conseil supérieur de l'État indépendant du Congo, 318, avenue Louise. — Bruxelles.

HAMONET (abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.), membre de l'Institut, vice-président du Conseil général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris.

Havenith, lieutenant-adjoint d'État-Major, 128, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

de la Haye (Auguste), major au 13e régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — Jambes (Namur).

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

Helleputte (G.), membre de la Chambre des Représentants, professeur à l'Université de Louvain. — Vlierbeek (Louvain.)

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 56, rue de la Vallée. — Gand.

de Héneffe, ingénieur agricole, 76, rue Royale Sainte-Marie. — Bruxelles.

Henrard (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 216, boulevard du Hainaut. — Bruxelles.

Henry (Albert), avocat, 47, rue de la Ruche. — Bruxelles.

Henry (le Commt J.), à Bohan-sur-Semois, par Vresse (prov. de Namur).

Henry (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Henseval (Dr Maurice), 11, avenue du Vélodrome. — Ostende.

Hervier (abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heylen (S. G. Mgr), Évêque de Namur.

Heymans (J. F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 7, boulevard des Hospices. — Gand.

Heynen (W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (prov. de Luxembourg); et 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

Huybrechts (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

Hy (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 87, rue La Fontaine. — Angers (Maine-et-Loire — France).

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedrático de Astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 47, Courte rue Neuve. — Anvers.
Jacobs (Mgr), ancien curé-doyen de Sainte-Gudule, 226, avenue de la Couronne. — Bruxelles.
Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 21, rue des Chevaliers. — Bruxelles.
Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), Collège Notre-Dame, 91, avenue des Arts. — Anvers.
de Joannis (abbé Joseph), 33, rue du Cherche-Midi. — Paris.
Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.
Joly (Léon), avocat, 56, avenue Brugmann — Bruxelles.
Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 48, rue de Varenne. — Paris.
Jourdain (Louis), ingénieur, 12, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.
Kaïser (G.), ingénieur, inspecteur du travail au Ministère de l'Industrie, 19, rue Charles-Martel. — Bruxelles.
Kaisin (F.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.
Kennis (G.), ingénieur civil, bourgmestre, 12, rue de Robiano. — Schaerbeek (Bruxelles).
Kersten (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.
Kieffer (abbé J.-Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitche (Lorraine — Allemagne).
Kirsch (R. P. Alexandre-M.), C. S. C., Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).
Kirsch (Mgr J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).
de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, Villa Dalmassière, par Voiron (Isère-France).
Kurth (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy, — Liége.
Laflamme (Mgr), Université de Laval. — Québec (Canada).
Lagasse-de Locht (Charles), inspecteur général des ponts et chaussées, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
Lahousse (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.

LAMARCHE (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.
LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (prov. de Brabant).
LAMBIN, ingénieur des ponts et chaussées, secrétaire du Cabinet du Ministre des Finances et des Travaux publics, avenue de la Brabançonne. — Bruxelles.
LAMBIOTTE (Omer), ingénieur de charbonnages. — Anderlues (prov. de Hainaut).
LAMBIOTTE (Victor), ingénieur, directeur-gérant des charbonnages, d'Oignies-Aiseau, par Tamines (prov. de Namur).
LAMBOT (Oscar), professeur à l'Athénée royal, 31, rue Saint-Jean. — Arlon.
LAMBRECHTS (Hector), 103, avenue de la Couronne. — Bruxelles.
LAMINNE (Chan. Jacques), supérieur du Petit Séminaire de Saint-Trond.
LAMY (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, rue des Moutons. — Louvain.
DE LAPPARENT (A.), membre de l'Institut, membre correspondant de la Société géologique de Londres, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.
LARUELLE (Dr), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.
LEBOUTEUX (P.). — Verneuil par Migné (Vienne — France); ou 25, rue Beauvau. — Versailles (Seine-et-Oise — France).
LEBRUN (Dr), rue de Bruxelles. — Namur.
LEBRUN (Dr Hector), 31, rue Vauthier. — Bruxelles.
LECHALAS (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine-Inférieure — France).
LECLERCQ (Jules), Vice-Président au Tribunal de 1re instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 89, rue de la Loi. — Bruxelles.
LECONTE (Félix), installations électriques, 1, rue des Arts. — Lille (Nord-France); ou 25, rue Royale. — Tournai.
LEEMANS (Joseph), ingénieur civil des mines, 20, rue du Nord. — Bruxelles.
LEFEBVRE (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.
LEFEBVRE (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

Legrand (abbé Alfred), rue de Bruxelles. — Namur.

Leirens-Eliaert, rue du Pont. — Alost.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des mines, 25, rue du Luxembourg — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaitre (Dr), rue de Montigny. — Charleroi.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie à l'École polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28ter, rue Négrier. — Lille (Nord-France).

Le Paige (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 16, place du Peuple. — Louvain.

Leray (R. P. A.), Eudiste, 12, rue du Quinconce. — Angers (Maine-et-Loire — France).

de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (Vicomte), colonel d'artillerie. — Bourges (Cher — France).

de Limburg-Stirum (Cte Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université de Liége, Château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

Lossen (Dr Wilhelm), professeur de Chimie à Königsberg, i. P. (Allemagne).

Lucas, S. J. (R. P. J.-D.), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes (abbé), curé de Saint-Job. — Uccle.

Maestriaux (Valdor), professeur à l'École supérieure de commerce, 33, rue Guillaume-Tell. — Bruxelles.

Mansion (Paul), professeur à l'Université, inspecteur des Études à l'École préparatoire du génie civil et des Arts et Manufactures, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

Martin, docteur, boulevard Ad aquam. — Namur.

Martinez y Saez (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, 6, calle de San Quintin. — Madrid.

Matagne (Henri), docteur en médecine, 31, avenue des Courses. — Bruxelles.

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), ingénieur de la marine, 1bis, rue Pasteur. — Lorient (Morbihan — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mercier (Mgr D.), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

de Mérode-Westerloo (Cte), rue aux Laines. — Bruxelles.

Meunier (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse — Louvain.

Meunier (Fernand), 5, chaussée de Bruxelles. — Tervueren.

Meurs, S. J. (R. P. V.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Micha, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Miranda y Bistuer (Julian), dean de la S. I. Catedral de Segovia (Espagne).

Moeller (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moeller (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.

de Moffarts (baron Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

Monchamp (Mgr Georges), membre de l'Académie royale de Belgique, vicaire général de l'Evêché. — Liége.

de Montessus de Ballore (Cte F.), commandant le Bureau de Recrutement, 20, rue Boucher de Perthes. — Abbeville (Somme-France).

de Montessus de Ballore (Vte Robert), maître de Conférences à l'Université catholique, 121, boulevard de la Liberté. — Lille (Nord-France).

de Moreau d'Andoy (Bon), 11, rue Archimède. — Bruxelles.

Moreux (abbé Th.), professeur au Collège Saint-Célestin. — Bourges (Cher — France).

Mullenders (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liége.

de Nadaillac (Mis), 18, rue Duphot. — Paris; ou Rougemont par Cloyes (Eure-et-Loir — France).

Nava di Bontifé (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

Nerincx (Alfred), professeur à l'Université de Louvain, secrétaire de l'Institut de Droit international, 8, rue Bosquet. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Neuberg (J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 6, rue de Sclessin. — Liége.

Nickers (abbé), curé d'Izel, par Florenville (prov. de Luxembourg).

Nollée de Noduwez, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.

Nyssens (Julien), ingénieur, 44, rue Juste-Lipse. — Bruxelles.

Nyssens (Pierre), directeur du laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

d'Ocagne (Maurice), professeur à l'École des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 30, rue de la Boëtie. — Paris.

de Olavarria (Marcial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, 82, Huertas. — Madrid.

OEhlert (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

Pasquier (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (prov. de Hainaut).

Pasquier (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Patroni (Mgr Giuseppe), prelato domestico de Sua Santita, 42, via dei Cestari. — Rome.

Pecher (Eugène), 379, avenue Louise. — Bruxelles.

Peeters (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Peeters (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.

Pepin (Théophile), 15, rue Pierre Corneil. — Lyon (Rhône-France).

Picard (É.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4, rue Bara. — Paris (VIe).

Pieraerts (chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

de Pierpont (Édouard), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur).

Pierre (abbé Oscar), professeur au Collège de Bellevue. — Dinant.

Poisot (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

Poullet (Prosper), associé de l'Institut de Droit international, professeur à l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Prat (abbé Fr.), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

Proost (Alphonse), directeur général de l'Agriculture, 16, rue Anoul. — Bruxelles; ou Mousty-lez-Ottignies (Brabant).

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

Prudham (abbé), directeur du Collège Stanislas, 22, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Pulido garcia (José), 71, rua de San Mamede. — Lisbonne.

Quairier, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Rachon (abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Ranwez (Fernand), professeur à l'Université, 56, rue de Tirlemont. — Louvain.

Rector (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

de Reul (Gustave), ingénieur, directeur de l'Ecole industrielle, 10, boulevard Cauchy. — Namur.

Reuther (Guillaume), 12, avenue Brugmann. — Bruxelles.

de Ribaucourt (C^te^), 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde (Brabant).

Richald (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

de Ridder (Paul), 96, rue Joseph II. — Bruxelles.

Rinaldini (S. Exc. Mgr), nonce apostolique. — Madrid.

Risueno (Emiliano Rodriguez), catedrático de Historia natural en la Universidad, 16, prâl, calle Duque de la Victoria. — Valladolid (Espagne).

Roberti (Max), notaire, rue de Namur. — Louvain.

Roland (Pierre), ingénieur, 55, rue des Orphelins. — Louvain.

de Romrée (Cte), château de Vichenet. — Le Mazy (prov. de Namur); ou 61, rue de la Loi. — Bruxelles.

Roux (Cl.), professeur aux Facultés catholiques, 25, rue du Plat. — Lyon (Rhône — France).

Rutten (Dr), médecin en chef de l'Institut Ophtalmique, 16, rue de l'Évêché. — Liége.

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

de Salvert (Vte), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 1bis, rue du Potager. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de caminos, 13 y 15 — 3ro, calle de Lope de Vega. — Madrid.

de Sauvage (Cte), 22, avenue de Friedland. — Paris.

Scarsez de Locqueneuille (Anatole), Langemarck (Flandre occidentale); ou 42, rue du Taciturne. — Bruxelles.

Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Scheuer, S. J. (R. P. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger, 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).

Schmitz, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmitz (Théodore), ingénieur civil des mines, 31, rue Jordaens. — Anvers.

Schobbens, docteur en médecine, 49, Longue rue Neuve. — Anvers.

Schollaert, président de la Chambre des Représentants, place Saint-Antoine. — Louvain.

Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.), professeur à l'Institut Saint-Ignace, 47, Courte rue Neuve. — Anvers.

de Schoutheete de Tervarent (Cher). — Saint-Nicolas.

Schreiber, agronome de l'État. — Hasselt.

de Selliers de Moranville (Cher), chef d'État-Major à la 4e circonscription militaire, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

SIBENALER (N.), professeur à l'Université, 106, rue de Namur. — Louvain.

SIMON (D^{r} J.-B.), 108, rue Haute. — Bruxelles.

SIMONART (D^{r}), 33A, rue du Canal. — Louvain.

SIRET (Henri), ingénieur, 27, avenue Brugmann. — Bruxelles.

SIRET (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).

SMEKENS (Théophile), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

SMITS (Eugène), ingénieur, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

DEL SOCORRO (M^{es} José Maria Solano), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, 41, bajo, calle de Jacometrezo. — Madrid.

SOISSON (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 19, rue Joseph II. — Luxembourg (Grand-Duché).

SOLVYNS (Albert), commissaire d'arrondissement. — Tronchiennes (Gand); ou, 138, Coupure. — Gand.

SOREIL, ingénieur. — Maredret-Sosoye, par Anthée (prov. de Namur).

DE SPARRE (C^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

SPINA, S. J. (R. P. Pedro), Colegio del Sagrado Corazón de Jesús, 5, sacristia de Capucinas. — Puebla (Mexique).

SPRINGAEL (Auguste), ingénieur, 22, boulevard de la Toison d'or. — Bruges.

STAELPAERT (abbé), vicaire à Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

STAINIER (Xavier), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.

VAN DEN STEEN DE JEHAY (C^{te} Frédéric), conseiller de légation, Cercle d'Orient. — Constantinople.

STILLEMANS (S. G. Mgr), évêque de Gand.

STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (prov. de Brabant).

STOUFFS (D^{r}), rue de Charleroi. — Nivelles.

VAN DER STRATEN-PONTHOZ (C^{te} François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Le Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Suttor, ingénieur, 19, rue des Bogards. — Louvain.

Swolfs (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Henri Speecq. — Malines.

Tannery (Paul), ingénieur, directeur de la Manufacture des tabacs. — Pantin (Seine — France).

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée, 26, rue Marnix. — Gand.

Thiéry (abbé Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Thiry (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve, bourgmestre. — Pecq (prov. de Hainaut).

Tilman (Firmin), ingénieur. — Anderlues (prov. de Hainaut).

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége.

Torroja y Caballé (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, nos 13 et 15, cto 3o dra, calle de Lope de Vega. — Madrid.

de Trazegnies (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux (prov. de Namur); ou 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

de T'Serclaes (Cte Jacques), capitaine d'État-Major, professeur à l'Ecole de guerre, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

t'Serstevens (Gaston), château de Baudemont, par Virginal (prov. de Brabant); ou 43, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles.

d'Ursel (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine Brabant); ou 25, rue de la Science. — Bruxelles.

de la Vallée Poussin, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 192, rue de Namur. — Louvain.

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 192, rue de Namur. — Louvain.

de la Vallée Poussin (Joseph), chef de cabinet du Ministre de la Justice, 192, rue de Namur. — Louvain.

Van Aubel (Edmond), professeur de physique à l'Université, 136, chaussée de Courtrai. — Gand.

Van Aubel (Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, rue Boduognat. — Bruxelles.

Van Ballaer (chanoine), curé du Sablon, 6, rue Bodenbroek. — Bruxelles.

Van Bastelaer (Léonce), 24, rue de l'Abondance. — Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

Van Caeneghem (abbé), directeur de l'École supérieure commerciale et consulaire. — Mons.

Van den Bossche (G.), avocat, 31, rue Baudeloo. — Gand.

Van den Gheyn (chan. Gabriel), supérieur de l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

Van den Gheyn, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, conservateur à la Bibliothèque royale, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vanderlinden, ingénieur en chef des ponts et chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vander Linden (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Van der Mensbrugghe, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.

Vanderryst, inspecteur adjoint de l'Agriculture. — Tongres.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement Provisoire. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.

Van de Vyver, chargé de cours à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Van de Woestyne (chan.), professeur au Grand Séminaire. — Bruges.

Van Gehuchten, professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 11, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerberghen, docteur en médecine, 15, rue du Trône. — Bruxelles.

Vannutelli (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.
Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 37, quai des Moines. — Gand.
Van Overbergh (Cyrille), directeur général de l'Enseignement supérieur, 102, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.
Van Overloop (Eugène), 152, rue Royale. — Bruxelles.
Van Swieten (Raymond), 3, quai aux Pierres-de-Taille. — Bruxelles.
Vaultrin, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).
Venneman, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.
Verhelst (abbé F.), professeur au Collège Saint-Jean-Berchmans, 4, avenue Quentin Metsys. — Anvers.
Vermeersch, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.
Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.
Verschaffel (R. P.), chargé des travaux astronomiques à l'Observatoire d'Abbadie. — Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).
Vicent, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).
Vignon (Paul), préparateur de Zoologie à la Sorbonne, 9, boulevard Latour-Maubourg. — Paris.
Visart de Bocarmé (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre. — Bruges.
Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.
Vollen (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.
de Vorges (Albert), 4, avenue Thiers. — Compiègne (Oise — France).
de Vorges (Cte E. Domet), 46, rue du Général Foy. — Paris.
Vuylsteke, professeur à l'Université de Louvain, 59, rue du Congrès. — Bruxelles.
Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.
Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.
Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment au 1er guides, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Waucquez (Victor), avocat, 101, rue d'Arlon. — Bruxelles.
de Wavrin (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre orientale).
Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).
Wéry (Vincent), président honoraire du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.
Wilmotte (abbé), professeur au Petit Séminaire. — Floreffe (Namur).
Witz (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).
Wolf, membre de l'Institut, 6, place de la Sorbonne. — Paris.
Wolters (Frédéric), professeur à l'Université, 55, rue du Jardin. — Gand.
Wolters (G.) administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des ponts et chaussées, 21, rue de l'Avenir. — Mont-Saint-Amand (Gand).
Wouters (chanoine Louis), inspecteur principal de l'enseignement, 80, rue Léopold. — Anvers.
Zahm (R. P. J.-A.), C. S. C., Université de Notre-Dame (Indiana. — États-Unis d'Amérique).
Zeiller (René), membre de l'Institut, professeur à l'École supérieure des mines, 8, rue du Vieux Colombier. — Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1903)

BELGIQUE

Flandre occidentale : **Bruges** : Mgr F. Béthune. — de Brouwer (M.). — Coppieters de Stockhove (abbé Ch.). — Springael (Aug.). — Van de Woestyne (chan.). — Visart de Bocarmé (C^te^ A.). — S. G. Mgr Waffelaert. — **Courtrai** : D'Hondt (Fréd.). — **Iseghem** : Gillès de Pélichy (B^on^ Ch.). — **Pitthem** : Claerbout (Cyr.). — Claerhout (abbé J.). — **Ostende** : Henseval (D^r^ M.). — **Ypres** : De Brouwer (chan.).

Flandre orientale : **Gand** : Cloquet (L.). — Cooreman (G.). — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — De Buck (D^r^ D.). — Delacre (M.). — De Moor (D^r^). — Dubois (E.). — Dugniolle (M.). — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — Gilson. — de Hemptinne (A.). — Heymans (J. F.). — Lahousse (D^r^). — Mansion (P.). — Nyssens (P.). — S. G. Mgr Stillemans. — Théron (J.). — Van Aubel (Edm.). — Van Biervliet (J.). — Van den Bossche (G.) — Van den Gheyn (chan. G.). — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe. — Van de Vyver. — Van Ortroy (F.). — Wolters (F.). — Wolters (G.). — **Alost** : Collège Saint-Joseph. — Leirens-Eliaert. — **Beveren-Waes** : de Bergeyck (C^te^). — **Saint-Nicolas** : de Schoutheete de Tervarent (Ch^er^). — **Somergem** : de Wavrin (M^is^). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Tronchiennes** (Gand) : Delattre, S. J. (R. P. A.-J.). — Solvyns (A.).

Province d'Anvers : **Anvers** : Belpaire (F.). — Cogels (J.-B.-Henri). — Institut Saint-Ignace. — Jacopssen, S. J. (R. P. R.). — Schmitz (Th.). — Schobbens. — Schoonjans, S. J. (R. P. Ch.). —

Smekens (Th.). — Verhelst (abbé F.). — Wouters (abbé L.). — **Malines** : S. G. Mgr van den Branden de Reeth. — Dessain (Ch.). — Gautier (chan.). — S. É. le cardinal Goossens. — Swolfs (chan.).

Limbourg : **Hasselt** : Schreiber. — **Saint-Trond** : Laminne (chan.). — **Tongres** : Vanderryst.

Luxembourg : **Arlon** : Lambot (O.). — **Izel** (par Florenville) : Nickers (abbé). — **Noirefontaine** : de Moffarts (Bon P.). — **Virton** : Cabeau (abbé Ch.). — Lefebvre (abbé M.).

Brabant : **Bruxelles** : Bayet (A.). — Beernaert (Aug.). — Bertrand (L.). — de Bien (F.). — de la Boëssière-Thiennes (Mis). — Borginon (Dr P.). — van der Bruggen (Bon M.). — Capart (J.). — Caratheodory (C.). — Cartuyvels (J.). — Collège Saint-Michel. — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cousin (L.). — Craninex (Bon O.). — de Croy (Pce J.). — Cuylits (Dr J.). — Davignon (J.). — De Jaer (C.). — Delannoy. — De Lantsheere (Dr J.). — De Lantsheere (L.). — Delcroix (Dr A.). — Delétrez (Dr A.). — Delvigne (chan. A.). — Denoël. — De Preter (H.). — Deschamps (F.). — De Smedt S. J. (R. P. Ch.). — De Tilly (lieut.-génér. J.). — De Vadder (V.). — De Vuyst (P.). — De Wildeman (É.). — Dubois (G.). — Duchateau-Frentz (Dr). — Dupont (É.). — Fagnart (É.). — de Favereau de Jenneret (Bon). — de Fierlant (Bon Alb.). — Francotte (G.). — de Garcia de la Vega (Bon V.). — Gérard (E.). — Glorieux (Dr). — Goris (Ch.). — S. Exc. Mgr Granito di Belmonte. — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — de Hénefle. — Henrard (Dr É.). — Henrard (Dr F.). — Henry (A.). — Heynen (W.). — Huyberechts. (Dr Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kaïser (G.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambin. — Lambrechts (H.). — Laruelle (Dr). — Lebrun (Dr H.). — Leclercq (J.). — Leemans (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — de Liedekerke de Pailhe (Cte Éd.). — de Limburg-Stirum (Cte Ad.). — Maestriaux (V.). — Matagne (Dr H.). — Meessen (Dr W.). — de Mérode-Westerloo (Cte). — Moeller (Dr). — Moeller (Dr N.). — de Moreau d'Andoy (Bon). — Nollée de Noduwez. — Nyssens (J.). — Pecher (E.). — Peeters (Dr). — Pieraerts (chan.). — Proost (A.). — Provin-

cial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — Quairier. — Reuther (G.). — de Ribaucourt (C^{te}). — Richald (J.). — de Ridder (P.). — Scarsez de Locqueneuille. — de Selliers de Moranville (Ch^{er}). — Simon (D^{r} J.-B.). — Siret (H.). — Smits (E.). — Staelpaert (abbé). — Stinglhamber (É.). — van der Straten-Ponthoz (C^{te} F.). — de Trazegnies (M^{is}). — de T'Serclaes (C^{te} J.). — Van Aubel (Ch.). — Van Ballaer (chan.). — Van Bastelaer (L.). — Van den Gheyn S. J. (R. P. J.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (D^{r} A.). — Van Hoeck (D^{r} Ém.). — Van Keerberghen (D^{r}). — Van Overbergh (Cyr.). — Van Overloop (E.). — Van Swieten (R.). — Vuylsteke. — Warlomont (D^{r} R.). — Waucquez (V.).

Cureghem (Bruxelles) : Degive (A.). — **Ganshoren** : Storms (abbé C.). — **Gembloux** : Stainier (G.). — **Héverlé** (Louvain) : André (J.-B.). — **Ixelles** (Bruxelles) : Deleu (L.). — Delvosal (J.).

Louvain : Mgr Abbeloos. — Breithof (F.). — Bruylants. — Cappellen (G.). — Collège de la Compagnie de Jésus. — Daubresse (P.). — Debaisieux. — De Becker (chan. J.). — Demanet (chan.). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — De Muynck (abbé). — Denys (D^{r} J.). — Deschamps, S. J. (R. P. A.). — De Walque (F.). — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). — de Dorlodot (chan. H.). — Dumont (A.). — de Fooz. — Gillard, S. J. (R. P. J.). — Goossens, S. J. (R. P. F.). — Grégoire (abbé V.). — Guelton (G.). — Mgr A. Hebbelynck. — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Mgr Lamy. — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Maubert (Frère). — Mgr D. Mercier. — Meunier (abbé Alph.). — Meurs, S. J. (R. P. V.). — Micha. — Pasquier (Ern.). — Poullet (Pr.). — Ranwez (F.). — Roberti (M.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J. (R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schmitz, S. J. (R. P. G.). — Schollaert. — Sibenaler (N.). — Simonart (D^{r}). — Le Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (abbé A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — de la Vallée Poussin. — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — de la Vallée Poussin (J.). — Van Gehuchten. — Venneman (D^{r}). — Verriest (D^{r} G.). — Vollen (E.).

Nivelles : Stouffs (D^{r}). — **Saint-Gilles** (Bruxelles) : Nerincx (A.). — Struelens (D^{r}). — **Schaerbeek** (Bruxelles) : Kennis (G.). — **Tervueren** : Meunier (F.). — **Tubize** : Taymans (É.). — **Uccle** : Dejaer (J.). — Glibert (D^{r} D.). — Goedseels (Éd.). — Maes (abbé). — Van der Linden (E.). — **Virginal** : t'Serstevens (G.). — **Vlier-**

beek (Louvain) : Helleputte (G.). — **Wauthier-Braine** : d'Ursel (Cte A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.).

Province de Liége : **Liége** : Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — — De Walque (G.). — Duquenne (Dr L.). — Francotte (Dr X.). — Kurth (G.). — Lamarche (E.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Mgr G. Monchamp. — Mullenders (J.). — Neuberg (J.). — Rutten (Dr). — S. G. Mgr Rutten. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E)..

Grivegnée : Folie (F.). — **Huy** : Gelin (abbé E.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Trooz** : de Locht (L.).

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr). — Van Caeneghem (abbé). — Wéry (V.).

Anderlues : Lambiotte (O.). — Tilman (F.). — **Charleroi** : Bleuset, S. J. (R. P. J.). — Lemaître (Dr). — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.). — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Pecq** : Thiry (Fr.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens.

Province de Namur : **Namur** : Baivy (Dr). — Bibot (Dr). — Buisseret (A.). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Courtoy (Dr). — De Greeff, S. J. (R. P. H.). — Hahn, S. J. (R. P. G.). — S. G. Mgr Heylen. — Lebrun (Dr). — Legrand (abbé A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.). — Martin (Dr). — de Reul (G.). — Visart de Bocarmé.

Bohan-sur-Semois (par Vresse) : Henri (J.). — **Dinant** : Cousot (Dr). — Pierre (abbé O.). — **Floreffe** : de Dorlodot (S.). — Wilmotte (abbé). — **Gembloux** : Stainier (X.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Jambes** : de la Haye (A.). — **Le Mazy** : de Romrée (Cte). — **Maredret-Sosoye** (Anthée) : Fournier, O. S. B. (Dom Gr.). — Soreil. — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Sclayn** : Wéry (Dr A.). — **Tamines** : Lambiotte (V.).

FRANCE

Paris : d'Acy (E.). — Alexis-M. G. (Frère). — Amagat. — Béchaux. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — de Bussy (L.). — Colombier. — Delaire (A.). — École libre de l'Immaculée-Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Eynaud (L.). — de Foville (abbé). — Gauthier-Villars. — Mgr Graffin. — Hamonet (abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (abbé). — Jordan (C.). — de Lapparent (A.). — Lemoine (G.). — de Nadaillac (M^is^). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Prat (abbé F.). — Prudham (abbé). — de Sauvage (C^te^). — Vignon (P.). — de Vorges (C^te^ E. Domet). — Wolf. — Zeiller (R.).

Départements : *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — *Aveyron* : **Penchot** (par Viviers) : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (R. P.). — *Bouches-du-Rhône* : **Aix** : Bedel (abbé R.). — **Marseille** : Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — du Ligondès (V^te^). — Moreux (abbé Th.). — *Côte-d'Or* : **Corberon** : Beauvois (Eug.). — **Dijon** : Poisot (M.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (abbé A.). — *Gironde* : **Bordeaux** : Duhem (P.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Capelle abbé Éd.). — — *Haute-Marne* : **Langres** : Raclot (abbé V.). — *Isère* : **Voiron** : de Kirwan (Ch.) — *Loire* : **Saint-Étienne** : Hervier (abbé J.). — *Loiret* : **Orléans** : d'Annoux (C^te^ H.). — *Maine-et-Loire* : **Angers** : Hy (abbé). — Leray (R. P. A.). — *Mayenne* : **Laval** : Œhlert (D.-P.). — *Meurthe-et-Moselle* : **Ham** (par Longuyon) : Bachon (abbé P.). — **Nancy** : Vaultrin. — *Morbihan* : **Lorient** : de Maupeou (C^te^). — *Nord* : **Lille** : d'Adhémar (V^te^ R.). — Mgr Baunard. — Boulay (chan.). — Bourgeat (chan.). — Delemer. — Desplats (D^r^). — Gosselet (J.). — Guermonprez (D^r^). — Leconte (F.). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (V^te^ R.). — Witz. (A.). — **Roubaix** : Faibherbe (D^r^ A.). — *Oise* : **Compiègne** : de Vorges (A.). — *Orne* : **Alençon** : du Boys. — *Rhône* : **Lyon** : Pepin (abbé Th.). — Roux (Cl.). — **Saint-Georges-de-Reneins** : de Sparre (C^te^). — *Saône-et-Loire* : **Châlon-sur-Saône** : Arcelin (A.). — *Seine* : **Pantin** : Tannery (P.). — *Seine-et-Oise* : **Versailles** : de Salvert (V^te^). — *Seine-Inférieure* : **Rouen** : Lechalas (G.). — *Somme* : **Abbe-

ville : de Montessus de Ballore (C^te^ F.). — *Vaucluse :* **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.). — *Vienne :* **Verneuil** par Migné) : Lebouteux (P.).

ESPAGNE

Madrid : Dusmet y Alonzo (J. M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez y Castejon. — Grinda (J.). — Iniguez y Iniguez (Fr.). — Martinez y Saez (Fr.). — de Olavarria (M.). — S. Exc. Mgr Rinaldini. — Sañz (P.). — del Socorro (J.-M.-S.). — Torroja y Caballé (Ed.). — **Barcelone** : Cirera y Salse (Dr L.). — Cirera, S. J. (R. P. R.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Han. Obeso). — **Cuevas** (prov. Almeria) : Siret (L.). — **Granada** : Fernandez Osuna (Dr G. F.). — **La Coruña** : Casarès (F.). — **Lequeitio** (Vizcaya) : Adan de Yarza (R.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — **Santiago** (Galice) : Fernandez Sanchez (J.). — **Segovia** : Miranda y Bistuer (J.). — **Tortosa** (Tarragona) : R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valencia** : Vicent, S. J. (R. P.). — **Valladolid** : Risueno (E.-R.).

PAYS DIVERS

Allemagne : **Bitche** (Lorraine) : Kieffer (abbé J.-J.). — **Cologne** : Schmidt (A.). — **Königsberg**, i. P. : Lossen (Dr W.).

Angleterre : **Jersey** (Iles de la Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

Autriche : **Bozen** (Tyrol) : Forni (Cte P.).

Hollande : **Amsterdam** : De Veer, S. J. (R. P.). — **Fauquemont** (Limbourg hollandais) : Dressel, S. J. (R. P.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.).

Grand-Duché de Luxembourg : **Luxembourg** : Ferron (E.). — Soisson (G.).

Italie : **Rome** : S. É. le cardinal Ferrata. — Mgr G. Patroni. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Catane** :

S. É. le cardinal Nava di Bontifé. — **Palermo** : di Bartolo (Can. S.). — **Perugia** : Cicioni (R.-G.). — **Taormina** : Grandmont (Alph.).

Portugal : **Lisbonne** : Pulido Garcia (J.).

Suisse : **Fribourg** : Daniels (Dr Fr.). — Kirsch (Mgr J.-P.).

Turquie : **Constantinople** : van den Steen de Jehay (Cte Fréd.).

Canada : **Québec** : Mgr Laflamme.

États-Unis : **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al.-M.). — Zahm (R. P. J.-A.), C. S. C. — **Washington** (Brookland, D. C.) : — Hagen, S. J. (R. P.).

Mexique : **Puebla** : Spina, S. J. (R. P. P.).

Indes Anglaises : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

Madagascar : **Tananarive** : Camboué, S. J. (R. P. P.).

Membres décédés

Bouqué	Gand.
Abbé Bouquillon.	Washington.
Chan. De Leyn	Bruges.
Dr A. Dumont	Bruxelles.
H. Durant	Bruxelles.
J. de l'Escaille de Lier. . .	Hamont (prov. de Limbourg).
P. Hautefeuille	Paris.
Dr F. Lefebvre	Louvain.
Éd. Martens	Louvain.
Massange de Louvrex . . .	Liége.
Chan. Van Aertselaer . . .	Bruxelles.
L. Van Emelén	Gand.
Abbé A. de Weck	Fille-Dieu, sous Romont (Fribourg — Suisse).

Listes des membres inscrits dans les sections

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire

MM. Adan de Yarza.
Vte d'Adhémar.
Balbas.
Chan. di Bartolo.
Belpaire.
Berlingin.
de Bien.
Boussinesq.
du Boys.
M. de Brouwer.
F. Breithof.
de Bussy.
Abbé Cabeau.
Caratheodory.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
Daubresse.
De Bloo.
Jules Dejaer.
Deleu.
Delvosal.
Denoël.
De Tilly.
Dusausoy.
Dutordoir.
Eynaud.
Fabry.
Fagnart.
Bon A. de Fierlant.
Folie.
de Fooz.
Gauthier-Villars.

MM. Abbé Gelin.
Gilbert.
R. P. Gillard, S. J.
Goedseels.
Gonzalez y Castejon.
Grinda.
de Grossouvre.
Hachez.
Hagen.
Haton de la Goupillière.
Havenith.
de la Haye.
Helleputte.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
Camille Jordan.
Jourdain.
Kaïser.
Kennis.
Kersten.
Charles Lagasse-de Locht.
Lamarche.
Lambert.
Lambin.
Lechalas.
Leemans.
Le Paige.
Vte du Ligondès.
Mansion.
Cte de Maupeou.
Cte de Meeus.

MM Micha.
V^te R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
J. Nyssens.
Pierre Nyssens.
d'Ocagne.
de Olavarria.
E. Pasquier.
Abbé Pepin.
É. Picard.
Richald.
de Ridder.
V^te de Salvert.
Pelegrin Sanz.
Sibenaler.
Smits
Soisson.

MM. Soreil.
C^te de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Suttor.
Paul Tannery.
Théron.
Timmermans.
Torroja y Caballé.
C^te Jacques de T'Serclaes.
C^te Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
R. P. Verschaffel.
Wolf.
F. Wolters.
G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM Allard.
Amagat.
André.
Bayet.
R. P. Bleuset, S. J.
Blondel.
Branly.
Bruylants.
Abbé Capelle.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
L. Coomans.
V. Coomans.
R. P. Dechevrens, S. J.
R. P. De Greeff, S. J.
Delacre.
De Lannoy.
Delemer.
Chanoine Demanet.
Abbé De Muynck.
De Preter.

MM. François De Walque.
R. P. Dressel, S. J.
Duhem.
Dumas-Primbault.
André Dumont.
Ferron.
Chanoine Gautier.
Gérard.
R. P. F. Goossens, S. J.
Abbé Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Abbé de Joannis.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.
Lambot.
Laminne.
Leconte.
Lemoine.

MM. Lenoble.
R. P. Leray.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Abbé Maes.
Frère Maubert.
R. P. Meurs, S. J.
Mullenders.
Chanoine Pieraerts.
Abbé Pierre.
Abbé Raclot.
Fern. Ranwez.
de Reul.
Roland.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.

MM R. P. Schoonjans, S. J.
Springael.
Abbé Staelpaert.
Abbé Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Thiry.
Tilman.
Van Aubel.
E. Van der Linden.
Van der Mensbrugghe.
Van de Vyver.
Van Overbergh.
Abbé Verhelst.
Abbé Wilmotte.
Witz.
R. P. Zahm.

3e Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie. Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. Mgr Abbeloos.
d'Acy.
Frère Alexis.
Arcelin.
Abbé Arduin.
Beauvois.
Abbé Bedel.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. H. Bolsius, S. J.
Chanoine Boulay.
Chanoine Bourgeat.
Anatole Buisseret.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
Cicioni.
Cyr. Claerbout.
Abbé J. Claerhout.
Cloquet.
Daniels.
Chanoine De Brouwer.
R. P. Delattre, S. J.

MM. Chanoine Delvigne.
R. P. De Munnynck, O. P.
Gustave De Walque.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine de Dorlodot.
Bon Drion.
Dugniolle.
Dusmet y Alonzo.
J.-H. Fabre.
R. P. Fita, S. J.
Abbé de Foville.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
Mgr Graffin.
Abbé Grégoire.
Mgr Hebbelynck.
J. Henry.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Abbé Hy.

Mo. Bot. Garden
1903

MM. Kaisin.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
de Kirwan.
Kurth.
Mgr Lamy.
A. de Lapparent.
Leclercq.
Mgr Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
Martinez y Saez.
Henri Matagne.
Mgr Mercier.
Abbé Meunier.
Fernand Meunier.
Mgr Monchamp.
Cte F. de Montessus.
Mis de Nadaillac.
Abbé Nickers.
Nollée de Noduwez.
D.-P. OEhlert.
de Pierpont.
Abbé F. Prat.
Proost.
Abbé Rachon.
Cte de Ribaucourt.

MM. Risueno.
Roux.
Scarsez de Locqueneuille.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
H. Siret.
L. Siret.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
Abbé Storms.
Chanoine Swolfs.
de la Vallée Poussin.
Jos. de la Vallée Poussin.
Van Bastelaer.
Abbé Van Caeneghem.
Chan. G. Van den Gheyn.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Vanderryst.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
Vignon.
Albert de Vorges.
Mis de Wavrin.
Chanoine Wouters.
Zeiller.

4e Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bibot.
Borginon.
L. Cirera y Salse.
Convent.
Courtoy.
Cousot.
Cuylits.
Debaisieux.
De Buck.

MM. Degive.
J. De Lantsheere.
Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
De Moor.
Denys.
R. P. Deschamps, S. J.
Desplats.
Dufrane.

MM. Dupont.
Duquenne.
Faidherbe.
Fernandez Osuna.
Francotte.
Gilson.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
R. P. Hahn, S. J.
Étienne Henrard.
Félix Henrard.
Heymans.
Huyberechts.
Lahousse.
Laruelle.
Lebrun.
Hector Lebrun.
Lemaître.
Martin.
Meessen.

MM. Moeller.
Nicolas Moeller.
A. Pasquier.
Peeters.
Rutten.
Schobbens.
Simon.
Simonart.
Stouffs.
Struelens.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Swieten.
Venneman.
Verriest.
Warlomont.
Aug. Wéry.

5e Section

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales. Économie industrielle

MM. Cte d'Annoux.
Béchaux.
Aug. Beernaert.
Cte de Bergeyck.
Berleur.
Bertrand.
Mgr Béthune.
Cappellen.
Cartuyvels.
Cooreman.
Craninckx.
Pce de Croy.
Davignon.
Herman De Baets.
Chanoine De Becker.
Camille De Jaer.

MM. Delaire.
Léon De Lantsheere.
Fernand Deschamps.
De Vadder.
De Vuyst.
D'Hondt.
Ernest Dubois.
Bon Gillès de Pélichy.
Grandmont.
Guelton.
Halot.
de Héneffe.
Albert Henry.
Albert Joly.
Léon Joly.
Lambrechts.

MM. Lebouteux.
Abbé Legrand.
Leplae.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Maestriaux.
de Mérode-Westerloo.
Bon de Moreau d'Andoy.
Nerincx.
Pecher.
Jules Peeters.
Poisot.
Poullet.
Roberti.
de Romrée.
Cte de Sauvage.
de Selliers de Moranville.
Smekens.

MM. van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Taymans.
Mis de Trazegnies.
Gaston t'Serstevens.
Cte d'Ursel.
Van den Bossche.
Van der Smissen.
R. P. Vermeersch, S. J.
Cte Amédée Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.
Vollen.
Cte Domet de Vorges.
Vuylsteke.
Waucquez.
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL

1901-1902

Président, M PROOST.
1^er *Vice-président,* M. le Chanoine BOULAY.
2^e *Vice-président,* M. E. PASQUIER.
Secrétaire, M. P. MANSION.
Trésorier, M. É. GOEDSEELS.
Membres, MM. le Marquis DE LA BOËSSIÈRE-THIENNES.
L. COUSIN.
L. DE LANTSHEERE.
Chanoine DELVIGNE.
Lieutenant-Général DE TILLY.
Fr. DE WALQUE.
G. DE WALQUE.
Dr ACH. DUMONT [1].
Ch. LAGASSE-DE LOCHT.
Dr LEFEBVRE [1].
Comte Fr. VAN DER STRATEN-PONTHOZ.
Chanoine SWOLFS.
Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN.
G. VAN DER MENSBRUGGHE.
Éd. VAN DER SMISSEN.

---

(1) Décédé.

MEMBRES DU CONSEIL

1902-1903

Président, M. le Chanoine Boulay.
1er Vice-président, M. le Chanoine Delvigne.
2e Vice-président, M. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. Éd. Goedseels.
MM. le Marquis de la Boëssière-Thiennes (*).
L. Cousin.
Léon De Lantsheere (*).
Lieutenant-Général De Tilly.
Fr. De Walque (*).
G. De Walque.
Dr A. Dumont [1].
Ch. Lagasse-de Locht.
Dr Lefebvre [1].
E. Pasquier.
A. Proost (*).
Chanoine Swolfs,
Ch.-J. de la Vallée Poussin (*).
G. Van der Mensbrugghe.
Éd. Van der Smissen.

---

[1] Décédé.

(*) Ces membres sont élus pour quatre ans (1902-1906), d'après le nouvel article 8 des statuts.

BUREAUX DES SECTIONS

1902-1903

1re Section

Président, M. Cousin.
Vice-Présidents, MM. E. Pasquier et J. Neuberg.
Secrétaire, M. H. Dutordoir.

2e Section

Président, M. A. de Hemptinne.
Vice-Présidents, MM. Louis Henry et le R. P. V. Schaffers, S. J.
Secrétaire, Le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président, M. l'abbé Maurice Lefebvre.
Vice-Présidents, R. P. H. Bolsius, S. J. et le Cte Domet de Vorges.
Secrétaire, M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président, M. Heymans.
Vice-Présidents, MM. Huyberechts et Delaunois.
Secrétaire, M. J. De Lantsheere.

5e Section

Président d'honneur, M. le Cte. van der Straten-Ponthoz.
Président, M. Ernest Dubois.
Vice-Présidents, MM. Léon Joly et Edmond Leplae.
Secrétaire, M. Alfred Nerincx.

QUESTIONS DE CONCOURS PROPOSÉES EN 1902

1° *Rendre rigoureuse et étendre au cas où le module est imaginaire la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions* thêta *exposée dans les* Fundamenta *de Jabobi en recourant le moins possible à la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire.*

2° *On demande de nouvelles recherches concernant la relation qui existe entre la pression extérieure et la transformation des corps solides en liquides et en gaz.*

3° *La poterie à l'époque de l'âge de la pierre.*

Les mémoires en réponse à ces questions doivent être envoyés au secrétariat avant le 1er octobre 1903 (art. 14 du règlement).

SESSION DU 30 OCTOBRE 1902

A LIÉGE

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Henocq, candidat ingénieur, invité à la séance, donne lecture d'une note *Sur la séparatrice d'ombre et de lumière dans le serpentin.* La section vote l'impression de ce travail dans les Annales : la planche qui l'accompagne devra être réduite.

M. Mansion analyse ensuite le Mémoire du R. P. Bosmans intitulé : *Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent.* On y trouve : 1° la liste de toutes les lettres du célèbre mathématicien déjà publiées ; 2° une notice biographique sur Grégoire de Saint-Vincent, plus précise que celles qui ont paru jusqu'à présent ; 3° des compléments et des rectifications à un travail antérieur de l'auteur ; 4° le texte complet de la célèbre lettre de Grégoire de Saint-Vincent datée de Rome, du 23 juillet 1611, et relative aux observations de Galilée ; 5° deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne, qui se trouvent à la Bibliothèque nationale de Paris et dont l'auteur doit la copie à M. Paul Tannery ; 6° l'*Elogium P. Gregorii a Sancto Vincentio* conservé aux Archives générales du Royaume, à Bruxelles.

Le rapporteur propose et la section vote l'impression de ce Mémoire dans les Annales, où il fera bonne figure à côté des autres publications historiques du P. Bosmans.

M. Mansion fait observer à ce propos qu'il serait bien utile de publier une analyse substantielle des écrits des deux principaux

anciens mathématiciens belges, Simon Stevin et Grégoire de Saint-Vincent. Elle ferait connaître leurs découvertes mieux que la publication de leurs œuvres complètes, comme le *Précis* de Brassinne a fait connaître Fermat.

Le R. P. Bosmans fait ressortir les difficultés de pareille entreprise, surtout pour Grégoire de Saint-Vincent dont tant d'écrits sont inédits.

Il est ensuite donné lecture du rapport suivant de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin sur le Mémoire de M. l'abbé Pepin : *Étude sur quelques équations indéterminées de la forme* $x^2 + cy^2 = z^3$.

M. Pepin s'occupe dans ce Mémoire de l'équation indéterminée

$$x^2 + cy^2 = z^3. \tag{1}$$

La résolution de cette équation présente des difficultés spéciales dans le cas où c est de l'une des formes $8l$ ou $8l + 7$, parce que, dans ces deux cas, le cube peut être pair. Pour montrer la marche à suivre dans la résolution de cette équation quand cette complication a lieu, l'auteur consacre la première partie du Mémoire à l'étude de l'équation

$$x^2 + 47y^2 = z^3, \tag{2}$$

dans laquelle c est de la forme $8l + 7$.

Il commence par établir les formules générales de résolution quand z est impair. A cet effet, il remarque que z doit pouvoir se représenter par une forme quadratique du déterminant -47 qui reproduise la forme principale par triplication. Comme le nombre des classes est premier avec 3, cette forme est elle-même équivalente à la principale et z doit pouvoir se représenter par la forme principale.

Pour obtenir les solutions de l'équation (2), il faut donc poser

$$z = f^2 + 47g^2.$$

En faisant la triplication de cette forme, on obtient, pour représenter x et y, un seul système de formules.

La question se complique quand z est pair, car il faut alors

distinguer la puissance de 2 qui y entre comme facteur. En se servant toujours avec habileté des principes de la composition des formes, l'auteur indique les formules générales de résolution de l'équation (2) dans les cas successifs où l'on a

$$z = 2u, \qquad z = 2^2u, \qquad z = 2^3u, \qquad z = 2^4u,$$

u étant impair. Il ne pousse pas au delà, mais il a soin de faire remarquer que la méthode est générale.

M. l'abbé Pepin ne se contente pas d'établir les formules générales de résolution. Il en déduit une foule de conséquences intéressantes. Et spécialement, en assignant à y des valeurs particulières, il rencontre un grand nombre de théorèmes curieux sur la possibilité ou l'impossibilité de certaines équations de formes plus spéciales. D'autre part, il fait remarquer que la méthode de résolution de l'équation (2) s'appliquerait à toute autre équation de la forme (1) où c serait de la forme $8l + 7$, pourvu que le nombre de formes quadratiques distinctes de ce déterminant c fût premier avec 3.

Le Mémoire comprend encore deux autres parties, respectivement consacrées aux deux équations :

$$(3) \qquad x^2 + 35y^2 = z^3, \qquad x^2 + 499y^2 = z^3.$$

Ces équations sont de la forme (1), mais c est maintenant de la forme $8l + 3$, de sorte que, z étant nécessairement impair, la difficulté relative à la parité s'évanouit. Par contre, il y a une complication d'un autre genre. Dans les deux cas, le nombre des classes du déterminant $-c$ est divisible par 3 et il se fait que deux classes distinctes peuvent reproduire la principale par triplication. En égalant z à une forme de chacune d'elles, puis en faisant la triplication, on obtient un système de deux formules distinctes pour résoudre chacune des équations (3).

Il serait trop long d'analyser toutes les conséquences que l'auteur tire de ces formules, en introduisant des hypothèses plus ou moins restrictives sur les valeurs des variables. Il nous suffira de dire que l'adresse déployée par l'auteur dans le maniement des formes quadratiques et la multiplicité des résultats neufs et curieux qu'il obtient, rendent la lecture de son travail intéressante

et instructive. Je propose à la section d'en voter l'impression dans les ANNALES et d'adresser des remerciements à l'auteur.

Cette proposition est adoptée par la section.

M. le Vicomte R. de Montessus de Ballore fait la communication suivante *Sur la convergence de certaines fractions continues algébriques :*

« Dans un premier mémoire, inséré récemment au BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, j'ai montré que certaines fractions continues algébriques permettaient de représenter les fonctions analytiques dans une aire comprenant le cercle de convergence de leur développement en série de Mac-Laurin, sous conditions que le point singulier situé sur le cercle de convergence fût un pôle et non un point singulier essentiel.

Puis, dans une note insérée aux COMPTE RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, j'ai montré qu'il existe une autre catégorie de fractions continues représentant la fonction $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\omega}$, où ω est une constante quelconque, dans toute l'aire du plan de la variable z, sauf aux points situés sur la coupure joignant les points d'affixes ± 1.

Je me propose de montrer ici que tels développements en fractions continues des fonctions Z vérifiant l'équation différentielle

$$(az + b)\,(cz + d)\,\frac{dZ}{dz} = q.\,Z + U,$$

où a, b, c, d, q sont des constantes quelconques et U un polynome quelconque, représentent les fonctions Z dans tout le plan de la variable z, sauf aux points situés sur la coupure rectiligne joignant les points d'affixes $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$.

1. Posant

$$ac = \mathrm{P}, \quad ad + bc + 2\mathrm{K}, \quad ad - bc = 2\mathrm{R}, \quad q = 2\omega,$$

on déduit des indications de Laguerre (Œuvres, *passim*) qu'il existe entre les termes φ_n, f_n des réduites $\frac{\varphi_n}{f_n}$ de la fraction

continue *canonique* représentant la fonction Z les relations de récurrence

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_{n+1} + (2n+1)(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\,\varphi_n + (n\mathrm{R}+\omega)(n\mathrm{R}-\omega)\,\varphi_{n-1} = 0 \\ f_{n+1} + (2n+1)(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\,f_n + (n\mathrm{R}+\varphi)(n\mathrm{R}-\omega)\,\varphi_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(2)\qquad f_n = \frac{j_{n-1}}{j_n}(n\mathrm{R}-\omega)f_{n-1},$$

la seconde de ces relations s'écrit

$$(3)\quad [(n+1)\mathrm{R}-\omega]\,j_{n-1} + (2n+1)(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\,j_n + (n\mathrm{R}+\omega)\,j_{n-1} = 0.$$

Considérons actuellement la fonction Y,

$$(4)\quad \mathrm{Y} = \alpha^{\frac{\omega}{\mathrm{R}}}[\mathrm{R}+2(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\alpha+\mathrm{R}\alpha^2]^{-\frac{2\omega+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}} \times \int \frac{a_0 + a_1\alpha}{\alpha^{1+\frac{\omega}{\mathrm{R}}}[\mathrm{R}+2(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\alpha+\mathrm{R}\alpha^2]^{1-\frac{2\omega+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}}} = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$$

où les arbitraires a_0, a_1 ont été déterminées de manière que

$$(5)\qquad v_0 = j_0, \qquad v_1 = j_1.$$

La fonction Y vérifie l'équation différentielle

$$[\mathrm{R}\alpha + 2(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\alpha^2 + \mathrm{R}\alpha^3]\,\mathrm{Y}' + [-\omega + (\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\alpha + (\omega+\mathrm{R})\alpha^2]\,\mathrm{Y} = a_0 + a_1\alpha.$$

Si l'on dérive $n+1$ fois par rapport à α cette relation, on obtient, en substituant $m!v_m$ à $\mathrm{Y}^{(m)}$,

$$(6)\quad [(n+1)\mathrm{R}-\omega]\,v_{n+1} + (2n+1)(\mathrm{P}z+\mathrm{Q})\,v_n + (n\mathrm{R}+\omega)\,v_{n-1} = 0$$

et la comparaison des relations (3), (5), (6), montre que

$$v_m = j_m.$$

2. On conclut de cette identité que le rapport

$$\left| \frac{j_n}{j_{n+1}} \right| = \left| \frac{v_n}{v_{n+1}} \right|$$

a pour limite, quand n croît indéfiniment, le rayon de convergence de la série

$$v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots,$$

rayon de convergence égal, vu la relation (4), au plus petit des modules des deux racines de l'équation

$$R\alpha^2 + 2(Pz + Q)\alpha + R = 0.$$

Le produit des modules des racines de cette équation étant *un*, car le produit des modules n'est autre que le module du produit, l'un de ces modules sera inférieur à *un*, si ces modules ne sont pas identiques. Au contraire, si ces modules sont identiques, ils sont, l'un et l'autre, égaux à *un*.

Un calcul facile montre que l'identité des modules a lieu sous condition que

$$\frac{\pi_1 x - \pi_2 y + \chi_1}{\rho_1} = \frac{\pi_1 y + \pi_2 x + \chi_2}{\rho_2} = \delta,$$

avec $\delta^2 \gtreqless 1$, où l'on a écrit

$$z = x + iy, \quad R = \rho_1 + \rho_2 i, \quad P = \pi_1 + \pi_2 i, \quad Q = \chi_1 + \chi_2 i.$$

Si

$$a = a_1 + a_2 i, \qquad b = b_1 + b_2 i, \qquad \ldots\ldots$$

cette condition prend la forme

$$\frac{(a_1c_1 - a_2c_2)x - (a_2c_1 + a_1c_2)y + a_1d_1 - a_2d_2}{a_1d_1 - a_2d_2 - b_1c_1 + b_2c_2}$$
$$= \frac{(a_1c_1 - a_2c_2)y + (a_2c_1 + a_1c_2)x + a_1d_2 - a_2d_1}{a_1d_1 + a_2d_2 - b_1c_2 - b_2c_1}$$
$$= \frac{\delta + 1}{2}.$$

Cette équation représente une droite passant par les points A, B d'affixes $-\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ et la condition $\delta^2 \lesseqgtr 1$ limite le lieu du plan où les modules sont égaux au segment AB.

Ainsi, dans tout le plan de la variable z, sauf aux points situés sur le segment AB

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{j_n}{j_{n+1}} \right| = \mathrm{L} < 1.$$

3. La suite des fractions

$$(8) \qquad \frac{\varphi_1}{f_1}, \quad \frac{\varphi_2}{f_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi_n}{f_n}, \quad \ldots$$

converge ou diverge en même temps que la série

$$(\mathrm{S}) \quad \left(\frac{\varphi_1}{f_1} - \frac{\varphi_2}{f_2}\right) + \left(\frac{\varphi_2}{f_2} - \frac{\varphi_3}{f_3}\right) + \cdots + \left(\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}} - \frac{\varphi_n}{f_n}\right) + \cdots.$$

Si nous observons que la série

$$\Sigma \left(\frac{\varphi_{n-1}}{f_{n-1}} - \frac{\varphi_n}{f_n}\right) \mathrm{X}^n$$

a pour rayon de convergence R,

$$\mathrm{R} = \lim_{n=\infty} \frac{\left| \frac{\varphi_{n+1}}{f_{n+1}} - \frac{\varphi_n}{f_n} \right|}{\left| \frac{\varphi_n}{f_n} - \frac{\varphi_{n=1}}{f_{n-1}} \right|}$$

$$= \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{n\mathrm{R} + \omega} \cdot \frac{1}{n\mathrm{R} - \omega} \times \frac{j_{n+1}}{j_n} \cdot \frac{j_n}{j_{n-1}} (n\mathrm{R} - \omega([n+1]\mathrm{R} - \omega) \right|$$

ou

$$\mathrm{R} = \lim_{n=\infty} \left| \frac{j_{n+1}}{j_n} \right|^2,$$

nous concluons de la relation (7) que la suite des fractions (8) converge dans tout le plan de la variable z sauf aux points situés sur le segment AB.

4. Nous pouvons donc conclure que *le développement de Laguerre relatif à la fonction Z vérifiant l'équation différentielle*

$$(az + b)(cz + d)\frac{dZ}{dz} = qZ + U$$

converge et représente la fonction Z *en tous les points du plan de la variable z, sauf aux points situés sur la coupure joignant les points* A, B *d'affixes* $-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$.

Je me réserve de revenir prochainement sur ces questions.

M. Goedseels fait un exposé synthétique de la théorie des erreurs d'observation, en partant de deux postulats.

Il admet dans le premier postulat qu'on sache coter ou peser le degré de confiance que mérite une valeur observée, de même qu'on sait coter le mérite d'une composition ou d'un examen.

Il admet ensuite qu'on sache coter les fonctions de valeurs observées en fonction des poids des variables, et examine les conditions que doit remplir la formule à l'aide de laquelle on détermine les poids en fonctions.

M. Goedseels considère la formule usitée à cette fin, en montre les avantages et les inconvénients et constate en dernière analyse que cette formule ne répond pas à toutes les conditions requises, mais qu'on n'en connaît pas de meilleure.

M. Goedseels montre enfin que si l'on admet cette formule, on peut démontrer rigoureusement que la méthode des moindres carrés, et les méthodes de la moyenne arithmétique et de la moyenne par poids qui en sont des cas particuliers, fournissent les solutions du poids le plus élevé.

M. Mansion fait observer à ce propos qu'il est plus simple encore de prendre pour postulat la méthode des moindres carrés elle-même, comme l'a fait Legendre.

MM. Le Paige et Mansion sont nommés commissaires pour examiner le Mémoire de M. Goedseels.

M. Mansion fait la remarque suivante *Sur la géométrie riemannienne dite simplement elliptique.* Dans cette géométrie, deux

droites ADA, AGA qui se coupent en A ont ce seul point commun; l'une reste toujours à droite, l'autre toujours à gauche, pour un observateur qui parcourt l'espace plan compris entre elles en longeant l'une d'elles. Elles se comportent, par conséquent, comme deux petits cercles d'une sphère tangents l'un à l'autre : *elles ne se coupent pas en leur point commun.* Cela revient à dire évidemment que la géométrie riemannienne simplement elliptique est inimaginable même dans un domaine restreint, qu'elle n'est pas une géométrie véritable pouvant se réaliser dans le monde physique, quand on la prend dans son sens littéral. Au fond, comme on le sait historiquement, cette géométrie n'est qu'une sous-section de la géométrie projective.

Une note de M. Neuberg *Sur deux complexes du troisième ordre,* une autre de M. Mansion *Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités* sont renvoyées à une séance ultérieure.

Deuxième section

M. le Secrétaire donne lecture du rapport suivant de M. P. Mansion sur un *Mémoire établissant par voie analytique la formule empirique de la dispersion du physicien Ketteler,* par M. E. Ferron.

La seconde section nous a chargé d'examiner le Mémoire de M. Ferron uniquement au point de vue mathématique.

Analyse du Mémoire. Introduction (pp. 1-7). L'auteur fait connaître deux formules empiriques, l'une de M. Ketteler, contenant *quatre paramètres,* l'autre de M. Wilson, en contenant *trois;* ces formules donnent, avec une grande exactitude, comme les observations l'ont prouvé, le coefficient de réfraction, en fonction de la longueur d'onde.

Le but du mémoire est d'établir une formule équivalente à celle de Ketteler, en partant de formules de Cauchy sur le mouvement vibratoire d'un système de molécules d'éther et d'un système de molécules pondérables qui se pénètrent mutuellement, et profitant, chemin faisant, d'une idée de M. Boussinesq.

§ I (pp. 8-12). L'auteur suppose nulles six quantités dans les formules de Cauchy ; il admet que cela entraîne l'annulation de neuf produits où ces quantités entrent comme facteurs, puis que l'on peut intégrer les équations simplifiées au moyen d'intégrales de Fourier sextuples prises de $-\infty$ à $+\infty$. Au moyen de nouvelles hypothèses de Cauchy, appliquées aux intégrales et aux équations elles-mêmes, il trouve trois équations de la forme

$$(a - V^2)I + hJ + gK = 0,$$

$$hI + (b - V^2)J + fK = 0,$$

$$gI + fJ + (c - V^2)K = 0.$$

§ II (pp. 13-15). A cause de l'analogie de forme de ces équations avec les équations différentielles du mouvement vibratoire, dues à Cauchy, l'auteur *admet* que V est égal à $(2\pi\Omega : \lambda)$, Ω étant la vitesse de propagation des ondes, λ la longueur d'onde. Il suppose ensuite le milieu pondérable isotrope et homogène ; il déduit de là pour Ω une valeur de la forme

$$\Omega^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + C\lambda^2,$$

en négligeant bien entendu, dans une série de Maclaurin employée au cours des calculs, les termes qui viennent après le troisième.

§ III (pp. 16-18). En introduisant dans la dernière formule l'indice de réfraction, on trouve pour le carré de celui-ci une expression

$$i^2 = \chi\lambda^2 + \chi' + \frac{\chi''}{\lambda^2} + \frac{\chi'''}{\lambda^4}$$

analogue, à première vue, à la formule de Ketteler, *mais moins générale,* car les coefficients $\chi, \chi', \chi'', \chi'''$ dépendent de trois paramètres indépendants A, B, C seulement. Si M. Ferron avait gardé un terme de plus dans la valeur Ω^2, il aurait pu obtenir dans la valeur de i^2, quatre coefficients indépendants.

§ IV (pp. 19-20). En recourant de nouveau aux développements en série, M. Ferron trouve la valeur de i sous deux formes différentes. La meilleure, selon lui, est celle de la forme

$$(F) \qquad i = a_1\lambda + \frac{a_2}{\lambda} + \frac{a_3}{\lambda^3}.$$

Il présume qu'elle vaut mieux que celles de Cauchy et de M. Boussinesq où i est donné par une expression de la forme

$$b_1 + \frac{b_2}{\lambda^2} + \frac{b_3}{\lambda^4} + \text{etc.}$$

Il cite une vérification expérimentale qui est favorable à sa formule (F).

Appréciation du Mémoire. Les nombreuses hypothèses faites par M. Ferron pour passer des équations primitives de Cauchy à la formule (F), et, en particulier, celle qui lui donne une relation entre V et Ω ne permettent évidemment pas de dire que son travail renferme *une démonstration analytique* de la formule de Ketteler, ou d'une formule moins générale à trois coefficients.

Au fond, *son procédé*, qui est celui de beaucoup de mathématiciens et de physiciens du premier tiers du XIXe siècle, *est purement empirique.* Ce procédé consiste à négliger dans les calculs tout ce qui empêche le calculateur d'arriver à une formule simple. Si la formule est nouvelle, si elle représente bien les résultats de l'observation ou de l'expérience, on pardonne aisément à l'auteur ses hypothèses gratuites ; le succès justifie tout et, comme le disait de Moltke, on ne reproche pas ses fautes de tactique à un général qui vient de remporter une victoire (*).

(*) Comme nous l'avons dit autrefois, dans un rapport à l'Académie royale de Belgique, pour justifier leur procédé de calcul par suppression des termes qui les gênent, les physiciens mathématiciens devraient comparer les équations aux dérivées partielles du problème primitif aux équations aux dérivées partielles plus simples que vérifient leurs formules finales et prouver qu'elles sont pratiquement équivalentes.

Mais si la formule trouvée par ce procédé sans rigueur mathématique est connue, ou, comme dans le cas actuel, n'est qu'un cas particulier d'une formule connue, nous ne voyons aucune utilité à appuyer cette formule, dont la valeur au point de vue expérimental est bien établie, sur des considérations purement subjectives.

Nous ne pouvons donc proposer à la seconde section l'impression du Mémoire de M. Ferron, tout en rendant hommage aux efforts qu'il a faits pour perfectionner un point de l'optique physique.

La section se rallie aux conclusions de ce rapport.

Le R. P. V. Schaffers, S. J., expose quelques remarques *Sur les machines d'électricité statique*. Voici le résumé de cette communication :

I. — On divise généralement les machines d'électricité statique en machines à frottement et machines à influence. C'est une division plutôt *historique* que *logique*. Les anciennes machines étaient très suffisamment caractérisées par ce signe apparent de la présence de larges coussins frotteurs, auxquels on attribuait la production de l'électrité. Quand parurent les nouvelles, où manquaient souvent ces organes, et où le principe de l'influence jouait évidemment un rôle très important, on s'habitua à les désigner par un nom qui rappelait cette différence. Or, cette différence n'est pas la principale qui existe entre les divers types de machines électriques, et ne devrait point, par conséquent, servir de principe fondamental dans leur classification. Il suffit, pour le comprendre, d'observer d'une part que de nombreuses machines, dites à influence (p. ex. celles de Wimshurst, de Bonetti, de Voss), ont des organes de frottement, et d'autre part que dans les machines à frottement, l'électricité est souvent, on peut dire le plus souvent, recueillie par des pointes qui agissent par un mécanisme d'influence.

Je me propose, dans cette Note, d'assigner aux machines à frottement la place qui leur revient logiquement, en les faisant rentrer dans la classification générale appliquée jusqu'ici, du moins explicitement, aux machines à influence seules. On aura ainsi le tableau complet des relations des diverses machines productrices d'électricité à haut potentiel.

Pour cela, il nous faut remonter à la définition même d'une machine électrique. Une machine électrique n'est pas un *producteur* d'électricité dans le sens strict du mot. En effet, il n'en existe aucune, dans l'état actuel de nos connaissances, qui ne présuppose un état électrique spontané préexistant, et qu'on ne peut que développer, sans être en état de le créer là où il n'existe pas. Cet état, c'est la différence de potentiel au contact de corps différents, que ces corps soient d'ailleurs conducteurs ou non. L'électrostatique enseigne un moyen élémentaire d'en tirer parti : c'est le frottement. Par le frottement, on réduit la distance de deux corps et on multiplie leurs points de contact. On réalise de la sorte un condensateur à diélectrique extrêmement mince, donc à capacité très considérable, qui ne peut se décharger par le contact, à cause de la différence de potentiel caractéristique. Quand on séparera les deux corps, la capacité diminuera énormément et le potentiel croîtra en raison inverse. Le frottement ne produit donc pas l'électrisation : il exalte des différences de potentiel existantes. Remarquons maintenant que le frottement est la seule source connue de l'électricité dans nos machines, quelles qu'elles soient; car, parmi les machines dites à influence, celles-là seules s'amorcent spontanément qui présentent des balais de frottement, et les autres doivent se charger au moyen d'une source étrangère, qui, pratiquement, dérive toujours du frottement. D'autre part, le phénomène du frottement implique essentiellement, d'après la conception moderne exposée plus haut, un phénomène d'influence, puisqu'il donne lieu à la constitution d'un condensateur. On voit donc qu'il est impossible de fonder la division courante en machines à frottement et machines à influence sur ce que nous n'appellerons pas la *production,* mais l'*origine* de l'électricité qui se manifeste dans ces appareils.

Mais si la machine électrique ne produit pas l'état électrique, c'est-à-dire la dénivellation des potentiels, elle l'amplifie et tend à la ramener à une valeur constante sur deux conducteurs donnés, quand des causes extérieures tendent à l'altérer. C'est là son véritable rôle, et c'est par là qu'on la définit aujourd'hui. Une machine d'électricité statique est un appareil qui établit et maintient entre deux de ses points appelés pôles une différence de potentiel constante. C'est donc dans la manière dont elle s'acquitte

de cette fonction essentielle que nous devons chercher le principe d'une classification rationnelle.

Dans l'étude des machines à influence, ce point de vue a été adopté depuis plusieurs années (*), et il a conduit à la division bien connue de ces machines en machines à accroissement arithmétique, ou d'addition, et machines à accroissement géométrique, ou de multiplication. Dans les premières, la charge de l'inducteur n'est pas augmentée par les réactions de la machine, de sorte que les porteurs, en passant devant lui, s'y chargent de quantités toujours égales, qu'ils vont ensuite communiquer aux pôles. De la sorte ces pôles se chargent par addition. Dans les autres, les charges inductrices sont augmentées par la réaction des charges induites sur les porteurs, et par suite exercent une influence croissante. Il est facile de voir que les quantités d'électricité communiquées aux pôles croissent en proportion géométrique. Cette dernière classe se subdivise d'ailleurs en deux genres, comme je l'ai montré dans mon mémoire de 1898, celui des machines à rotation simple, ou à inducteurs fixes, et celui des machines à rotations inverses, ou à inducteurs mobiles.

Or, il est aisé maintenant de voir que les machines à frottement rentrent complètement dans la première classe. Ce sont des machines à accroissement arithmétique. En effet, une quantité d'électricité positive, toujours la même, est produite sur le verre par le passage, entre les coussins frotteurs, d'une surface donnée du plateau, et une quantité égale d'électricité négative reste sur le cuir. La première, neutralisée au passage entre les peignes collecteurs, donne lieu à une augmentation de la charge du pôle positif égale, au maximum, à sa valeur; l'autre s'ajoute à celle que portent les coussins et le pôle adjacent. Que les charges constantes ainsi ajoutées proviennent directement du frottement, ou qu'elles n'en procèdent que par l'intermédiaire d'un phénomène d'influence, cela est évidemment accessoire au regard de l'identité du mode de production et d'entretien de la différence de potentiel caractéristique de la machine; mais cela pourra servir

(*) J'ai exposé cette question dans mon mémoire sur la *Théorie des machines électriques à influence*, ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 22e année, 1897-1898.

à distinguer deux genres dans la classe commune des machines à accroissement arithmétique : le premier sera celui des machines dites à frottement, le second comprendra la machine Bertsch et la machine Carré, pour ne parler que des plus connues, parmi les machines dites à influence, qui appartiennent à cette classe.

On se rendra compte plus facilement encore peut-être de la justesse de cette remarque, si l'on considère les appareils les plus simples, les appareils élémentaires, qui réalisent le principe des diverses catégories de machines. Pour charger un conducteur à un potentiel donné plus grand que ceux qu'on pourrait obtenir directement, on peut suivre deux méthodes. Ou bien on lui communiquera successivement, telles quelles, les charges que l'on peut obtenir sur un appareil donné, jusqu'à ce que le total donne le potentiel cherché; ou bien on peut d'abord élever la charge produite directement sur cet appareil, s'il existe un procédé pour cela, et la communiquer ensuite au conducteur. Dans le premier cas, je frotterai par exemple un disque, puis je le mettrai au contact du conducteur par l'intérieur, suivant le principe de Faraday, en répétant les deux opérations autant de fois qu'il le faudra; ou encore, je chargerai le disque en l'employant comme second plateau d'un électrophore, puis je lui ferai toucher le conducteur, en répétant de nouveau successivement les deux opérations. On reconnaîtra sans doute le fonctionnement essentiel des machines à accroissement arithmétique, soit à frottement soit à influence.

Pour réaliser le second cas, il faut recourir à l'électrophore condensateur, ou électrophore à trois plateaux. Je produis encore une charge électrique sur un plateau isolé, par frottement ou par influence, puis, au lieu de le porter dans l'intérieur du conducteur à charger, je l'applique d'abord sur un second plateau verni et tenu par un manche isolant. Pendant le contact je mets le deuxième plateau à la terre en le touchant du doigt, je retire ensuite le doigt d'abord, puis ce second plateau : il demeure chargé contrairement au premier, comme dans l'électrophore ordinaire. J'applique alors un troisième plateau semblable sur le second, et en répétant les mêmes opérations, j'obtiens sur lui une charge de même signe que la première. Enfin, j'établis un contact entre ce troisième plateau et la face intérieure du premier, resté

chargé, en appliquant en même temps le second sur le premier. Il est clair que dans le condensateur ainsi formé, la charge du premier plateau est maintenant le double de sa valeur première, et qu'en touchant du doigt le second, on lui communiquera un complément de charge équivalent. Il en sera de même du troisième. L'opération peut être indéfiniment répétée, jusqu'à ce que la charge ait une valeur convenable.

Au fond, c'est ce qui se passe dans les machines à accroissement géométrique. La différence entre les deux genres de cette classe revient ensuite à l'emploi d'un troisième plateau ou bien plus petit ou bien égal aux deux autres. S'il est plus petit, le condensateur est en quelque sorte incomplet, ses deux armatures n'ayant pas la même surface, et la charge communiquée au premier plateau dans chaque cycle d'opérations est plus petite que la précédente. En d'autres termes, le premier plateau ne gagne pas une quantité d'électricité égale en valeur absolue à celle qu'il produit par influence sur le second. Si les trois plateaux sont de même grandeur, le premier voit sa charge, après chaque cycle, s'accroître d'une quantité égale en valeur absolue à celle qu'il a produite par influence. On peut remarquer que théoriquement ce dernier fonctionnement est le plus parfait. Certains avantages pratiques font parfois préférer le premier. Dans les machines, tous deux élèvent d'ailleurs si rapidement le potentiel qu'on peut les considérer comme équivalents.

II. — Pour expliquer l'excitation spontanée dans les machines à influence, on prend généralement comme point de départ l'existence d'une dissymétrie dans la distribution des potentiels. J'ai admis également cette dissymétrie dans la théorie que j'ai donnée de l'excitation spontanée, en lui assignant comme cause normale l'inégale électrisation produite au contact des divers balais avec les plateaux (*). On pourrait se demander pourquoi une dissymétrie accidentelle ne produirait point parfois l'amorcement spontané des machines non munies de balais, les peignes qui les remplacent remplissant les mêmes fonctions, une fois la dissymé-

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 21e année, 1896-1897, 22e année, 1897-1898, et Revue des Questions scientifiques, avril 1897.

trie établie. Les études récentes sur les décharges dans les gaz permettent de répondre à cette question. C'est que sur des pointes, si fines qu'on les suppose — et elles sont loin de l'être en général sur les machines — l'écoulement de l'électricité ne se fait pas pour une différence de potentiel quelconque. Non seulement il existe un potentiel explosif minimum, qui diminue avec la pression, mais la décharge obscure, le vent électrique, demande aussi pour se produire un potentiel déterminé, comme si l'électricité avait à vaincre une résistance spéciale pour passer d'un métal à un gaz, ou que celui-ci, à partir d'une valeur déterminée du champ, cessât brusquement d'isoler, pour devenir conducteur (*).

Cette valeur est toujours de l'ordre des dizaines, parfois des centaines de volts. Or, il sera bien rare que des différences de potentiel de cette valeur se rencontrent fortuitement dans les machines. Au contraire, dans les machines à contacts frottants, les transports d'électricité peuvent se produire à n'importe quelle différence de potentiel, d'où il suit que les différences de potentiel au contact, qui sont de l'ordre du volt, suffisent pour amorcer le fonctionnement.

M. de Hemptinne, professeur à l'Université de Louvain, fait quelques réflexions sur l'emploi du mot *ion* en électro-chimie, il montre les différences notables qui existent au point de vue physique et chimique entre l'*ion* agent de transport de l'électricité dans le cas des dissolutions salines, et l'agent de transport, encore très mal défini, dans le cas des gaz ; les différences physiques et chimiques sont telles que ces agents apparaissent certainement comme très distincts ; l'emploi du même mot *ion* dans le cas des dissolutions et du gaz, comme on le fait parfois, est donc illogique et certainement contraire à la clarté des idées.

(*) Voir, par exemple, le mémoire de E. Bouty, dans les *Rapports du Congrès international de Physique*, Paris 1900, t. II, p. 341.

Troisième section

Mgr Monchamp entretient la section de l'importance des nouvelles éditions de la correspondance de Galilée, de Descartes et de Huygens.

L'histoire, dit-il, en substance, qui a pour objet les vicissitudes humaines, ne peut pas laisser de côté la vie intellectuelle, la plus noble de toutes. D'excellents esprits méconnaissent encore ce concept de l'histoire et le restreignent pour ainsi dire aux guerres et aux traités; mais leur nombre diminue, et l'étude de l'évolution scientifique sur tous les terrains du savoir a produit de nos jours d'excellents travaux.

L'histoire de la science est fort attrayante; mais de plus elle est d'une grande utilité. D'elle aussi on peut dire qu'elle est *magistra vitae,* car elle enseigne d'une façon concrète la déontologie du savant et la méthode à suivre pour progresser, et elle le fait même en découvrant les écarts et les erreurs.

Pour le XVII^{e} siècle surtout, la correspondance des savants est un instrument de travail d'une valeur inappréciable : elle remplace pour l'histoire intellectuelle les chroniques et les cartulaires de l'histoire civile et religieuse. De notre temps les savants s'adressent surtout aux revues et aux bulletins; mais au siècle de Louis XIV c'était principalement par correspondance qu'ils communiquaient leurs trouvailles; leurs lettres passaient de mains en mains, on en faisait des copies, parfois à l'insu de leurs signataires et avant qu'elles parvinssent à destination. Cette correspondance garde d'ailleurs son caractère intime; nous sommes ainsi initiés à l'existence totale des savants, et si par là ils ne grandissent pas toujours à nos yeux, on les voit tels qu'ils sont, ce qui en fin de compte vaut mieux.

Actuellement on publie en Italie, en France et en Hollande la correspondance de Galilée, de Descartes et de Huygens. Les lettres de ces savants étaient en bonne partie inédites ou dispersées dans des ouvrages difficiles à rencontrer. Les nouvelles éditions nous les donnent toutes, classées chronologiquement, scrupuleusement conformes aux originaux, accompagnées de notes et

jointes aux missives des correspondants, même à des lettres de tiers.

L'importance de cette triple publication n'échappera à personne. Le XVII^e siècle est une époque de rénovation scientifique. Galilée en est le principal initiateur; il emploie sa logique incomparable à la démolition des théories physiques d'Aristote que par ailleurs il connaissait très bien — chose rare de nos jours; en même temps il exalte, perfectionne et pratique excellemment la méthode expérimentale. Descartes est avant tout un constructeur de synthèses d'une ingéniosité remarquable; il expérimente aussi, mais moins et moins bien que Galilée.

Huygens ne connaît déjà plus le système d'Aristote, ou du moins il ne s'en occupe pas. Les vastes synthèses à la cartésienne ne semblent pas non plus de son goût. Il va surtout aux expériences et à la recherche d'instruments d'observation exacte.

Dans leur correspondance ces trois grands hommes se montrent croyants convaincus. Huygens est un protestant sincère qui a toujours gardé la religion de son enfance et depuis est resté absorbé par la science. Malgré certaines faiblesses, Descartes et Galilée sont des catholiques pratiquants; Descartes est même un fervent.

Au point de vue de notre histoire nationale, cette triple correspondance présente aussi de l'intérêt. Notre pays n'a pas ignoré le nouveau mouvement d'idées; il a rencontré chez nous des partisans et des adversaires : leurs noms, leurs ouvrages, et parfois leurs lettres apparaissent. Nous renvoyons pour de plus amples développements aux livres que nous avons publiés sur cet objet spécial (*).

En terminant, je tiens à féliciter chaleureusement les savants éditeurs de Huygens, de Descartes, et tout spécialement M. Antoine Favaro, professeur à l'Université de Padoue, l'éditeur de Galilée. Grâce à ce savant, non seulement nous posséderons une édition splendide des œuvres, de la correspondance et du procès de Galilée, mais de plus nous sommes arrivés à connaître

(*) *Histoire du cartésianisme en Belgique*, Liége, Dessain, 1886. — *Galilée et la Belgique*, Liége, Dessain, 1892. — *Les correspondants belges du grand Huygens*, Liége, Dessain, 1894.

jusque dans leurs moindres détails tous les événements relatifs à ce grand homme. Favaro est réellement le Bollandiste de Galilée; il a publié plus de cent travaux sur lui, dont beaucoup sont volumineux, et qui tous sont écrits avec une érudition consommée.

M. Fernand Meunier montre la photographie d'un insecte hyménoptère de la Sierra del Montsech (Catalogne) qui par son facies morphologique général a de l'affinité avec les Pimplides du genre Ephialtes. L'aréole des ailes est peu visible mais la tarière paraît avoir été aussi longue que chez les espèces de ce genre.

Les hyménoptères *Terebrantia* doivent être considérés au nombre des grandes raretés paléoentomologiques. On pensait, jusqu'à ce jour, que les *Metabola* n'avaient fait leur apparition qu'à l'époque tertiaire.

Deux récentes découvertes, isolées il est vrai, semblent contredire cette supposition : 1° La présence d'une *Thenthredinidae*, la *Nematus cretaceus* Frič (*), sur les schistes du Cénomanien de Péruc. 2° L'existence d'un insecte voisin des *Ephialtes* dans le Kiméridgien de Catalogne (**).

M. F. Meunier termine sa communication en disant que, dans l'état actuel de nos connaissances paléohyménoptérologiques, il est seulement permis de supposer (en attendant l'examen de nouveaux matériaux d'études) que les *Metabola* se sont montrés vers la fin des temps jurassiques (***).

La section vote l'impression dans les Annales de la Société d'un *Supplément aux chasses hyménoptérologiques et diptérologiques des environs de Bruxelles,* que lui présente M. Fernand Meunier. Voici ce supplément.

De nombreuses chasses aux hyménoptères et aux diptères de la

(*) Die thierischen Reste der Perucer schichten, Archiv der Naturwissenschafte. Landes durchforschung von Böhmen, Bd, XI, n° 2, p. 166. Prag. 1901.

(**) Il sera décrit dans les mémoires de l'Académie des sciences de Barcelone.

(***) Buckland (The Annals and Magazine of National History, vol. IX. London 1842, p. 163), croit pouvoir ranger parmi les hyménoptères un insecte du houiller près de Glasgow. La détermination de cet auteur est erronée, un articulé de cet ordre ne pouvant se rencontrer à cette échelle stratigraphique.

banlieue de Bruxelles me permettent de signaler un nouveau contingent d'espèces de la région belge.

Comme dans mes listes antérieures (*), je signale par un * les espèces déjà observées en Hollande (**).

I. HYMÉNOPTÈRES

XYLOCOPIDAE

Ceratina cyanea, K (coerulea, Vill.).

Un ♂. Watermael ; fin mai.

MELECTIDAE

Ammobatoïdes bicolor, Lep.

Une ♀. Linkebeek ; fin juillet.

Une ♀. Tervueren ; fin août.

CHRYSIDIDAE

Hedychrum rutilans, Meg.

Six ♀ ; du 5 au 8 septembre sur l'achillée mille-feuilles.

Une ♀ a été prise à Rouge-Cloître par feu Wesmael et une autre à Uccle-Stalle par feu A. de Bormans.

Hedychrum roseum, Rossi.

Plusieurs individus. Linkebeek, Tervueren ; fin août et commencement de septembre.

TRIGONALIDAE

Trigonalis Hahnii, Spin (europaea, Westw.).

Un ♂. Watermael ; fin juillet.

La collection du Dr J. Jacobs renferme quelques spécimens de cette espèce.

(*) Ann. Soc. scient., t. XIX, 2e partie, 1895 ; t. XX, 2e partie, 1896 ; t. XXI, 2e partie, 1897 ; t. XXII, 1898.

(**) Van der Wulp, F. M. et De Meyere, I. C. H. *Nieuwe naamlijst van Nederlandsche Diptera,* t. XLI, S' Gravenhague.

II. DIPTERES

MYCELOPHILIDAE

Ceroplatus lineatus, Winn. *
Une ♀. Ixelles; septembre, semble très rare.

Rymosia fenestralis, Meig.
Obtenu d'éclosion de Boletus edulis (*); 31 octobre, 8 novembre.

Mycetophila punctum, Winn. *
Obtenu d'éclosion de Boletus edulis ; 7 novembre.

Exechia lateralis, Winn. *
Obtenu d'éclosion de Boletus edulis ; 28 janvier.

Acnemia amoena, Winn.
Watermael ; comme *M. lutea,* Winn.

Macrocera lutea, Winn. *
Watermael ; septembre. Endroits ombragés et humides.

Cordyla fusca, Winn. *
Deux cents exemplaires obtenus d'éclosion de Boletus edulis ; octobre à janvier.

Sciophila incisurata, Winn.
Watermael ; octobre, assez commun.

STRATIOMYDAE

Pachygaster Leachi, Curtis. * Watermael.
" *atra,* Meig. * "
Sur les broussailles, très commun.

ASILIDES

Laphria marginata, Linn. *
Rouge-Cloître ; août.

(*) Ces champignons ont été récoltés dans la forêt de Soignes.

EMPIDAE

Rhamphomygia atra, Meig. *
♂ et ♀ (in copula) Watermael ; fin mai.

DOLICHOPODIDAE

Psilopus contristans, Meig. *
Plusieurs ♂. Watermael.

Hydrophorus inaequalipes, Macq.*
Sur de petites mares à Watermael ; de fin avril à juin.

PLATYPEZIDÆ

Platypeza vittata, Zett.
Une ♀. Auderghem ; fin septembre.

Platypeza rufa, Meig.*
Trois ♀. Auderghem ; fin septembre.

Platypeza holosericea, Meig.
Une ♀. Watermael ; 16 août.

Callomyia elegans, Meig.
Une ♀. Uccle ; 5 août.

PHASINÆ

Syntomogaster delicatus, Meig.*
♂ et ♀. Watermael ; fin mai.

GYMNOSOMINÆ

Gymnosoma nitens, Meig.
Une ♀ capturée par Louise Meunier. Watermael ; 2 juin.

OCYPTERINÆ

Ocyptera brassicaria, Linn.*
Une ♀. Watermael ; juillet.

TACHININAE

Micropalpus fulgens, Meig.*
Une ♀. Watermael; août.

Myobia pacifica, Meig.
Une ♀. Watermael; juillet.

Exorista confinis, Fall.*
♀. Watermael.

Exorista affinis, Fall.*
Une ♀. Etterbeek.

Exorista libatrix, Panzer.*
Une ♀. Etterbeek; fin juillet.

Nemorilla maculosa, Meig.*
Linkebeek; août. Assez commun.

Tachina erucarum, Rond.*
Un ♂. Tervueren; fin août.

Scopolia costata, Fall.*
Watermael, sur les broussailles; au mois de juin. Pas rare, mais par place.

Scopolia latifrons, Zett.*
Une ♀. Watermael; fin mai.

Hypostena medorina, Schiner.*
Linkebeek, paraît rare.

Savia (Phyto) melanocephala, Meig.
Watermael et Tervueren; fin mai et août.

Nyctia claripennis, R. Desvoidy.
Deux ♀. Watermael; mai.

ANTHOMYINÆ

Homalomyia lepida, Wied.*
♀. Watermael; mi-juillet. Commun.

Limnophora didyma, Zett.*
Une ♀. Watermael; mi-juillet.

Spilogaster maculosa, Meig.*
♂. Linkebeek.

Anthomyia pratincola, Panz.*
Un ♂. Auderghem ; fin août.

Pegomyia fulgens, Meig.*
Un ♂. Watermael.

SAPROMYZINÆ

Palloptera ustulata, Fall.*
♀. Watermael.

TRYPETINÆ

Tephritis flavipennis, Loew.*
Plusieurs spécimens. Watermael ; fin mai.

SEPSINÆ

Themira putris, Linn.*
Linkebeek.

Madiza glabra, Fall.*
Cinq ♂. Sur un talus d'étage bruxellien, près de la gare d'Etterbeek ; fin avril.

CHLOROPINÆ

Chlorops cereris, Fall.*
Linkebeek.

Mosillus æneus, Fall.
Quatre individus en compagnie de *Madiza glabra*.

EPHYDRINÆ

Hydrellia griseola, Fall.*
Watermael ; depuis fin avril, sur les petites mares.

GEOMYZINÆ

Diastata costata, Meigen.*
♀. Rouge-Cloître; fin septembre, pas rare.

AGROMYZINÆ

Napomyza (Phytomyza) lateralis, Fall.
Une ♀; fin mai. Watermael.

La section nomme commissaires M. le chanoine de Dorlodot et M. l'abbé de Joannis pour l'examen d'un mémoire envoyé en réponse à la question de concours : *On demande de nouvelles recherches sur les insectes tertiaires.*

Rappelant sa précédente communication sur *le révélateur du noyau cellulaire*, le R. P. H. Bolsius, S. J. ajoute un mot à propos de Fontana, dont il a pu examiner l'ouvrage original. D'après le texte et les figures de l'ouvrage de Fontana : *Sur le venin de la vipère, etc.* (Florence 1781), le P. Bolsius n'ose pas affirmer que ce que Fontana a vu et figuré mérite d'être appelé, avec certitude, *un noyau cellulaire*. Le sujet sera développé dans un mémoire qui paraîtra dans les Annales de l'*Academia Pontificale dei nuovi Lincei*.

M. De Wildeman dépose sur le bureau un exemplaire du deuxième fascicule de ses *Études sur la Flore du Katanga.*

Il résume les recherches qu'il a pu effectuer sur cette flore d'après les matériaux récoltés dans la région par M. le commandant Ed. Verdick, qui vient de repartir pour le centre de l'Afrique.

Les matériaux rapportés par le commandant Verdick, ont été préparés sur les conseils de M. le capitaine Lemaire, chef de l'Expédition scientifique du Katanga, qui à la suite de la mort malheureuse du Dr Dewindt, avait laissé à Lukafu le matériel destiné à la préparation des plantes sèches.

Les 600 numéros de plantes rapportés par le commandant Verdick ne peuvent naturellement suffire pour se faire une idée complète de la végétation de cette région. En effet, le Katanga est un plateau assez élevé dans lequel la brousse domine ; au dire de

nombreux voyageurs, les graminées seraient abondantes ; cependant dans les récoltes du commandant Verdick ne se trouvaient que peu de graminées ; une d'elles constitue un type spécifique nouveau.

Parmi les familles les mieux représentées on peut citer les Légumineuses et les Acanthacées ; dans ces deux familles les espèces nouvelles sont nombreuses et, comme on pouvait le prévoir, toutes ces plantes montrent beaucoup d'analogie avec celles qui composent la flore de l'Afrique orientale anglaise et de l'Afrique orientale allemande. On peut également dire que la flore du Katanga fait la transition entre la flore du nord et celle du sud et qu'elle a plus de rapport avec ces deux flores qu'avec celles de l'Afrique centrale et occidentale. La vaste forêt centrale du Congo a certainement empêché la dispersion vers l'ouest de bien des plantes orientales ; du nord au sud le chemin est beaucoup plus ouvert, c'est une brousse depuis le Nil jusqu'au Zambèse, et c'est également en suivant cette voie que la civilisation a pénétré dans le centre africain, venant de l'Égypte, comme le démontrent l'étude ethnographique et les cultures indigènes.

M. De Wildeman attire ensuite l'attention sur différentes espèces nouvelles et sur certains genres qu'il a été amené à créer ; il montre aussi sur une carte géo-botanique qu'il a dressée la délimitation probable des régions botaniques de l'État Indépendant du Congo et celles du Bassin de ce fleuve qui s'étend en partie en dehors des limites de l'État.

La dissémination des spores chez le Coprin chevelu (Coprinus comosus) fait l'objet d'une communication de M. l'abbé Lefebvre. En voici le résumé.

Le Coprin chevelu, comme la plupart des Coprins, présente, à maturité, le singulier phénomène de la déliquescence.

A peine la volve s'est-elle rompue au niveau de l'anneau, que les feuillets, d'abord blanc crême, deviennent roses, puis violets, puis bruns, puis noirs. Progressivement leur humidité augmente, il se forme un enduit visqueux noir, et les feuillets *se fondent* littéralement en une sorte d'encre qui dégoutte sur le sol. La transformation commence et se propage à partir du bord du chapeau vers le sommet du pied. Bientôt le chapeau lui-même se gâte de la même façon : ses bords se liquéfient, se fendent et s'effilochent ;

la portion supérieure du chapeau résiste la dernière : elle se recroqueville et s'étale au sommet du pied. Enfin cette portion elle-même se liquéfie, et comme elle est plus mince à son point d'attache central, ce point cède avant le reste : on voit alors le chapeau se percer, la couronne qui reste s'effondrer sur le sol, où elle achève de se fondre, et le pied, toujours indemne de la corruption, persiste seul et se dessèche debout au centre de la ruine fangeuse.

Les Coprins ayant été très communs cette année, j'ai cherché à étudier ce phénomène; toutefois mes expériences n'ont pu se compléter à temps, et je n'apporte à la section que quelques observations préliminaires.

L'agent de la liquéfaction est probablement l'antique *Bacterium termo* de Dujardin, auquel il faut aujourd'hui appliquer le nom de *Bacillus termo.*

Ce microbe est trop connu pour que je m'arrête à en faire la description. Je ferai seulement remarquer que c'est un liquéfiant énergique de la gélatine. Dans le Coprin, il semblerait qu'il liquéfie la cellulose. Je n'ai pas encore terminé mes recherches sur cette action chimique.

Il suffit toujours pour obtenir une culture pure de *Bacillus termo* d'ensemencer le milieu avec une *öse* de platine plongée au hasard dans la masse liquéfiée d'un Coprin.

La liquéfaction des Coprins me paraît avoir pour but la dissémination des spores. Quand on examine le liquide noir qui en est le produit, on voit que sa couleur est due uniquement à la multitude des spores qu'il tient en suspension. Ces spores sont d'abord hyalines, puis en mûrissant elles deviennent brunes, puis noires. C'est à la maturation progressive des spores qu'est due la succession des couleurs dans les feuillets. — Les spores tombent avec les gouttes d'encre sur le sol, et sont ainsi facilement entraînées par les pluies qui les disséminent.

Il serait intéressant de constater que le champignon ne se liquéfie pas s'il n'est infecté par le *Bacillus termo :* ce serait transformer en certitude la probabilité que ce microbe est bien l'agent de la liquéfaction. Mais jusqu'à présent, mes expériences ont échoué pour obtenir des Coprins indemnes de l'infection, et c'est là un point particulièrement remarquable : si jeunes que je choi-

sisse les individus mis en observation, je les trouve tous infectés, quoique d'une façon encore invisible.

J'ai lavé avec le plus grand soin toute la surface extérieure de très jeunes Coprins à la solution antiseptique d'oxycyanure de mercure, alors que la volve était encore parfaitement intacte, en ayant soin du reste de laisser le pied attaché au mycélium dans la terre. Je protégeais la base du pied par une bande isolatrice trempée dans cette solution. Ces Coprins étaient ensuite portés, avec la motte de terre sur laquelle ils avaient poussé, dans une cloche de verre pour les protéger contre la chute des poussières atmosphériques. En dépit de ces précautions, la liquéfaction se produisait après quelques jours.

Dans d'autres expériences, j'ai enlevé avec des instruments stérilisés de petits blocs de feuillets à des Coprins très jeunes et stérilisés eux-mêmes à l'extérieur par la solution d'oxycyanure. Mis en boîtes de Pétri stérilisées, ces feuillets entraient en liquéfaction, et le liquide révélait une quantité énorme de *Bacillus termo.*

On pourrait se demander en présence de ces premiers résultats si les Coprins n'offrent pas un exemple d'*infection microbienne normale*, nécessaire à leur reproduction, fait qui serait à rapprocher des infections normales décrites par Noël Bernard dans ses recherches sur la germination et la tubérisation des Orchidées.

On pourrait se demander si l'association du *Bacillus termo* avec le Coprin n'a pour but que la mise en liberté et la dissémination des spores, ou si cette sorte de *symbiose,* au sens large du terme, n'est pas requise pour la production même de spores. Cette dernière hypothèse m'a été suggérée par notre savant collègue M. De Wildeman, mais j'avoue que je suis peu porté à l'adopter. Quoi qu'il en soit, je me propose d'élucider les problèmes que soulèvent mes premières observations, en cultivant des Coprins en milieux stériles à partir de la spore, lorsque l'automne prochain m'aura permis de récolter des matériaux d'expérience.

Le R. P. Schmitz, S. J. expose à la section l'état actuel de nos connaissances du houiller de la Campine. Le nouveau gisement est situé au nord de l'île silurienne du Brabant à une profondeur moyenne de 700 mètres, mais à l'encontre du bassin sud il n'a pas subi de poussée et par conséquent de plissements.

Une étude de M. E. Beauvois, sur *la croix chez les Scandinaves d'Amérique au moyen âge* est envoyée à l'examen de M. le chanoine Delvigne, pour en faire rapport à la session de janvier.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale a eu lieu, comme les séances des trois premières sections, dans les salons du cercle *Concordia* sous la présidence d'honneur de Mgr Rutten, évêque de Liége et sous la présidence effective de M. le comte Fr. van der Straten-Ponthoz, second vice-président de la *Société scientifique de Bruxelles,* pendant l'année 1902-1903.

M. le Président souhaite la bienvenue à Mgr Rutten, puis il se fait l'organe de la Société en payant un juste tribut d'hommages à la mémoire de notre Reine bien-aimée. Il rappelle aussi la grande perte que la Société a faite par la mort de notre premier président, le Dr Lefebvre, survenue depuis notre dernière assemblée générale.

Enfin, il annonce que S. A. R. le prince Charles-Théodore, duc en Bavière, le père de notre future Reine, a bien voulu accepter de figurer parmi nos membres d'honneur. (*Applaudissements.*)

La parole est donnée à M. de Lapparent, membre de l'Institut, pour une conférence sur l'*Éruption de la Martinique.*

Cette conférence a paru *in extenso* dans la livraison du 20 janvier 1903 de la Revue des Questions scientifiques (troisième série, t. III, pp. 5-36). En voici les conclusions :

Sans la coïncidence désastreuse qui a dirigé contre une grande ville la poussée des gaz, arrêtés par un obstacle dans leur ascension verticale, l'éruption de la montagne Pelée aurait pu passer pour un épisode tout à fait normal dans l'histoire des volcans alimentés par des foyers de nature andésitique ou ponceuse. Comme partout, il y a eu des phénomènes précurseurs de nature solfatarienne, puis des dégagements de vapeurs, de cendres et de boues. Ensuite, sous la pression de la lave ascen-

dante, le volcan s'est fendu suivant une ligne de moindre résistance, et la lave, trop visqueuse pour profiter de cette fente, s'est contentée d'y envoyer une série d'émanations gazeuses, les unes tranquilles, les autres violentes. Puis, la pâte ponceuse montant toujours, a formé sur l'orifice ancien une intumescence d'importance croissante, qui tantôt lançait des vapeurs et des cendres vers le ciel, tantôt les obligeait à suivre une issue latérale.

Ce déploiement d'activité n'a été accompagné d'aucun mouvement d'ensemble du sol ; aucun gaz insolite n'a fait apparition, et les manifestations électriques n'ont en rien dépassé la mesure ordinaire. Enfin, si la catastrophe a été exceptionnellement meurtrière, c'est surtout parce que le manque absolu d'expérience a empêché les autorités locales de prendre à temps les précautions par lesquelles les existences humaines pouvaient être préservées.

Après l'exposé des faits, l'orateur montre qu'ils apportent une confirmation nouvelle à la théorie qui fait reposer le volcanisme sur la déperdition de l'énergie contenue dans le noyau igné du Globe.

Le Président remercie et félicite l'orateur.

Mgr Rutten adresse alors quelques paroles d'encouragement à la Société ; il recommande chaleureusement la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES à ceux qui veulent se tenir au courant des progrès des sciences de la nature et voir comment les découvertes modernes s'harmonisent avec les vérités révélées. Il insiste en particulier sur cette pensée : les savants catholiques, sachant qu'il ne peut jamais y avoir de désaccord réel entre la foi et la raison, sont vraiment libres dans leurs investigations scientifiques. Au contraire, les savants rationalistes, qui croient *à priori* que les Livres Saints contiennent des erreurs, ne le sont pas toujours, et ils sont exposés à admettre trop vite les conclusions qui semblent confirmer leurs préjugés. Plus d'une fois, au XIX^e siècle, ils ont dû abandonner des systèmes élaborés à la hâte pour mettre la religion en échec. Mgr Rutten félicite les membres de la *Société scientifique de Bruxelles* de s'être gardés jusqu'à présent de la précipitation et de l'esprit systématique et les exhorte à continuer à travailler à l'avenir, comme ils l'ont fait dans le passé, c'est-à-dire sans témérité et sans timidité.

Monsieur le Président remercie vivement Monseigneur Rutten de la bienveillance qu'il a montrée envers la Société en se faisant inscrire parmi ses membres, en présidant aujourd'hui son assemblée générale et surtout en louant publiquement son œuvre comme il vient de le faire.

Il remercie aussi la *Concordia* d'avoir accordé l'hospitalité à la Société aussi bien pour les travaux des sections que pour l'assemblée générale, puis tous ceux qui, en assistant à celle-ci, ont donné une marque de sympathie à notre œuvre et à notre conférencier.

La séance est levée à 4 1/2 heures.

SESSION DU 29 JANVIER 1903

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Goedseels expose une méthode nouvelle pour trouver les solutions finales les plus approchées correspondant à un système quelconque d'équations linéaires, et les approximations de ces solutions.

Il montre : 1° que cette méthode conduit aux résultats des moindres carrés ; 2° qu'elle peut fournir, en certains cas, les valeurs exactes des inconnues ; 3° qu'elle permet de fixer une limite qui est certainement dépassée par les erreurs des observations qui ont conduit aux équations sur lesquelles on opère.

M. Goedseels ajoute qu'il ne partage pas la manière de voir des savants qui considèrent les solutions des moindres carrés comme les valeurs les plus probables des inconnues, mais que cette manière de voir n'exclut pas la sienne. Rien n'empêche, en effet, qu'une même valeur ne soit à la fois la plus probable et la plus approchée.

Le travail de M. Goedseels sera publié comme *Note additionnelle* à l'ouvrage de l'auteur : *Théorie des erreurs d'observation* (Louvain, Peeters ; Paris, Gauthier-Villars, 1902).

M. Mansion fait une communication *Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités ;* mais il n'est pas encore arrivé à des résultats assez précis pour pouvoir présenter à ce sujet un travail définitif à la section.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin fait une communication *Sur la définition de l'aire des surfaces courbes* dont voici les idées essentielles.

Considérons le système de formules

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Supposons qu'elles définissent x, y, z en fonctions continues de u, v et qu'elles établissent une correspondance uniforme entre les points d'une aire A bien déterminée dans le plan (u, v) et ceux d'un ensemble de points S dans l'espace (x, y, z).

Nous disons que l'ensemble S est une portion de surface. L'aire A étant limitée par un contour C fermé, la ligne L qui correspond à C forme le bord de la surface S.

Il s'agit de donner une définition générale de l'aire de cette surface S.

On sait que, même dans le plan, toute ligne continue ne peut former la frontière d'une aire bien déterminée. Il faut pour cela que cette ligne soit *quarrable* ou ait *une aire nulle.* Il faut évidemment des conditions correspondantes dans l'espace.

Nous dirons qu'une ligne de l'espace est *quarrable* ou a *une aire nulle,* si on peut l'enfermer à l'intérieur d'une surface polyédrique fermée dont l'aire puisse être rendue inférieure à tout nombre positif donné.

Ceci posé, pour que la portion de surface S ait une aire déterminée, il faut que la ligne L qui la borde soit une ligne *quarrable.*

Supposons cette condition vérifiée.

Pour définir l'aire de la surface, remarquons qu'à tout nombre positif ϵ on peut faire correspondre une infinité de polyèdres tels que tout point du polyèdre soit à une distance $< \epsilon$ de la surface et, réciproquement tout point de la surface à une distance $< \epsilon$ du polyèdre. Ces polyèdres ont des aires bien déterminées et la limite inférieure de toutes ces aires est une quantité bien déterminée P_ϵ qui dépend de ϵ.

Faisons tendre ϵ vers zéro. La limite P_ϵ sera constante ou croissante et tendra, par conséquent, vers une limite P, qui sera par définition l'aire de la surface S, ou vers l'infini, auquel cas la surface ne sera pas quarrable.

Cette définition conduit sans difficulté aux formules de complanation des surfaces douées d'un plan tangent, ou des surfaces engendrées par la révolution d'une courbe rectifiable.

On en déduit que toute surface d'aire déterminée peut être partagée *par des transversales quarrables* en parties d'aires aussi petites que l'on veut et que l'aire totale de la surface est toujours la somme de celles de toutes ses parties.

Cette communication donne lieu à un échange de vue entre les divers membres de la section où l'on rappelle les définitions de l'aire d'une surface données antérieurement par M. Goedseels et par M. Peano.

M. Mansion expose la *démonstration* suivante *d'un théorème de Richelot :*

Soit à déterminer des valeurs réelles de x et de y vérifiant l'équation

$$(1) \quad a + bi = \frac{x\sqrt{1+y^2}\,\sqrt{1+k^2y^2} + iy\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-k^2x^2}}{1+k^2x^2y^2}$$

où k^2 est compris entre 0 et 1 et où i, suivant l'usage, représente $\sqrt{-1}$; a et b et les radicaux sont supposés positifs, pour plus de simplicité.

L'équation (1) a pour conséquences les deux suivantes :

$$(2) \qquad a^2(1+k^2x^2y^2)^2 = x^2(1+y^2)(1+k^2y^2),$$

$$(3) \qquad b^2(1+k^2x^2y^2)^2 = y^2(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

d'où l'on déduit par addition, après suppression du facteur $1 + k^2x^2y^2$,

$$(4) \qquad (a^2+b^2)(1+k^2x^2y^2) = x^2+y^2.$$

On tire de là

$$(5) \qquad y^2 = \frac{a^2+b^2-x^2}{1-k^2(a^2+b^2)x^2}.$$

Portons cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$(6) \qquad Fx \equiv b^2(1-k^2x^4)^2$$
$$-(a^2+b^2-x^2)[1-k^2(a^2+b^2)x^2](1-x^2)(1-k^2x^2)=0.$$

On trouve aisément

$$F0 = -a^2, \qquad F1 = b^2(1-k^2)^2.$$

Donc l'équation (6) est vérifiée pour une valeur x_0^2 de x^2 comprise entre 0 et 1. La valeur y_0^2 correspondante de y^2 sera réelle d'après la relation (5); elle sera positive d'après l'équation (3), car on aura

$$y_0^2 = \frac{b^2(1+k^2x_0^2y_0^2)^2}{(1-x_0^2)(1-k^2x_0^2)}.$$

L'équation (6), qui est du quatrième degré en x^2, donnera x_0^2 et l'on tirera y_0^2 de (5). On pourra ensuite évidemment poser

$$x_0 = sn\alpha, \qquad iy_0 = sn\beta i$$

x_0 et y_0 étant positifs, de manière que

$$sn(\alpha+\beta i) = a + bi,$$

c'est-à-dire le théorème de Richelot dans un cas d'où il est aisé de déduire tous les autres (Journal de Crelle, XLV, pp. 225-232. Comparez Cayley, *Elliptic Functions*, pp. 114-118, et Mansion, Bulletin de l'Ac. roy. de Belgique (3), VIII, pp. 180-182).

M. de la Vallée Poussin fait ensuite la communication suivante *Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass.*

Soit a et b deux nombres positifs, le premier $a < 1$, le second b entier et impair. La fonction de Weierstrass est définie par la série uniformément convergente (x étant une variable réelle)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x.$$

On sait que, si ab dépasse une certaine limite, cette fonction n'a de dérivée pour aucune valeur de x.

Je vais montrer que, *si* ab *est* > 1, *cette fonction a une infinité de maxima et de minima dans tout intervalle*, et pour cela, *que les valeurs de* x *comprises dans la formule*

$$(1) \qquad x = \frac{p}{b^q},$$

où p *et* b *sont des entiers positifs quelconques, donnent des maxima si* p *est pair et des minima si* p *est impair.*

Donnons-nous, en effet, une valeur x de la forme (1) et considérons la somme

$$\varphi(x) = \sum_{n=q}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x.$$

Pour la valeur considérée de x, on a

$$\varphi(x) = (-1)^p \sum_{q}^{\infty} a^n,$$

$$\varphi(x+h) = (-1)^p \sum_{q}^{\infty} a^n \cos b^n \pi h,$$

d'où l'on tire

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = (-1)^{p+1} \sum_{q}^{\infty} a^n (1 - \cos b^n \pi h).$$

Donc, $n-1$ étant $> q$, on aura

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{(-1)^{p+1}} > a^{n-1}(1 - \cos b^{n-1} \pi h).$$

Faisons tendre h vers zéro d'une manière quelconque. On peut toujours poser

$$(2) \qquad h = e\,\frac{\beta}{b^n},$$

où e désigne $+1$ ou -1 suivant le signe de h, β un nombre compris entre 1 et b, et n un entier qui augmente à l'infini.

Substituant la valeur (2), il vient

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{(-1)^{p+1}} > a^{n-1}\left(1 - \cos\frac{\beta}{b}\pi\right) = 2a^{n-1}\sin\frac{\beta}{b}\frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs, $\beta : b$ étant < 1, on a

$$\sin\frac{\beta}{b}\frac{\pi}{2} < \frac{\beta}{b},$$

et l'on peut poser, $(1+\epsilon)$ désignant un coefficient > 1,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = 2(-1)^{p+1}(1+\epsilon)\,a^{n-1}\left(\frac{\beta}{b}\right)^2$$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = 2\,e\,(-1)^{p+1}(ab)^{n-1}\frac{\beta}{b}.$$

Donc, si p est impair,

$$\lim_{h=0}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \begin{cases} +\infty, \text{ pour } h \text{ (ou } e\text{) positif,} \\ -\infty, \text{ pour } h \text{ (ou } e\text{) négatif.}\end{cases}$$

Si p est pair,

$$\lim_{h=0}\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \begin{cases} -\infty, \text{ pour } h \text{ positif,} \\ +\infty, \text{ pour } h \text{ négatif.}\end{cases}$$

Mais la fonction $F(x)$ ne diffère de $\varphi(x)$ que par un nombre limité de termes ayant des dérivées. On a donc aussi, si p est impair,

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \begin{cases} +\infty, \text{ pour } h \text{ positif,} \\ -\infty, \text{ pour } h \text{ négatif,}\end{cases}$$

et si p est pair,

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \begin{cases} -\infty, \text{ pour } h \text{ positif,} \\ +\infty, \text{ pour } h \text{ négatif.}\end{cases}$$

Donc, si l'on considère la courbe $y = F(x)$, le point x est le sommet d'une pointe tournée vers le bas si p est impair (minimum),

et le sommet d'une pointe tournée vers le haut si p est pair (maximum).

J'ai énoncé ce théorème dans le *Cours d'analyse infinitésimale* dont je viens de publier le premier volume, mais la démonstration est réduite, dans cet ouvrage, à une simple remarque et peut paraître insuffisante. C'est ce qui m'a engagé à en donner ici une autre plus satisfaisante et plus générale.

Le R. P. Bosmans analyse la belle édition du *Procès de Galilée* publiée à un très petit nombre d'exemplaires par Favaro, comme extrait du dernier volume des *Œuvres de Galilée.* On y trouve un certain nombre de pièces complètement inédites, mais aucune qui puisse modifier sensiblement l'histoire du célèbre procès.

La communication du R. P. Bosmans sera publiée dans la *Revue des Questions scientifiques* d'avril 1903.

M. Mansion fait les remarques suivantes à propos de Galilée. 1° Contrairement à une erreur très répandue, les principes de Galilée relatifs à l'interprétation de la Bible, là où elle touche à des questions scientifiques, n'ont pas été condamnés. 2° Les découvertes de Galilée en physique et en astronomie physique, qui renversaient complètement la conception dualistique du monde due à Aristote, n'ont pas non plus été condamnées et ont été admises peu à peu par tous les savants. 3° Les congrégations romaines n'ont condamné chez Galilée que sa thèse non démontrée et non démontrable : *Le soleil est le centre du monde autour duquel la terre tourne, en même temps qu'elle tourne sur elle-même.* L'insuffisance des preuves de Galilée et la croyance non justifiée des juges de Galilée à la thèse aristotélicienne (tout aussi peu démontrée et aussi peu démontrable que celle de Galilée) : *La terre est le centre du monde autour duquel tourne le soleil,* ont été, bien plus que les passions humaines, la cause de la condamnation.

M. Neuberg expose le résultat de ses recherches *Sur deux complexes du troisième ordre.* Afin de ne pas encombrer les Annales de travaux mathématiques, l'auteur fera paraître son travail complet sur ce sujet dans le Recueil de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei.

Deuxième section

M. Van der Mensbrugghe communique la note suivante *Sur l'état sphéroïdal des liquides.*

On sait que Leidenfrost a observé et décrit le premier l'apparence que prend une petite masse d'eau tombant sur une plaque métallique fortement échauffée. On sait également que Boutigny a signalé un nombre considérable de phénomènes analogues qu'il attribuait à un état particulier de la matière, savoir à l'état sphéroïdal. Il est incontestable que certaines expériences de Boutigny semblent dépendre entièrement des propriétés du liquide porté par un métal très chaud. A la vérité, plusieurs physiciens se sont élevés avec raison contre les conclusions de Boutigny, tendant à considérer l'état sphéroïdal d'un liquide comme suffisamment caractéristique pour en faire une division spéciale de la physique. L'un des arguments qu'ils invoquaient consiste à dire qu'on n'a nul besoin d'un métal porté à une haute température, et que l'état sphéroïdal se produit encore notamment lorsqu'on fait vibrer une cloche contenant de l'eau ou de l'alcool; à cause des variations de la force élastique du liquide près de la paroi vibrante, une multitude de petites masses sont projetées hors du liquide et retombent en dessinant de jolies perles qui se réunissent près des lignes nodales voisines.

Dans la note actuelle, nous nous proposons de montrer que l'état sphéroïdal n'est pas un état spécial, distinct de l'état solide, liquide ou gazeux, mais qu'il représente de la manière la plus nette et la plus instructive l'état liquide en général.

Dans mes dernières publications, je me suis efforcé de prouver, en partant de l'hypothèse généralement admise de l'attraction moléculaire, qu'autour de chaque molécule prise à l'intérieur de la masse, règne une force élastique plus grande qu'autour d'une particule prise dans la couche superficielle, dont l'épaisseur est égale au rayon d'activité de l'attraction moléculaire.

Une déduction immédiate de cette proposition, c'est qu'une masse liquide ne peut être considérée comme ayant partout la même constitution; il faut de toute nécessité que la force élastique prépondérante à l'intérieur de la masse se propage dans toutes les

directions, et agisse par conséquent sur les diverses tranches de la couche superficielle où la force élastique va en diminuant de plus en plus vers le milieu ambiant.

La réaction élastique qui s'exerce constamment sur la couche libre, détermine dans celle-ci deux effets bien différents. Le premier a déjà été invoqué par Leidenfrost lui-même, puis d'une manière plus formelle par Young en Angleterre (1805), plus tard par Mossotti (1844), Hagen, Henry, Jos. Plateau, A. Dupré, Marangoni, Quincke, Lüdtge et moi-même. L'effet auquel je fais allusion, c'est celui d'une force contractile tangentielle qui sert de réaction à l'écartement des molécules dans le plan tangent à la surface au point considéré. Cette force appelée aussi *tension superficielle*, a d'abord été regardée comme une simple hypothèse par Laplace et ses nombreux adeptes; actuellement, aucun physicien n'oserait plus la mettre en doute comme force réelle et constamment en action à la surface libre d'un liquide. C'est cette force qui, combinée avec la pesanteur, détermine la forme plane d'une masse d'eau contenue dans un réservoir. C'est elle aussi qui agit comme force figuratrice dans une petite masse liquide, telle que les particules d'eau qui tombent pendant la pluie et qui affectent la forme de sphérules quand leurs dimensions sont minimes, et de gouttes plus ou moins allongées quand les dimensions deviennent assez notables. C'est encore cette force qui assigne la forme sphérique parfaite à la masse d'huile en équilibre dans un mélange d'eau et d'alcool de même densité, dans la célèbre expérience de J. Plateau. C'est elle enfin qui arrondit si élégamment les grosses bulles de savon. Nous n'en finirions pas si nous voulions passer en revue les nombreux travaux qui ont été inspirés par le désir de connaître de plus près cette force demeurée si longtemps mystérieuse; nous rappellerons seulement que la considération du travail effectué par la tension superficielle d'un liquide, c'est-à-dire l'énergie potentielle des couches superficielles a permis d'expliquer des phénomènes fort nombreux, tels que l'explosion des bulles de savon, le déferlement des vagues de la mer, la production du maximum de vitesse des grands fleuves non pas dans le voisinage de la surface, mais à une profondeur très notable, etc.

Le second effet immédiat de la prépondérance de la force élastique intérieure du liquide sur celle qui règne dans la couche

superficielle, c'est l'*évaporation*, c'est-à-dire le passage spontané (en apparence) de l'état liquide à l'état gazeux. Ce passage est nécessairement accompagné du renouvellement continu de la couche superficielle, à mesure que les tranches dont celle-ci est composée disparaissent dans l'air ambiant. C'est ce renouvellement nécessaire qui nous a fait connaître la véritable cause de l'évaporation, savoir l'écartement moléculaire s'effectuant aussi bien dans le sens normal à la surface que dans le sens tangentiel.

Or il suit évidemment de là que si la couche superficielle se renouvelle rapidement, les forces élémentaires de la tension se développent pour ainsi dire d'une manière continue, et, dès lors, doivent agir énergiquement pour faire prendre à la masse considérée la plus petite surface possible.

Telles sont les considérations générales qui nous révèlent les deux propriétés fondamentales des liquides, savoir l'existence d'une force contractile de la couche libre, et la nécessité de l'évaporation plus ou moins rapide de cette couche aussitôt remplacée par une autre constituée comme la précédente.

Cela posé, il n'y a pas de faits qui mettent mieux en évidence les deux propriétés en question, et qui, dès lors, caractérisent plus nettement l'état liquide en général, si ce n'est l'expérience de Leidenfrost, ainsi que toutes celles qu'on a rapportées à l'état sphéroïdal.

En effet, dès qu'une petite masse d'eau, par exemple, a touché une plaque métallique fortement chauffée, les particules de la couche superficielle sont vivement écartées entre elles et réduites en vapeur; en outre, elles provoquent aussitôt la naissance d'une nouvelle couche superficielle où les particules sont disposées comme dans la précédente ; de là découlent des forces contractiles toujours renaissantes qui assignent une forme sphérique à la masse supposée assez petite; la forme est ellipsoïdale, si le poids du liquide est un peu plus grand ; dans les deux cas, la couche libre est fortement dilatée et constitue une sorte de coussin très élastique sans cesse renouvelé et mettant obstacle au contact entre le liquide et le métal.

Présentons ici quelques remarques fort importantes.

Et d'abord le renouvellement des forces contractiles et par conséquent le dégagement de la vapeur ne s'opèrent jamais avec

une régularité parfaite autour de la petite masse; voilà pourquoi celle-ci manifeste toujours des mouvements très vifs de rotation et de translation.

Dans le cas d'une masse ellipsoïdale, la pression capillaire due à la tension superficielle est plus marquée vers les extrémités du grand axe qu'à celles du plus petit, où la courbure est moindre; aussi la figure change rapidement de forme, de telle sorte que le grand axe diminue jusqu'à devenir le plus petit, et réciproquement; de là un mouvement vibratoire que l'œil se plaît à suivre.

Si la masse projetée est assez grande pour qu'elle s'aplatisse notablement, il peut arriver qu'elle présente sur ses bords trois parties à faible courbure comprises entre trois portions à courbure plus forte; dans ce cas, ces portions deviennent alternativement les plus saillantes ou les plus rentrantes; ce mouvement alternatif est très agréable à contempler.

Nous nous croyons donc en droit d'avancer que l'état sphéroïdal de l'eau ou d'un liquide quelconque caractérise de la façon la plus simple et surtout la plus frappante les liquides en général; en effet, la forme affectée par la masse démontre bien l'existence d'une force contractile de la surface libre, tandis que la couche de vapeur incessamment produite est due à la fois à la chaleur et à la force élastique qui prédomine à l'intérieur de la masse. Ce qui prouve que la chaleur n'est pas indispensable, c'est que l'eau peut être à l'état sphéroïdal sur l'eau, l'alcool sur l'alcool, etc., et cela à la température ordinaire. Dans ces cas, la couche élastique qui empêche le contact avec le liquide même est encore constituée par de la vapeur invisible et par des tranches étirées dans tous les sens.

Ce qui donne une confirmation bien précieuse des raisonnements qui précèdent, c'est le froid produit toujours par l'évaporation. En effet, à quelle condition une couche superficielle qui disparaît dans l'air, peut-elle être remplacée par une autre où toutes les molécules éprouvent un écartement de plus en plus grand vers l'extérieur? Évidemment à la condition que les couches dont la force élastique est capable d'effectuer l'écartement graduel des molécules de la couche devenue libre et d'exécuter ainsi un véritable travail, éprouvent par compensation une perte de chaleur; il suit de là que plus la succession des couches superficielles est rapide, plus aussi la perte de chaleur sera sensible; c'est ce qui nous fait comprendre

comment une gouttelette d'eau posée sur une plaque métallique chauffée à 200° ou 300° C. conserve une température inférieure à 100°, à la pression normale de l'atmosphère, ainsi que l'ont démontré des observations précises.

Toutefois il reste un dernier point à expliquer : c'est le point de savoir pourquoi, dans l'expérience de Leidenfrost, une goutte d'eau n'entre pas en ébullition dans toute sa masse, malgré la haute température de la plaque qui la soutient. Pour bien se rendre compte de ce fait assez étrange, il faut se rappeler qu'une masse liquide qui ne contient pas d'air ou un gaz quelconque ne peut s'évaporer qu'à la surface libre, ainsi que l'ont prouvé les expériences classiques de F. Donny. Or, dans le cas d'une goutte d'eau posée sur une plaque très chaude, l'air dissous s'échappe très rapidement avant que la température du liquide ait atteint 80° C. par exemple; dès lors la vaporisation ne devient possible qu'à la surface même, c'est ce qui explique le maintien relativement assez long de la masse à l'état sphéroïdal.

La conclusion à tirer de l'ensemble de ce travail, c'est que l'état sphéroïdal, bien loin de constituer un état spécial de la matière, accuse d'une manière frappante les diverses propriétés des liquides en général.

M. Louis Henry communique une note de M. l'abbé Hamonet, professeur de chimie à l'Institut catholique de Paris, concernant le *glycol hexaméthylénique normal* $(H_2C)_6(OH)_2$.

« En 1894 MM. E. Haworth et W. H. Perkin ont publié sur le glycol hexaméthylénique un travail, dont les conclusions lui ont paru suspectes. C'est ce qui a poussé M. Hamonet à reprendre la préparation et l'étude de ce glycol.

Il a d'abord modifié la préparation du diphénoxyhexane en faisant réagir le sodium sur le phénoxypropane iodé à basse température.

Les phénoxypropanes halogénés et le sodium donnent naissance à une réaction complexe, qui peut s'exprimer par les deux équations suivantes.

(1) $2\,C^6H^5OCH^2CH^2CH^2X + 2\,Na = 2\,NaX + [C^6H^5O(CH^2)^3]_2$

(2) $2\,C^6H^5OCH^2CH^2CH^2X + 4\,Na = 2\,NaX + 2\,C^6H^5ONa + C^3H^6$

Avec le chlorure ou le bromure, la réaction a lieu presque totalement suivant l'équation (2): il se dégage beaucoup de triméthylène. Avec l'iodure, c'est la formation de diphénoxyhexane, qui domine (équation 1), il se dégage peu de triméthylène.

Le diphénoxyhexane traité par HI en tube scellé fournit l'hexane diiodé : liquide incolore bouillant à 163° sous la pression de 17^{mm} et cristallisant dans l'eau glacée en aiguilles, qui fondent à + 9°5. D/18° = 2,05.

La diacétine obtenue par l'action de l'acétate d'argent sur $(ICH^2CH^2CH^2)^2$ est un liquide bouillant à 262° sous la pression de 765^{mm}. Dans un mélange de glace et de sel, elle cristallise en aiguilles fondant à + 5°. D/18° = 1,017.

La saponification de $(CH^3CO^2CH^2CH^2CH^2)_2$ a donné le glycol adipique ou hexaméthylénique $HOCH^2 - (CH^2)^4 - CH^2OH$. C'est un corps solide; il fond à 41° et bout à 254° sous la pression de 767^{mm}.

Son dibenzoate fond à 56°, son dicarbanilate $(C^6H^5AzHCO^2CH^2CH^2CH^2)_2$ à 171°-172°.

Pour démontrer que ce glycol est bien le primaire, M. l'abbé Hamonet a transformé l'hexane diiodé en octanedinitrile ou nitrile subérique $CAz - (CH^2)^6 - CAz$. Ce nouveau nitrile est liquide; il bout à 185° sous la pression de 15^{mm}. D/18° = 0,954. Dans un mélange de glace et de sel, il se prend en cristaux, qui fondent à — 3°5.

Par l'action de l'acide chlorhydrique concentré en tube scellé ce nitrile a été transformé en acide subérique $CO^2H - (CH^2)^6 - CO^2H$ fondant à + 140°. „

Cette étude, jointe à celle que M. l'abbé J. Hamonet a communiquée à la Société scientifique de Bruxelles dans sa séance du 9 avril 1901, sur le glycol tétraméthylénique, jette un nouveau jour sur la série des glycols biprimaires, dont on ne connaissait auparavant que les deux premiers termes, le glycol éthylénique de Wurtz et le glycol triméthylénique de Reboul.

En présentant à la section un échantillon du *glycol adipique* dont il vient d'être question et qu'il tient de la libéralité de M. l'abbé Hamonet, M. Louis Henry fait ressortir, par diverses considérations, l'intérêt qui s'attache à ce composé, à divers points de vue,

tant physiques que chimiques. La comparaison des dérivés normaux $\geqslant C-(CH_2)_n-C\leqslant$ de diverse nature, aux différents étages de la série de carburation, constitue, selon lui, un point important pour la résolution de la question générale de l'influence du poids moléculaire sur les propriétés des corps composés et par extension des corps simples eux-mêmes.

Entrant dans quelques détails à ce sujet, il attire spécialement l'attention sur la différence que l'on constate quant à la variation de la *fusibilité* entre la série des *glycols normaux* $(HO)CH_2-(CH_2)_n-CH_2(OH)$ et celle des *acides correspondants* $(HO)CO-(CH_2)_n-CO(OH)$.

Glycols	*Étage*	Acides
fus. — 12°	C_2	
fus. — 53° (*)	C_3	fus. 130°
fus. + 16°	C_4	fus. 185°
	C_5	fus. 98°
fus. + 41°	C_6	fus. 149°

A l'occasion du composé nouveau de M. l'abbé Hamonet, M. Louis Henry rappelle les études qu'il avait entreprises autrefois dans le but d'obtenir les glycols normaux en C_4 et en C_6. Le glycol succinique $(HO)CH_2-(CH_2)_2-CH_2(OH)$, avait été obtenu par l'action de l'acide nitreux sur l'alcool *amidobutylique* normal $(HO)CH_2-(CH_2)_2-CH_2(NH_2)$.

M. l'abbé Hamonet ayant obtenu ce composé, dans un état de pureté plus complet, par une autre voie, il lui en a abandonné l'étude.

En 1897, au cours de ses recherches sur les dérivés *triméthyléniques,* M. Louis Henry s'est occupé incidemment de préparer le glycol *hexaméthylénique* et ses dérivés.

Il expose qu'il a notamment fait agir l'argent moléculaire sur la *mono-iodhydrine triméthylénique* $(HO)CH_2-CH_2-CH_2I$.

Il en avait obtenu un liquide épais et visqueux bouillant à 142° sous la pression de 32 millimètres, dont la densité de vapeur,

(*) Détermination personnelle.

déterminée selon la méthode de Hofman, à la température de 185°, dans la vapeur d'aniline, a été trouvée égale à 4,28, la densité correspondant à $(CH_2)_6(OH)_2$ étant 4,07. C'est, on le voit, du glycol hexaméthylénique encore impur et renfermant quelque peu du produit primitif.

A la même époque, il a soumis aussi à l'action de l'argent moléculaire le *chloro-iodure* de triméthylène $ICH_2 - CH_2 - CH_2Cl$. Il en a obtenu un liquide dont la densité de vapeur a été trouvée égale à 5,16, celle du bichlorure d'hexaméthylène $(CH_2)_6Cl_2$ correspondant à 5,35.

Quelqu'incomplets qu'ils soient, ces essais prouvent que, dans ces circonstances, on s'était élevé de l'étage C_3 à l'étage C_6. Ayant été engagé dans des recherches d'un autre genre, M. Louis Henry ne s'est plus occupé depuis plusieurs années de cet ordre de composés, espérant trouver parmi ses élèves quelqu'un pour les reprendre. Cet espoir ne s'est pas réalisé jusqu'ici.

La série si importante des *glycols normaux* $(HO)CH_2 - (CH_2)_n - CH_2(OH)$, s'étend aujourd'hui depuis l'étage C_2 jusqu'à l'étage C_6, M. Louis Henry a la confiance que M. l'abbé Hamonet, continuant ses belles et si importantes recherches, parviendra à obtenir le terme C_5, qui manque encore en ce moment. Quoi qu'il en soit, il y a lieu de féliciter M. l'abbé Hamonet des acquisitions précieuses dont il a doté la chimie du carbone.

L'heure étant très avancée, M. Louis Henry demande à reporter à l'ordre du jour de la séance prochaine la communication *Sur l'isomérie dans les composés propyléniques* pour laquelle il était inscrit.

Le P. Schaffers, S. J., résume les points principaux de la théorie des *Électrons*. Ce travail a été publié *in extenso* dans la livraison du 20 janvier 1903 de la Revue des Questions scientifiques.

M. Gérard donne quelques renseignements *Sur les essais récents de traction électrique à grande vitesse,* les différents moyens d'amener et de capter le courant, le genre de moteur et la puissance requise. Il cite notamment quelques-uns des résultats observés pendant les expériences effectuées sous les auspices du Gouvernement allemand, sur la voie militaire de Berlin à Zossen.

D'après le compte rendu officiel, la voiture automotrice de la firme *Allgemeine Elektricitäts Gesellschaft* aurait atteint la vitesse de 135 kilomètres à l'heure, et celle de la maison Siemens et Halske 162 kilomètres.

Parmi les chiffres relatifs à la résistance à vaincre par les moteurs électriques, celle de l'air a été particulièrement étudiée. Afin de diminuer cette résistance à l'avant et à l'arrière, ces voitures présentent en plan une forme ogivale. Des tubes émergeant des parois faciales et latérales, transmettaient la pression à des manomètres à eau convenablement disposés dans la voiture. On a déduit des observations, que, conformément aux notions acquises antérieurement, la résistance de l'air croît suivant le carré de la vitesse. La paroi frontale du véhicule pousserait devant elle un certain volume d'air comprimé s'étendant jusqu'à 3 mètres en avant environ. Sur les parois obliques et latérales, les pressions seraient autant sous la dépendance du vent que sous celle de la progression de l'automotrice. Enfin, la dépression à l'arrière fut trouvée insignifiante, contrairement à ce que l'on avait supposé.

La voie ne résista pas aux efforts subis de la part de la voiture automotrice, lorsque la vitesse dépassa 145 kilomètres à l'heure, et à partir de 150 kilomètres jusqu'à 162 kilomètres, ses déformations furent telles qu'on trouva prudent de suspendre les essais pour la réparer, et les reprendre ensuite à des allures plus modérées.

Cette voie militaire était constituée, comme celles dont jusqu'en ces dernières années étaient munies les grandes lignes prussiennes, avec des rails de 33 kilogrammes au mètre courant, mais on avait augmenté le nombre de traverses.

Lorsque les essais seront repris, elle sera considérablement renforcée tant comme rails que comme traverses et ballast. On essaiera alors en même temps que les deux automotrices légèrement modifiées, une locomotive électrique spéciale et concurremment une locomotive à vapeur d'un type nouveau étudiée pour des vitesses comprises entre 150 et 200 kilomètres à l'heure.

Les expériences porteront à la fois sur les éléments de la construction et les facteurs économiques de l'extra-vitesse.

Troisième section

Sur le rapport favorable de M. le chanoine Delvigne, la section vote l'impression aux Annales du travail de M. E. Beauvois : *Les croix précolombiennes du Groenland.*

On trouvera ce mémoire à la deuxième partie des Annales.

M. É. De Wildeman présente une *Étude monographique des espèces du genre Haemanthus L.* (*sous-genre Nerissa*) (*Salisb.*); cette étude paraîtra aux Annales de la Société.

Des considérations *Sur la Salamandre*, exposées par M. le Dr H. Lebrun, donnent lieu à une discussion à laquelle prennent part l'auteur de la communication, le R. P. Schmitz et M. É. De Wildeman.

M. P. Nyssens fait passer sous les yeux des membres des *schémas d'analyse de diverses roches* et montre combien cette analyse est précieuse pour la construction de la carte agronomique.

Les mémoires de M. le chanoine Bourgeat : *Influence des plis hercyniens sur le Jura;* de M. l'abbé Kieffer : *Description de deux genres nouveaux et de quatre espèces de la famille de Sciaridae;* et de M. le comte F. de Montessus de Ballore : *Relations géologiques des régions stables et instables du nord de l'Europe,* sont soumis à l'examen respectif de M. le chanoine de Dorlodot et de M. le comte Ad. de Limburg-Stirum; du R. P. Deschamps et de M. F. Meunier; de M. de Lapparent et du R. P. Schmitz.

Quatrième section

M. le Dr Faidherbe prononce l'allocution suivante :

Avant d'ouvrir la séance, j'ai un pénible devoir à remplir : notre section a perdu pendant l'année dernière deux de ses membres, M. le professeur Lefebvre et M. le docteur Dumont.

Peut-être eût-il été préférable que le soin de retracer leur carrière et de rappeler leurs hautes qualités échût à l'un de vous,

Messieurs, qui les avez approchés de plus près et avez vécu avec eux dans une plus longue intimité. Et pourtant je suis heureux qu'en me faisant l'honneur de me nommer président de la 4e section, vous m'ayez fourni l'occasion de dire publiquement les sentiments de vénération que j'éprouvais pour l'un, d'affectueuse estime que l'autre m'avait inspirés. Je suis certain d'ailleurs d'exprimer aussi, en parlant de la sorte, les pensées de ceux de nos confrères de France qui font partie de la Société scientifique.

Lorsque je commençais à Lille mes études de médecine, le nom du professeur Lefebvre, joint à ceux du baron Michaux et de M. Hubert, représentait pour mes condisciples et pour moi la Faculté de Médecine de l'Université de Louvain : nous connaissions ces hommes qui, par leur science, leur travail, la haute élévation de leur esprit, avaient contribué à faire grande et célèbre cette belle institution dont nous enviions le développement extraordinaire et la fière indépendance.

Les travaux du professeur Lefebvre avaient porté sa renommée au loin; sa foi profonde nous était connue; depuis j'eus l'occasion d'apprécier aussi sa grande bonté et le charme de ses relations.

La Société scientifique doit un tribut d'hommages tout spécial à M. le professeur Lefebvre, qui a été l'un des promoteurs et des agents les plus actifs de son organisation, qui a toujours veillé sur son fonctionnement comme membre du Conseil et qui deux fois a dirigé ses travaux comme président. En le nommant président d'honneur, il y a deux ans, elle n'a fait que manifester sa reconnaissance pour ce dévouement persistant. La section de médecine en particulier s'honore d'avoir compté parmi ses membres ce savant laborieux et modeste, cet homme de bien.

J'indiquerai brièvement ses études, en rappelant qu'il a étendu son activité à presque tous les points de la science médicale : la médecine opératoire, la pathologie générale, la thérapeutique, la médecine mentale firent tour à tour le sujet de son enseignement et ses travaux personnels ont englobé, entre autres questions, l'hygiène physique et morale, l'épidémiographie, les lois de l'hérédité, la psychopathologie, etc...

Je ne prolongerai point cet exposé, car il me tarde d'arriver à deux points de son beau caractère sur lesquels je veux insister plus

spécialement, sa sincère foi catholique qu'il ne craignit jamais de professer, et sa charité que sa modestie ne pouvait empêcher de se manifester.

M. le professeur Lefebvre a montré par son exemple que la foi, bien loin d'être un obstacle au savant, bien loin de l'entraver dans ses études, lui était au contraire un stimulant à scruter consciencieusement les arcanes de la nature et surtout de la nature humaine, mais tandis que les égarés, dépourvus du flambeau de la foi, risquent de se perdre dans des considérations hasardeuses et d'émettre des explications risquées et sans fondement, le savant catholique, après avoir été jusqu'aux extrêmes limites du domaine de la raison, sait s'arrêter et avouer qu'il y au delà quelque chose d'inexplicable.

Ce n'est point dans les mains d'un Lefebvre que la science peut faire faillite, car elle sait maintenir son action dans le champ qui lui est seul accessible.

Nous pouvons du reste apprendre à son exemple à ne point nous laisser diminuer, à ne point nous laisser interdire le libre exercice de nos droits. Transportant dans le domaine de la science les revendications que le professeur Lefebvre élevait fièrement dans le domaine civique, nous pouvons, médecins catholiques, rappeler aussi que « Fils légitimes de la maison, nous entendons jouir de tous les bénéfices attachés à ce titre. Respectueux des droits d'autrui, nous demandons que les nôtres soient respectés, et quand on y touche, nous répétons avec un des plus grands saints de l'Église et un des plus fiers citoyens du monde romain, saint Paul, prisonnier à Thessalonique : Non, non, il n'en sera pas ainsi, nous aussi nous sommes des citoyens! »

Quant à la charité immense de M. le professeur Lefebvre, elle découlait de sa foi même. Disciple de Celui qui a recommandé aux hommes de s'aimer les uns les autres, il était comme Lui doux et humble de cœur et comme Lui il avait pitié des masses souffrantes : *Misereor super hanc turbam.*

Fondateur à Louvain et par contre-coup dans la Belgique entière des conférences de Saint Vincent de Paul, il restera pour nous le modèle du médecin, secourable à toutes les infortunes que nous coudoyons chaque jour, misères du corps, misères du cœur, misères de l'âme. A son exemple, aux heures de désillusion, nous

trouverons dans l'exercice même de notre profession, chrétiennement accompli, le soulagement des déboires et des rancœurs que l'existence nous réserve. Nous nous rappellerons ses paroles : « Si au contraire, vous vous inspirez de l'amour de Dieu et de l'amour du prochain, la médecine, c'est-à-dire le ministère des souffrances humaines, est, après le sacerdoce, le plus consolant, le plus sublime des ministères. »

Aucun honneur n'a manqué au professeur Lefebvre, mais, grâce à sa foi, grâce à ses vertus, c'est en Dieu, en lui-même et dans ses enfants qu'il a trouvé ses meilleures et ses plus belles récompenses.

Dans une sphère plus modeste, notre regretté collègue, le Dr Dumont, nous a donné aussi l'exemple du travail assidu et de la foi inaltérable. Secrétaire de notre section pendant vingt ans, il s'acquittait de sa charge avec un zèle soutenu et une affabilité charmante dont nous avons tous gardé le souvenir : c'est avec une véritable peine que nous l'avons vu forcé par la maladie de résilier ses fonctions, il y a cinq ans. Il n'en resta pas moins un assidu de nos séances et, il y a quelques mois à peine, il prenait part encore à nos discussions.

Praticien expérimenté et travailleur consciencieux, il a consigné beaucoup d'observations journalières dans de nombreux mémoires que vous avez tous présents à l'esprit et que notre distingué vice-président, M. le Dr Warlomont, rappelait dans une notice récente.

L'exemple du Dr Dumont est la meilleure réponse que l'on puisse faire aux médecins nonchalants et insoucieux de leur art qui, une fois lancés dans la pratique, se croient désormais affranchis de toute préoccupation scientifique et s'excusent sur les tracas et les labeurs de la profession pour ne rien produire et s'abstenir de tout travail intellectuel. Nul n'a le droit de laisser perdre les cas intéressants qu'il a l'occasion de constater : la science médicale est affaire d'observation, plus encore que d'expérimentation, et chaque praticien doit tenir à honneur d'apporter sa contribution, si faible soit-elle, à son développement incessant.

Le Dr Dumont l'avait compris et ses travaux, basés uniquement sur son observation patiente et sa pratique journalière, étaient

toujours intéressants et renfermaient parfois d'utiles enseignements. Aussi nos regrets sont-ils bien vifs de l'avoir vu enlever si tôt à l'affection des siens, à notre sincère amitié. La souffrance l'a touché de son doigt cruel à l'âge de la pleine maturité, mais la résignation chrétienne avec laquelle il a supporté cette épreuve et senti arriver la mort, restera pour nous une preuve de plus de sa foi robuste et de son beau caractère (*).

M. le Dr Rutten, de Liége, présente une communication au sujet d'*un cas de tumeur oculaire* observé dans la clientèle. L'intérêt de cette observation, publiée *in extenso* dans la seconde partie des Annales, réside dans le diagnostic plus ou moins difficile à émettre entre un gliome et un sarcome.

Les vrais gliomes sont rares : on relate souvent des cas de pseudo-gliomes donnant lieu à l'œil de chat amaurotique, par exemple : les décollements de la rétine, le leucome sarcomateux de la choroïde, les infections pyémiques graves, les restes hémorragiques, les kystes de la rétine.

Le malade observé, âgé de dix ans, présentait des symptômes de tumeur intra-oculaire avec hypertension, et un mauvais état général. M. Rutten a énucléé l'œil sans retard, les suites furent normales. Cependant la mort survint deux mois après, sans récidive locale au milieu de symptômes de méningite, probablement par propagation antérieure du néoplasme dans le cerveau.

Le Dr Rutten discute les préparations histologiques provenant de l'œil malade, et se prononce en faveur d'un gliome.

Le Dr De Lantsheere rapporte également un cas clinique qu'il a observé dans sa clientèle, dans lequel les deux yeux étaient atteints à la fois. Il se prononce en faveur d'une intervention rapide et radicale, malgré toute l'horreur d'une semblable conduite pour les parents. Sans opération, la tumeur envahit les tissus voisins et cause des douleurs atroces. en produisant un aspect effroyable. Il insiste aussi sur les moyens de diagnostic.

(*) On trouvera dans la Revue des Quest. scientif. une notice plus détaillée sur le Dr Lefebvre (troisième série, t. II, p. 361) et une sur le Dr Dumont (Ibid., t. III, p. 232).

M. le Dr Cuylits produit ensuite une observation rare et intéressante *Sur un cas de tumeur cérébrale.*

Il s'agit d'une tumeur occupant la région fronto-temporale gauche, à cheval sur la suture coronale et envahissant une partie de la portion squameuse du temporal ; son plus grand diamètre est de 5,5 centimètres, épaisse de 3 centimètres.

Cet ostéome ne faisait pas saillie à l'intérieur du crâne, mais à son niveau la table interne est rugueuse, parcourue par des sillons nombreux renfermant autant de vaisseaux.

Sur ce plan rugueux où la dure-mère fait défaut, existait un pédicule large d'un centimètre environ s'élargissant pour se confondre en une tumeur charnue grosse comme un œuf de poule.

Cette tumeur vasculaire logée dans le cerveau antérieur le refoulait et le comprimait ; elle était indépendante des circonvolutions frontales.

Les dépressions de la table interne indiquent que la tumeur est ancienne et que la tumeur interne (sarcomateuse) précède de loin l'ostéome qui ne date que de deux ans à peine.

A son entrée à l'asile d'Evere la malade ne présentait qu'un peu d'obnubilation intellectuelle. Pendant des années elle avait souffert de migraines et particulièrement d'un point douloureux siégeant au centre de la tumeur.

Ces périodes intermittentes alternaient avec des états d'aphasie, de paralysie à droite, d'inconscience, d'irritabilité et privation de sommeil.

L'iodure était sans effets, mais les compresses froides sur la tête et les révulsifs dominaient ces troubles.

Au moment où il était question de recourir au trépan, la malade tomba brusquement dans le coma avec cyanose et hypothermie pour y succomber.

L'examen histologique devra nous renseigner sur la nature de la tumeur. La syphilis peut être exclue.

1° Ce cas est rare, surtout par l'existence d'un ostéome à l'extérieur et du sarcome à l'intérieur du crâne : ces deux tumeurs surgissant d'un point commun de la dure-mère, la tumeur intracranienne restant complètement indépendante du cerveau.

2° Le développement ancien de la tumeur interne.

3° Malgré les pressions excessives subies par diverses parties

du cerveau, il n'y a jamais eu ni de convulsions, ni de troubles moteurs autres que ceux se rattachant à une fluxion passagère et toujours une intellectualité parfaite.

4° Les douleurs persistantes localisées, que la percussion révèle en même temps, doivent faire penser à une lésion de la dure-mère dont le trépan seul a raison.

La communication du Dr Cuylits est publiée *in extenso* dans la livraison d'avril 1903 de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, IIIe série, t. III.

Les membres de la section se rendent ensuite à la clinique des maladies nerveuses du Dr Glorieux où ils ont pu admirer des installations électrothérapiques aussi pratiques que complètes. Tous les appareils fonctionnent à l'aide du courant de la ville de Bruxelles; ils fournissent de l'électricité médicale à courant continu, de l'électricité faradique ou induite, de l'électricité à haute fréquence et actionnent à l'aide d'un moteur la machine à électricité statique.

Après cette visite des différentes installations utilisées tant pour l'examen médical que pour le traitement électrique, le Dr Glorieux a présenté une série de malades, atteints tous d'altérations du système musculaire.

Observation I. — Jeune homme de 24 ans, polisseur, bien portant, se plaint depuis trois ans d'une douleur intermittente au-dessus de la rotule gauche. Cette douleur l'empêche parfois de marcher et le prend subitement : elle est très supportable et semble être en rapport avec les intempéries de l'air. Objectivement on ne constate aucune lésion de l'articulation du genou.

Tout le membre gauche est manifestement atrophié : la cuisse et la fesse sont plus atteints que le mollet. Cette atrophie est d'autant plus frappante que le muscle triceps de la cuisse droite est fortement hypertrophié. Le vaste externe et le droit antérieur donnent la sensation d'une masse dure et résistante. Le mollet droit est également augmenté de volume, comparativement au mollet gauche, mais la différence est beaucoup moins évidente qu'à la cuisse.

Ce jeune homme n'accuse aucune gêne ni aucune souffrance dans le membre inférieur droit.

La sensibilité est normale des deux côtés; les réflexes sont normaux également.

Au sujet de ce cas intéressant, le Dr Glorieux émet quelques hypothèses, concernant l'étiologie et la pathogénie des troubles musculaires, et discute le diagnostic probable de myopathie pseudohypertrophique.

Observation II. — Garçon de 9 ans, avec hypertrophie considérable des deux mollets et atrophie de la plupart des membres. La station debout et la marche sont encore possibles, mais le relèvement en cas de chute sur le sol est complètement impossible. Le Dr Glorieux démontre chez ce malade la difficulté et parfois l'impossibilité de certains mouvements, tels que le saut à pieds joints, la station sur les talons ou la pointe des pieds.

Les muscles du cou et de la face sont tout à fait indemnes.

Il s'agissait là d'un cas typique de myopathie progressive avec pseudohypertrophie.

Observation III. — Jeune fille de 12 ans, atteinte depuis trois mois de spasme de l'orbiculaire des paupières ou blépharospasme. Ce spasme est d'ordre réflexe et ce réflexe a pour point de départ l'action excitante de la lumière. Sous ses lunettes bleues, les yeux restent ouverts; objectivement, aucune lésion matérielle de l'organe de la vue.

On peut considérer ce blépharospasme comme étant d'origine névropathique ou hystérique.

Observation IV. — Tailleur, âgé de 39 ans, atteint de contractions spasmodiques de presque tous les muscles de la face à gauche : c'est là un cas de *tic non douloureux* de la face. Le tic non douloureux peut être *essentiel,* c'est-à-dire sous la dépendance d'une lésion que nos moyens actuels d'investigation ne permettent pas de déceler, ou *symptomatique* d'une lésion matérielle, telle que tumeur du cerveau ou du crâne, carie dentaire.

Observation V. — Jeune fille de 30 ans, atteinte de spasmes musculaires disséminés par tout le corps et les membres : c'est un cas de *paramyoclonus multiplex.* Brusquement cette jeune fille se renverse en arrière, ou projette violemment son ventre en avant; ou bien ce sont les bras et les jambes qui sont animés de

mouvements brusques et désordonnés. Ces mouvements subits contrarient nécessairement les mouvements normaux et volontaires, tels que la marche, le travail manuel.

Pour finir, M. Glorieux a montré quelques cas de paralysie faciale, depuis les cas les plus bénins jusqu'aux cas les plus graves et les plus rebelles : une petite fille de 10 mois, atteinte de paralysie faciale, fut montrée comme cas rare, vu le jeune âge de la petite malade.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale de l'après-midi s'est tenue à l'Hôtel Ravenstein, et a été consacrée à une conférence des plus intéressantes du R. P. Dierckx, sur les *Volcans de Java*. Le savant conférencier, de retour d'un voyage scientifique à Java, a exposé les résultats de ses observations personnelles, en illustrant son discours de projections superbes, reproductions de photographies prises par lui au cours de sa mission. Voici un résumé de sa conférence :

Avec une superficie qui équivaut à quatre fois celle de la Belgique, Java compte 121 volcans, dont 18 ont rejeté des matières solides, pendant les temps historiques.

Le conférencier conduit d'abord ses auditeurs au Salak et au Gede, montagnes de l'ouest de l'île, actuellement assoupies ; leurs mares boueuses, leurs sources chaudes, leurs fumerolles bruyantes et les tremblements de terre fréquents de la région voisine dénotent une activité toujours prête à se réveiller. Au massif de l'ouest appartiennent aussi le Tangkoeban-Prahoe et le Papandajan, volcans chers aux touristes. Le cratère du premier a été transformé en un lac d'eaux laiteuses ; le cratère du second a des jets de vapeur d'une telle intensité que l'imagination des natifs y voit le “ soufflet de forge „ des divinités souterraines.

Plus à l'Est, en face de la ville de Soerabaja, est le massif imposant du Tengger, maintes fois comparé aux volcans lunaires. Rien de grandiose comme son cirque terminal, cuvette immense de 300 mètres de profondeur et de cinq lieues de tour, dont le fond

forme une mer de sable d'où émergent, avec une majesté sinistre, les pitons du centre. Le P. Dierckx a eu la bonne fortune de voir ce cirque envahi par les nuages, alors que le Bromo émettait son panache blanc comme neige et qu'à l'horizon le Smeroe, le pic le plus élevé de Java, jetait au vent, de dix en dix minutes, les bouffées de ses éruptions intermittentes.

Non moins remarquable enfin est le Keloet, qui fit éruption le 23 mai 1901, déversant sur la région les eaux bouillantes de son lac-cratère, transformées bientôt en des torrents de boue capables de charrier des quartiers de roche grands comme des maisons. Son voisinage désolé permet de se rendre compte du désastre récent de la Martinique.

La dynamique interne du globe se manifeste à Java en cent points à la fois. Aussi il est bien à craindre que l'attention du monde entier, fixée aujourd'hui sur l'archipel des Antilles, ne se reporte encore un jour sur l'archipel de la Sonde, car Java reste toujours l'île volcanique par excellence.

Le Président remercie et félicite l'orateur et déclare close la session du 29 janvier 1903.

SESSION DU 21, 22, 23 AVRIL 1903

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi, 21 avril. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président :	Lieutenant-Général DE TILLY.
Vice-Présidents :	Ch. LAGASSE-DE LOCHT,
	Vicomte R. D'ADHÉMAR.
Secrétaire :	H. DUTORDOIR.

La section remet au concours la question posée en 1901 : *Faire une étude approfondie des travaux de Simon Stevin sur la mécanique, en les comparant aux travaux antérieurs d'Archimède et aux travaux presque contemporains de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.* — Les mémoires en réponse à cette question doivent être envoyés au Secrétariat avant le 1er octobre 1904.

Il est ensuite donné lecture du rapport suivant de M. J. Neuberg sur la note intitulée : *Sur la séparatrice d'ombre et de lumière du serpentin,* par M. Hanocq, candidat-ingénieur à Liége :

« Aucun des auteurs que j'ai pu consulter (*) n'a traité cette

---

(*) Depuis la présentation du présent rapport, M. Legrand, répétiteur du cours de géométrie descriptive à l'Université de Liége, a étudié, dans le BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ASSOCIATION DES ÉLÈVES DES ÉCOLES SPÉCIALES DE LIÉGE, la même courbe et les ombres portées par le serpentin. La propriété de la séparatrice d'appartenir à un conoïde est due à M. Hanocq (J. N.).

question. La solution de M. Hanocq est intéressante; la voici en quelques mots :

Le serpentin est l'enveloppe d'une sphère de rayon constant ρ et dont le centre M parcourt une hélice H tracée sur un cylindre de révolution; on peut aussi considérer cette surface comme le lieu d'un cercle C de rayon ρ dont le centre M parcourt H et dont le plan est normal à H en M. La courbe de contact de la sphère mobile M avec le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles aux rayons lumineux est un cercle D, de centre M, de rayon ρ et situé dans un plan perpendiculaire aux rayons lumineux. La courbe cherchée est le lieu des points X, Y communs aux deux cercles C et D. Le diamètre commun XY engendre un conoïde dont le plan directeur est perpendiculaire aux rayons lumineux, dont la directrice rectiligne est parallèle à l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice H et dont la seconde directrice est cette hélice.

Cette propriété remarquable dont M. Hanocq donne une démonstration géométrique, conduit à un tracé simple des projections de la séparatrice. La projection horizontale de la droite XY passe par un point fixe; celles des cercles C et D sont des ellipses de forme constante, mais un artifice ingénieux permet de concentrer toutes les constructions en un seul point de l'hélice. L'auteur discute les différents cas qui peuvent se présenter d'après la direction des rayons lumineux.

Je propose volontiers l'insertion du travail de M. Hanocq dans les Annales de la Société scientifique, après réduction des deux épures à des dimensions rentrant dans le cadre de nos publications. Ces conclusions sont adoptées.

M. le vicomte d'Adhémar communique à la section la note suivante *Sur les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique à plusieurs variables indépendantes* (*), et il résume brièvement les idées principales d'un mémoire qui paraîtra dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées de M. Jordan.

(*) Voir les Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXVI, 1re partie, pp. 59-67.

Pour les équations

$$(H) \qquad \Delta^{p,q} u = \sum_1^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \sum_1^q \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = F(x, y),$$

les cônes parallèles au cône

$$(\Lambda) \qquad \sum_1^p x_h^2 - \sum_1^q y_k^2 = 0,$$

jouent un rôle fondamental.

On les appelle *cônes caractéristiques* et il font partie, en effet, des multiplicités caractéristiques définies par M. J. Beudon (*), d'après Cauchy.

Nous sommes essentiellement dans le *domaine réel.* Le cône Λ est *réel* pour une équation (H) qui sera, dès lors, dite *hyperbolique.* Le cône Λ se réduit à *un point* pour une équation de *Laplace elliptique* ($q = 0$). Ceci explique les différences profondes entre le cas

$$q > 0,$$

et le cas

$$q = 0.$$

Nous nous occupons du premier cas.

M. Volterra (**) s'est occupé de l'équation :

$$(1) \qquad \Delta^{2,1} u = F(x, y, z),$$

pour laquelle deux problèmes se posent (1).

Problème Intérieur. M. Volterra montre que l'on obtient $u(x_0, y_0, z_0)$, si l'on connaît u et ses dérivées premières u' sur une portion de surface S découpée *intérieurement* par le cône Λ_0 du point (x_0, y_0, z_0).

Par la conception de la *conormale* (***), 1° j'ai simplifié notablement le calcul de M. Volterra; 2° j'ai montré que l'on doit donner

(*) Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXV, 1897.
(**) Acta Mathematica, t. XVIII (1894).
(***) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 11 février 1901.

sur S non pas *toutes* les dérivées u', mais seulement la *dérivée conormale* $\frac{du}{dN}$; 3° j'ai montré que si S est un cône Λ_1 parallèle à Λ, la donnée de u est *seule nécessaire et suffisante.*

En outre, j'ai étudié cette question, non abordée par M Volterra: *l'intégrale et sa dérivée conormale tendent-elles vers les valeurs données* lorsque le point (x_0, y_0, z_0) tend à venir sur S?

J'ai prouvé que ceci exige que la *surface* S ait un *plan tangent incliné au plus* à 45° sur le plan xoy.

Problème Extérieur. Les données sont portées par une surface S analogue à un cylindre, découpée *extérieurement* par le cône Λ_0.

M. Volterra obtient bien $u(x_0, y_0, z_0)$; mais les données u et $\frac{du}{dN}$ doivent satisfaire à une *condition fonctionnelle* mobile avec le point (x_0, y_0, z_0).

J'ai obtenu d'autres *conditions fonctionnelles* mobiles en exprimant que u et $\frac{du}{dN}$ tendent vers les valeurs données lorsque (x_0, y_0, y_0) vient sur S.

Toutes ces conditions sont de structure si complexe que l'on pressent qu'elles ne seront qu'*exceptionnellement réalisées toutes en même temps.* On a devant soi des systèmes d'équations fonctionnelles et l'on sent combien l'on est impuissant à en tirer quelques conclusions faciles à vérifier sur une surface donnée quelconque.

Problème Intérieur généralisé. Après une étude minutieuse de $u(x_0, y_0, z_0)$ et de $u'(x_0, y_0, z_0)$, j'ai pu obtenir les *majorantes* voulues pour que l'application des méthodes d'*approximations successives de M. Picard* devienne possible et j'ai intégré (*)

$$\Delta^{2,1} u = a(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} + hu + f,$$

les $a, b, \ldots, f$ étant fonctions d'x, y, z *finies* dans le domaine considéré.

(*) Bull. de la Soc. mathém. de France, 1901, et Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, 16 février 1902.

M. Tedone (*) ayant intégré pour le *Problème Intérieur*, l'équation

$$\Delta^{p,1} u = F(x, \dots x_p t),$$

l'on peut, aussi bien, intégrer alors

$$\Delta^{p,1} u = \sum_1^p a_h \frac{\delta u}{\delta x_h} + b \frac{\delta u}{\delta t} + hu + f.$$

Problème Extérieur généralisé. M. Volterra ayant traité le *Problème Extérieur* pour $\Delta^{2,1} u = F$, M. Tedone a traité *par la même voie* ce même Problème pour $\Delta^{2n,1} u = F$.

Rien n'avait été fait pour le *Problème Extérieur* relatif à $\Delta^{p,1} u = F$ lorsque p est *impair*. Par une *modification très sensible* des idées de M. Volterra, j'ai pu traiter le cas (**) où $p = 3$.

Mais ici encore il y a *accumulation de conditions fonctionnelles* pour les données $u, \frac{du}{dN}$.

Conclusions. Pour toutes les équations

$$\Delta^{p,1} u = F,$$

le *Problème Intérieur* paraît résolu. Pour le *Problème Extérieur* il semble difficile d'*achever* la solution.

Prenons maintenant les équations générales (H) de M. J. Coulon (***). Il ne se pose ici que le *Problème Extérieur* avec toutes les conditions fonctionnelles.

M. J. Coulon a trouvé, de la manière la plus remarquable, la valeur de u en un point : *c'est l'expression de l'intégrale si cette intégrale existe.*

Encore un mot. M. J. Hadamard (IV) a étendu la notion de *caractéristique* aux *systèmes* d'équations aux dérivées partielles.

Ici encore il est des systèmes étudiés par M. Volterra (V), puis

(*) ANNALI DI MATEMATICA, Milan, 1898.

(**) COMPTES RENDUS DE L'ACAD. DES SCIENCES, 16 décembre 1902.

(***) Thèse, chez Hermann, Paris, 1902.

(IV) Cours du Collège de France, 1901.

(V) ACTA MATHEMATICA, t. XXVIII.

par M. Tedone (*), où une caractéristique est le cône Λ. L'on retrouve le *Problème Extérieur* avec ses *conditions pour les données.* On n'a plus l'analogue de la notion de *dérivée conormale,* les dérivées des fonctions *u*, *v*, ..., étant *mêlées* les unes aux autres. L'on pourra d'ailleurs appliquer les méthodes d'approximations de M. Picard au *Problème Intérieur* relatif à ces systèmes.

M. Mansion présente à la section la note suivante de M. Lechalas : *La Géométrie projective est-elle indépendante de la Géométrie métrique ?*

Dans une communication faite le 10 avril 1902 à la *Société scientifique de Bruxelles,* M. Mansion répond d'une façon nettement négative à la très importante question : la géométrie projective est-elle indépendante de la géométrie métrique? A cette négation nous ne venons pas opposer une affirmation aussi nette, et notre but, plus modeste, est seulement de montrer que la preuve ingénieuse apportée par M. Mansion n'est plus valable.

Cette preuve repose sur ce que toute la géométrie projective pourrait se déduire, d'après M. Russell, d'un théorème qu'on ne saurait démontrer sans faire la distinction des trois branches de la métagéométrie, distinction qui appartient à la géométrie métrique.

La remarque est fort juste, si l'on considère le théorème en question dans sa généralité; mais ce théorème n'est fondamental que parce qu'il permet de démontrer que le résultat de la construction quadrilatérale de Von Staudt est unique. Dès lors, il convient d'examiner dans quelles conditions se fait l'application du dit théorème à la démonstration de cette unicité, afin de reconnaître s'il est vraiment nécessaire de distinguer le cas où deux droites d'un plan se rencontrent toujours et où deux plans se coupent toujours de celui où il existe des droites et des plans parallèles et de celui où deux droites d'un plan peuvent n'être ni concourantes ni parallèles et deux plans ne se couper ni à distance finie ni à l'infini.

Or, on voit d'abord, en suivant le raisonnement donné par M. Russell (**), que le théorème est appliqué à deux plans qui, par

---

(*) Annali di Matematica, Milan, 1898 et Atti della Accademia di Torino.

(**) *Essai sur les Fondements de la Géométrie,* traduction française, p. 161.

hypothèse, se coupent : on n'a donc pas à se préoccuper de savoir ce qu'il en adviendrait si les plans ne se coupaient pas. Ensuite, quand il s'agit finalement de prouver que deux droites situées respectivement sur chacun des deux plans et comprises d'autre part dans un même troisième plan se rencontrent sur l'intersection des deux premiers, on n'est pas en présence de deux droites quelconques, mais de deux droites qui, en vertu de leur construction (*), rencontrent toutes deux cette intersection et par suite la rencontrent bien en un même point. Ce sont là toutes circonstances qui peuvent se présenter dans les trois géométries.

M. Mansion, en réponse à cette note, fait observer que la construction quadrilatérale seule ne permet pas de trouver les conjugués harmoniques des points voisins du milieu d'un segment de droite. La géométrie projective *pure* est donc forcée d'ignorer l'existence de certains points situés sur les droites qu'elle étudie, ce qui en restreint considérablement la portée. En effet, dans chaque théorème et dans chaque problème, on aura toujours à craindre de raisonner ou d'opérer dans la région inconnaissable de chaque droite.

M. L. Cousin donne ensuite une description sommaire d'un *Nouveau système de batardeau pour les terrains très perméables.* La note de M. Cousin est publiée dans la seconde partie des ANNALES.

M. le vicomte d'Adhémar analyse ensuite le Mémoire de M. d'Ocagne : *Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie,* publié dans le 8e cahier de la 2e série du JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. Cette analyse sera publiée dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. En voici un aperçu :

M. d'Ocagne aborde de front l'étude de tous les modes de représentation plane applicable à des êtres géométriques à n dimensions, en se basant sur ce principe : la seule relation précise de position entre deux éléments qui puisse être jugée à vue, c'est

(*) On a deux triangles situés respectivement dans chacun des deux plans et ayant pour base commune un segment de l'intersection de ces plans, et chacune des droites considérées joint l'un des sommets opposés à cette base à un point intérieur au triangle correspondant.

leur contact. Il fait connaître l'*anamorphose géométrique* de Lalanne, celle de Massau, les nomogrammes à systèmes de cercles, etc. Il ramène finalement tous les nomogrammes à vingt types canoniques, dont un à un plan, les autres à deux. M. d'Ocagne indique une méthode de représentation des équations algébriques, jusqu'au septième degré et fait connaître la résolution de ces équations par les *images logarithmiques* de Mehmke.

Le P. Bosmans, S. J., fait connaître une particularité de l'Astronomie chinoise au XVII^e siècle. Voici un résumé de sa communication :

Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie du moyen âge* (*) a donné une intéressante analyse de l'*Astronomia Europaea* (**) de notre compatriote le P. Ferdinand Verbiest (***), analyse dans laquelle on lit notamment cette phrase :

(*) Paris, Courcier, 1819, pp. 213-223.

(**) *Astronomia Europæa svb imperatore tartaro sinico Cám Hy appellato ex umbra in lucem revocata à R. P. Ferdinando Verbiest Flandro-Belga e Societate Jesu Academiæ Astronomicæ in Regia PeKinensi præfecto Cum Privilegio Cæsareo, & facultate Superiorum. Dilingæ, Typis & Sumptibus, Joannis Caspari Bencard, Bibliopolæ Academici. Per Joannam Federle. Anno M.DC.LXXXVII,*

Ce volume est un in-4° de 126 pp. et 1 planche hors texte, publié en 1687, à Dillingen, par les soins du P. Philippe Couplet de Malines.

On ne peut à aucun point de vue le regarder comme une réédition de l'*Astronomia Europaea sub imperatore Tartaro-Sinico Cám Hy appellato Ex umbra in lucem reuocata A. P. Ferdinando Verbiest Flandro-Belga Brugensi e Societate Jesu Academiæ Astronomicæ in Regia Pekinensi Præfecto Anno salutis M.DC.LXVIII.* (Bibl. de l'Observatoire royal de Belgique 12^h.)

Ce dernier ouvrage est un magnifique volume in-folio, mais composé exclusivement de planches imprimées sur papier de la Chine, planches dont une seule, la vue générale de l'Observatoire de Pékin, a été reproduite dans l'*Astronomia Europaea* éditée à Dillingen.

La bibliographie des œuvres de Verbiest a été donnée récemment encore dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel (t. VIII, Bruxelles, 1898, coll. 574-586), mais elle renferme de nombreuses erreurs. Il faut reconnaître que cette bibliographie est fort difficile à faire ; il serait utile de la reprendre.

(***) Ferdinand Verbiest naquit à Pitthem, près de Courtrai, le 9 octobre 1623. Il entra au noviciat de Malines le 2 septembre 1641 et fit ses études de théologie

“ Les Chinois, de temps immémorial, divisaient le degré en cent parties; il en était de même des minutes et des heures „ (*).

Delambre ajoute que malgré la résistance énergique des astronomes chinois, Verbiest parvint à faire adopter la division sexagésimale des Européens et à faire abandonner la division centésimale chinoise.

Personne plus que moi n'admire Delambre, mais on sait que pour écrire son grand ouvrage, l'illustre historien s'est mis à un point de vue spécial assez différent de celui auquel nous avons l'habitude de nous placer aujourd'hui. Absorbé par la partie mathématique de son sujet, il attache souvent une importance secondaire à l'exactitude des citations et des références.

Il y avait donc, dans ce passage de Delambre, un point curieux d'histoire à examiner.

Or, j'ai hâte de le dire, Delambre est cette fois parfaitement exact, car voici le texte même de Verbiest (**) :

à Séville. En 1659 il fut envoyé en Chine avec plusieurs autres missionnaires, entre autres le P. Philippe Couplet de Malines.

Arrivé en Chine, Verbiest s'y consacra d'abord pendant dix mois à la prédication de l'Évangile, mais bientôt le P. Adam Schall de Cologne le fit venir à Pékin, pour l'associer à ses travaux astronomiques.

Cependant, en 1665, un soulèvement s'étant fait contre les chrétiens et les Européens, Verbiest partagea le sort de ses confrères et finit par être jeté en prison. Le P. Schall, directeur de l'Observatoire de Pékin, fut remplacé par un mandarin très ignorant. Aussi le calendrier chinois se trouva bientôt dans un tel désordre, que l'empereur Cam-Hy ordonna de consulter les missionnaires pour le corriger.

Verbiest se concilia l'estime de Cam-Hy, qui lui confia, en 1669, les fonctions de directeur de l'Observatoire de Pékin, fonctions que Verbiest conserva jusqu'à sa mort (27 janvier 1688).

Pour plus de détails voir : *Notice biographique sur le P. Verbiest, Missionnaire de la Chine,* par l'abbé C. Carton... Bruges, Vandecasteele-Werbrouck, 1839 (Tirage à part des Annales de la Société de l'Émulation pour l'histoire et les antiquités de la Flandre occidentale, Bruges, 1839, t. I. pp. 83-159).

Biographie du R. P. Verbiest, Missionnaire en Chine, par l'abbé C. Carton, Bruxelles, 1844 (Extrait de l'*Album bibliographique des Belges célèbres, dédié à S. A. R. Mgr le duc de Brabant,* Bruxelles, Alph. Chabannes, éditeur, 1845, t. I. pp. 65-98).

(*) P. 216.

(**) *Astronomia Europaea.* Édition de Dillingen, p. 17.

“ Astronomi Sinenses, sicut omnes circuli gradus, ac minuta singula, ita etiam diem naturalem, horas, singula horarum minuta in centum partes dividebant. „

C'est mot pour mot ce que dit Delambre.

Un peu plus loin Verbiest écrit encore (*): “ Illi — les Chinois — pro suâ illâ divisione quam ab omni antiquitate acceperant, retinendâ, tamquam pro aris et focis pugnabant. „

Encore une fois, c'est précisément ce que dit Delambre.

Voilà donc un point d'histoire bien prouvé et j'ajouterai qu'il est pleinement confirmé par d'autres documents contemporains et notamment par une relation écrite en français, à Canton, en 1669, dont une copie manuscrite du temps existe aux Archives générales du Royaume (**).

En imposant la division sexagésimale aux Chinois, Verbiest, au lieu d'avoir perfectionné leur astronomie, semble lui avoir plutôt imprimé un recul.

Il serait malaisé, je crois, de ne pas avouer qu'il en est, en effet, ainsi.

Mais il est des circonstances atténuantes qui rendent Verbiest excusable.

Le missionnaire était aux fers dans les prisons de Pékin (***). A se tromper dans ses calculs il jouait sa liberté, sa vie même et celle de ses compagnons captifs comme lui.

D'autre part, ses instruments et ses tables étaient gradués en divisions sexagésimales (IV).

(*) *Astronomia Europaea*, Édition de Dillingen, p. 18.

(**) Archives des jésuites de la province Flandro-Belge. Cahier relié portant au dos la mention : “ Lettres annuelles des provinciaux des jésuites d'Asie au P. Général, 1618-1669 „. Dans une pièce occupant les ff. 173-193 du volume et intitulée : Recueil des choses remarquables qui se sont passées à la cour de Pékin, touchant nos PP. et touchant la mathématique cette année 1669.

(***) Voir à ce sujet la lettre d'un intérêt si poignant adressée de Pékin par Verbiest au Provincial de la Flandre-Belgique.

L'autographe de Verbiest forme les ff. 92 et 93 du cahier de lettres de missionnaires conservé aux Archives générales du Royaume dont nous venons de parler ci-dessus.

Un fragment de la lettre a été publié en fac simile par l'abbé Carton, dans sa *Notice biographique sur le P. Verbiest*, Bruges, 1839 (Planche hors texte entre les pp. 54 et 55).

(IV) *Astronomia Europaea*, Édition de Dillingen, p. 18.

Il était donc bien plus certain de ne pas se tromper dans ses calculs en employant la division sexagésimale à laquelle il était habitué qu'en faisant usage de la graduation centésimale chinoise.

Mercredi, 22 avril 1903. M. Mansion communique à la section deux notes dont voici le résumé sommaire :

I. *Sur la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Weierstrass.* On réduit aisément l'intégrale d'une fraction rationnelle de x et de R, quand $R^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E$, à des intégrales élémentaires et à l'intégrale d'une fonction rationnelle de y et de r, r^2 étant égale à $4y^3 - g_2y - g_3$, g_2 et g_3 étant les invariants de R^2. On emploie pour cela, soit la transformation d'Hermite, soit une transformation due à Weierstrass, dans laquelle on pose $AR^2 = (Ax^2 + 2Bx + C - 2y)^2$. Si $r^2 = 0$ a une racine réelle $-2m$, et deux racines imaginaires $m + ni$, $m - ni$, l'intégrale transformée ne se prête nullement aux calculs numériques. Dans ce cas, on la ramène à une autre où entre un radical ρ tel que $\rho^2 = 0$ soit une équation cubique dont les racines sont réelles, par les transformations suivantes : 1° On pose $y + 2m = t^2$, ce qui amène dans l'intégrale un radical portant sur l'expression $P = t^4 - 6m\,t^2 + 9m^2 + n^2$; 2° on applique à l'intégrale en t, la transformation de Weierstrass, en posant $P = (t^2 - m - 2z)^2$. On trouve que l'intégrale en z contient un radical ρ, tel que $\rho^2 = 0$ a ses *trois* racines réelles, savoir m, et $-\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{9m^2 + n^2}$. — Ce procédé est beaucoup plus simple et plus facile à retenir que ceux qui sont exposés dans les manuels de la théorie des fonctions elliptiques.

II. *Sur la simplification des notations elliptiques de Weierstrass.* Les trois fonctions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass, pu, σu et Dlog σu, dépendent au fond de trois variables, savoir u et les deux périodes ω et ω' ou, si l'on aime mieux de u, du multiplicateur $\lambda = p\omega - p\omega'$, et du module $k^2 = [p(\omega + \omega') - p\omega'] : \lambda$.

Ces fonctions pu, σu, D log σu, sont dans une relation très étroite avec les anciennes fonctions elliptiques sn, cn, dn, Θ, Z, Π, mais pour un autre argument $v = u\sqrt{\lambda}$.

La présence de ce facteur $\sqrt{\lambda}$ complique, *sans aucune utilité*, un

grand nombre de formules de la théorie des fonctions elliptiques; il est beaucoup plus simple de supposer, dès le début, $\lambda = 1$ et, par suite $\omega = K$, $\omega' = K'i$, de manière à ne considérer dans la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass, comme dans celle d'Abel et de Jacobi, que des fonctions de deux variables u et k^2.

Au point de vue pédagogique, comme au point de vue pratique, le maintien du multiplicateur λ est aussi inutile dans cette théorie que dans celles des fonctions circulaires, fonctions que personne ne songe à étudier sous la forme $\sin \lambda x$, $\cos \lambda x$, etc.

M. Folie présente un complément à son mémoire intitulé: *Simple recherche trigonométrique de la nutation eulérienne de l'axe instantané* (Annales, t. XXV, 2e partie, pp. 252-268). — La section vote l'impression de cette note dans la seconde partie des Annales.

Enfin M. Mansion fait une communication *Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités* dont voici un aperçu. Posons $Fz = z^m (1-z)^n$, $m = \mu p$, $n = \mu q$, $m + n = \mu$, $m > n$, $2\,l \leqq q$ et considérons les rapports (A : E), (B : E), (P : E), (Q : E) où l'on a $E = A + B$, et

$$A = \int_0^p Fz\,dz, \quad B = \int_p^1 Fz\,dz, \quad P = \int_{p-l}^p Fz\,dz, \quad Q = \int_p^{p+l} Fz\,dz.$$

On prouve aisément que A surpasse B et que P surpasse Q. Au moyen de la formule de Stirling, on enferme E entre deux limites. Pour estimer approximativement A, B, P, Q, on pose $z = p - x$ dans A et P, $z = p + x$ dans B et Q et l'on met Fz sous la forme $p^m q^n e^u$. La dérivée de u par rapport à x est comprise entre deux valeurs $\varphi' x$, $\psi' x$ et, par suite, u entre φx et ψx. On parvient, dans tous les cas, à estimer approximativement les intégrales de $e^{\varphi x} dx$, $e^{\psi x} dx$ et, par suite, à enfermer entre deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure, les rapports (A : E), (B : E), (C : E), (D : E). Il en est de même pour l'intégrale considérée par Poisson dans le § 88 de son ouvrage sur la *Probabilité des jugements en matière civile et criminelle*; elle est égale à la somme algébrique de deux de ces rapports.

Deuxième section

Mardi, 21 avril 1903. La section procède à l'élection de son bureau pour l'année 1903-1904.

Sont élus :

Président :	Abbé De Muynck.
Vice-présidents :	L. Henry,
	G. Van der Mensbrugghe.
Secrétaire :	R. P. Lucas, S. J.

La section met au concours la question suivante : *Nouvelles recherches sur les décharges électriques dans les gaz* (Délai jusqu'au 1er octobre 1904).

Le secrétaire donne lecture d'une lettre de M. Ferron relative au rapport de M. Mansion sur son travail intitulé : *Mémoire établissant par voie analytique la formule empirique de dispersion du physicien Ketteler,* rapport inséré aux Annales de la Société, t. XXVII, première partie, p. 65. La section décide que cette lettre doit être communiquée à M. Mansion.

M. l'abbé De Muynck expose ses recherches *Sur la conductibilité électrique des solutions d'hydrate de chloral.* La section vote l'impression de ce travail aux Annales. On la trouvera dans la seconde partie.

M. Van der Mensbrugghe fait une communication *Sur une relation entre les forces moléculaires et la solubilité;* en voici le résumé.

En 1901, M. G. Hulett a publié un article intitulé *Beziehung zwischen Oberflächenspannung und Löslichkeit* (Zeitschrift für physikalische Chemie, t. XXXVII, p. 385). L'auteur rappelle un travail où M. Curie (*) arrive à la conclusion suivante : Dans une

(*) Bulletin de la Soc. minéral. de France, 1885.

solution où il y a des cristaux petits et grands, les petits sont dissous et les plus grands s'accroissent, de manière que la surface totale des corps plongés diminue.

L'expérience prouve que beaucoup de solides fraîchement précipités passent à travers le filtre; mais, après un séjour de quelques heures dans le liquide, le précipité se sépare aisément par filtration. On sait aussi qu'en opérant à chaud, on voit le précipité s'agglomérer très vite en gros fragments.

M. Ostwald a montré que l'énergie superficielle des précipités tend vers un minimum (*).

Pour expliquer les faits que je viens de rappeler, on a invoqué la tendance au minimum de la somme des surfaces mouillées. Mais, pour rendre cette explication plausible, il aurait fallu prouver d'abord que la couche commune au solide et au liquide est réellement soumise à une force contractile. Or, il y a bien longtemps que j'ai tâché d'établir, d'un côté par la théorie, de l'autre par l'expérience, qu'en réalité la couche de contact d'un solide et d'un liquide qui le mouille, possède une force d'extension; celle-ci provient de ce que la couche de contact est plus fortement comprimée que le reste du liquide. J'estime en conséquence que la théorie fondée sur l'hypothèse d'une force contractile n'est pas conforme aux faits.

Mais, on le comprend, il ne suffit pas de rejeter un mode de rendre compte des faits, il faut encore, si c'est possible, en proposer un autre plus conforme à la réalité. Voyons donc si, en admettant une force d'extension à la surface commune d'un cristal et de l'eau-mère, nous pouvons expliquer la disparition des petits cristaux et l'accroissement des plus gros.

A cet effet, rappelons que toute surface liquide convexe où règne une force contractile éprouve une pression normale dirigée vers l'intérieur et d'autant plus grande que la courbure est plus marquée; mais si la surface est sollicitée au contraire par une force d'extension, il se produira une traction dirigée vers l'extérieur, et cette traction sera d'autant plus notable que la portion liquide considérée est plus fortement convexe. Il suit de là que toutes les

---

(*) Analyt. Chemie, 3e édit., pp. 15 et 23.

parties saillantes d'un cristal plongé dans l'eau-mère seront tirées plus ou moins rapidement dans le liquide : mais une action pareille fera disparaître évidemment les petits cristaux plus vite que les gros; seulement, comme la solution ne peut manquer ainsi de devenir sursaturée, c'est sur les gros morceaux que se déposera l'excès des particules dissoutes.

Le processus en question doit-il être facilité par l'élévation de la température? Évidemment, car dans ces conditions, les particules solides voisines de la couche mouillante considérée seront plus espacées entre elles et par conséquent plus faciles à détacher.

Je serais heureux de constater que les lignes précédentes ne passent pas inaperçues; il y a déjà trop longtemps que l'on regarde indistinctement toutes les surfaces solides ou liquides comme soumises, sans exception aucune, à des forces de contraction.

M. Louis Henry s'occupe de *la préparation de certains alcools à l'état de liberté par la saponification de leurs éthers à l'aide d'autres alcools.*

Les alcools $C_nH_{2n+1}(OH)$ sont, en une certaine manière, assimilables aux alcalis caustiques $\overset{\text{I}}{\text{R}}$ - OH et de la même manière que les alcalis sont susceptibles de chasser de leurs sels des bases hydroxylées à l'état de liberté, de la même manière des alcools sont susceptibles de chasser de leurs éthers d'autres alcools à l'état de liberté aussi, en donnant naissance à un nouvel éther. Il rappelle à cette occasion la notice qu'il a publiée précédemment intitulée: *Observations au sujet de l'action des alcools sur les éthers composés* (*). Cette réaction trouve son expression la plus parfaite dans l'*action des alcools sur les éthers nitreux*, action qu'ont fait connaître les recherches, si remarquables et malheureusement trop peu connues, d'un chimiste italien, M. G. Bertoni, publiées de 1882 à 1888. La rapidité avec laquelle s'opèrent, souvent dès la température ordinaire, toujours par un léger échauffement, ces déplacements des alcools vis-à-vis de l'acide nitreux fait de ces réactions de véritables expériences de leçons; leur netteté les constitue à l'état de méthodes de préparation de certains éthers nitreux. Il

(*) Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, 1902, p. 445.

n'est pas, dans la chimie des alcools, de réactions plus intéressantes au point de vue doctrinal. Le fait qui les domine est au fond la *loi du principe du travail maximum*, le plus fort chasse le plus faible. L'*alcool méthylique* $H_3C - OH$ chasse tous les alcools de leurs éthers nitreux, dès la température ordinaire, en produisant un nouvel alcool à l'état de liberté, celui de l'éther, et en fournissant du *nitrite de méthyle*, gaz bouillant à — 12°, dont la présence s'accuse extérieurement par un dégagement abondant de bulles gazeuses. M. Louis Henry signale un cas intéressant de cette réaction générale qu'il a fait connaître récemment (*), l'expulsion intégrale et presque instantanée de la monochlorhydrine éthylénique de son nitrite par l'alcool éthylique lui-même.

$$Cl\ H_2C - CH_2\ (O.NO) + H_3C - CH_2\ (OH)$$
$$= H_3C - CH_2\ (O.NO) + Cl\ CH_2 - CH_2\ (OH).$$

On sait d'une manière précise combien la présence du chlore dans le composant $Cl\ CH_2$ déprime l'intensité du caractère alcool dans le composant voisin $H_2C - OH$

$$H_3C - CH_2\ (OH)$$
$$Cl\ H_2C - CH_2\ (OH).$$

L'expulsion des alcools de leurs éthers par d'autres alcools constitue, dans certains cas, une méthode avantageuse de préparation à l'état de liberté de certains alcools, difficiles ou impossibles à obtenir par les méthodes ordinaires de saponification. Les éthers utilisables, dans ce but, sont les éthers des acides organiques et en première ligne ceux de l'*acide formique* $HCO\,(OH)$; les alcools à employer sont les alcools monoatomiques $C_nH_{2n+1}\,OH$. de poids moléculaire peu élevé et en toute première ligne aussi l'alcool méthylique $H_3C - OH$.

Ces prescriptions sont basées sur ces faits :

1° Que l'*acide formique* est le plus fort des acides gras volatils. Cela résulte tout à la fois :

(*) Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, 1902, p. 713.

a) De l'intensité de sa chaleur de salification.

Acide liquide + KOH solide = sel solide + eau solide.

CHO_2	28,3 calories.
$C_2H_4O_2$	24,4 id.

b) De l'intensité de son pouvoir éthérifiant.

Système isobutyl-formique à 100°.

Vitesse initiale	61,69
Limite	64,23

Système isobutyl-acétique à 155°.

Vitesse initiale	44,36
Limite	67,38

Dans ces conditions, la mise en liberté de l'alcool est due à l'union de l'acide organique le plus fort avec l'alcool réagissant le plus fort également.

En général il est nécessaire d'employer une quantité de l'alcool expulseur beaucoup plus considérable que la quantité théoriquement nécessaire. L'alcool méthylique bout à 66° et son éther formique à 32°; l'alcool éthylique bout à 78°, son éther formique à 54° et son éther acétique à 77°. La distillation permet de se débarrasser facilement de ces alcools et de leurs éthers.

M. Louis Henry rappelle qu'il a déjà mis à profit (*) avec grand avantage cette méthode pour obtenir divers alcools malaisés à former par d'autres méthodes, à savoir principalement :

1° *L'acétyl-carbinol* ou *alcool pyruvique* $H_3C - CO - CH_2 (OH)$. Éb. 148°. Produit de la réaction de l'alcool méthylique sur le *formiate pyruvique* $CH_3 - CO - CH_2 (CHO_2)$ lequel est lui-même le produit de la réaction de l'*acétone monochlorée* $CH_3 - CO - CH_2 Cl$ sur le *formiate potassique.*

Cette réaction a été utilisée, selon ses indications, dans ces derniers temps, avec un plein succès par un chimiste français, M. A. Kling (**).

(*) Voir ma notice citée plus haut.

(**) Bulletin de la Société chimique de Paris, 1903.

L'*acétate pyruvique*, qui s'obtient plus aisément encore que le formiate, ne réagit pas, en vase clos, vers 100°.

2° La *mono-bromhydrine éthylénique*. Décomposition par l'alcool méthylique du *bromo-acétate d'éthylène* $Br\,CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$ lequel est lui-même le produit intégral de la réaction de H Br gaz sur le *diacétate d'éthylène* $C_2H_4\,(C_2H_3O_2)_2$.

La *mono-chlorhydrine* $Cl\,CH_2 - CH_2\,(OH)$ peut s'obtenir avec le même avantage dans des conditions identiques.

Il fait connaître en ce moment quelques cas nouveaux de préparation de composés alcooliques d'après cette méthode.

1° La *mono-chlorhydrine tri-méthylénique* $Cl\,CH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\,(OH)$.

Le glycol triméthylénique $(HO)\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(OH)$ se comporte vis-à-vis de l'acide H Cl gaz tout autrement que le glycol éthylénique $(HO)\,CH_2 - CH_2\,(OH)$. Alors que celui-ci ne fournit, dans les conditions habituelles de réaction que la *mono-chlorhydrine* $Cl\,CH_2 - CH_2\,(OH)$, le glycol triméthylénique fournit, suivant les quantités de H Cl, soit la *mono-chlorhydrine* $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(OH)$ soit la *dichlorhydrine* $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(Cl)$. Il est difficile même de s'arrêter au dérivé *mono-acide* dont la préparation est rendue ainsi difficile et la purification laborieuse. La préparation de cette monochlorhydrine $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(OH)$ est aisée en suivant la méthode que voici :

a) Transformation du chloro-bromure de triméthylène $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,Br$ en *chloro-acétate* $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$, par l'acétate potassique $K - C_2H_3O_2$ fondu, sec, en présence d'un peu d'acide acétique. Purification aisée. Éb. 164°-165°. Il ne faut pas songer aux alcalis caustiques ni aux terres alcalines pour saponifier ce *chloro-acétate* par le côté acétique exclusivement. Mais on y arrive aisément par l'*alcool méthylique* $H_3C - OH$. On chauffe cette *chloro-acétine* en vase clos, à 100°, pendant une vingtaine d'heures avec une dizaine de molécules d'alcool méthylique légèrement humide. A la distillation, on obtient d'abord de l'*acétate de méthyle* (Éb. 54°) et, après le départ de l'alcool méthylique en excès, de la *mono-chlorhydrine* $Cl\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(OH)$ que quelques rectifications amènent à son point d'ébullition 161°-162°. Le rendement approche de l'intégralité.

Une réaction analogue permet d'obtenir sans difficulté la *mono-bromhydrine triméthylénique* $Br\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(OH)$ à l'aide

du bromo-acétate de triméthylène $Br\,CH_2 - CH_2 - CH_2\,(C_2H_3O_2)$. Celui-ci s'obtient aisément soit par la réaction de H Br gaz sur le *diacétate de triméthylène* $(H_2C)_3 - (C_2H_3O_2)_2$, soit plus directement par la réaction sur le bibromure de *triméthylène* d'une seule molécule d'acétate potassique fondu.

2° *Nitrile glycolique* $(HO)\,CH_2 - CN$. M. Louis Henry avait depuis longtemps conçu l'idée d'appeler à l'existence le *nitrile glycolique.* Il a dû attendre jusqu'en 1890 pour la réaliser; le méthanal étant devenu, grâce aux recherches de M. Tollens, un produit commercial dans l'établissement de MM. Mercklin et Lösekann, il a pu alors combiner cette aldéhyde avec l'acide H CN, d'où ce composé si intéressant $(HO)\,CH_2 - CN$. Auparavant, en 1873, pour en tenir lieu, il avait fait son dérivé *oxy-éthylé* $(C_2H_5.O)\,CH_2 - CN$ par la déshydradation de l'*amide éthyl-oxy-acétique* $(C_2H_5.O)\,CH_2 - CO\,(HN_2)$ par l'anhydride phosphorique (*).

Dès 1874, il avait préparé l'*acétate glycolique* $(C_2H_3O_2)\,CH_2 - CN$ par la réaction de l'*acétonitrile monochlorée* $Cl\,CH_2 - CN$ sur l'acétate potassique. Mais tout essai de passer à l'alcool correspondant à l'aide de cet éther acétique était resté sans résultat. Le fait s'explique, le *nitrile glycolique* lui-même $(HO)\,CH_2 - CN$ est rapidement altéré en présence de tout corps à réaction alcaline.

M. L. Henry a songé dans ces derniers temps à l'emploi des alcools comme agents de saponification.

L'action des alcools, méthylique et éthylique sur l'acétate glycolique étant restée sans résultat dans les conditions ordinaires, M. Louis Henry a mis en réaction le *formiate glycolique* $(CHO_2)\,CH_2 - CN$.

Cet éther s'obtient aisément, dans l'appareil d'Altmann, par la réaction de $Cl\,CH_2 - CN$ sur le *formiate potassique* $K - CHO_2$, fondu, sec, en morceaux. C'est un liquide bouillant à 172°; densité à 20° égale à 1,182. On y a trouvé 16,23 p. c. d'azote, calculé 16,47.

Chauffé pendant quelques heures, en vase clos, au bain d'eau, à 100°, avec dix molécules environ d'alcool méthylique, on en obtient aisément à la suite de quelques rectifications le *nitrile glycolique* lui-même $(HO)\,CH_2 - CN$, produit soluble dans l'eau, distillant, sous la pression de 35 millimètres, à 125°.

(*) Bulletin de l'Académie de Belgique, t. XXXV, n. 3, mars 1873.

En partant du *nitrile propionique* β *chloré* Cl CH_2 - CH_2 - CN, dont la préparation n'offre pas de difficultés, M. Louis Henry espère pouvoir obtenir facilement par la même méthode le *nitrile lactique* primaire (HO) CN_2 - CN_2 - CN, dont la préparation à l'aide de la *mono-bromhydrine éthylénique* réagissant sur K CN pourrait être plus avantageuse quant au rendement.

3° *Mono-chlorhydrine propylénique* β. H_3C - CH Cl - CH_2 (OH).

Elle résulte de l'action de l'alcool méthylique sur son *acétate* H_3 C - CH Cl - CH_2 (OCO.CH_3). Celui-ci est le produit de l'action de l'acide chlorhydrique gazeux sur la *mono-acétine* H_3C - CH Cl - CH_2 ($C_2H_3O_2$) laquelle s'obtient elle-même en chauffant la *mono-chlorhydrine* correspondante avec de l'acétate de potassium sec.

L'action des alcools sur les éthers devient ainsi une méthode avantageuse de préparation d'alcools à l'état de liberté, d'une importance sur laquelle il est inutile d'insister, puisqu'elle est applicable là où l'emploi des moyens ordinaires est impossible ou difficile. Outre cela, elle présente un haut intérêt au point de vue doctrinal.

M. J. Carlier fait l'historique des *Méthodes photométriques en électricité* et termine par l'indication d'une *Méthode basée sur l'emploi des résistances au sélénium.* Ce travail sera publié dans la Revue des questions scientifiques.

Mercredi, 22 avril 1903. M. Louis Henry s'occupe dans une première communication des *monochlorhydrines propyléniques* H_6C_3 (OH) Cl.

C'est dans le but de pouvoir résoudre, d'une manière définitive, la question de la nature de la *chlorhydrine* C_3H_6 + (HO) Cl, question qui est au fond celle de la distribution des radicaux (HO) et Cl dans un système bi-carboné doué de pouvoir additionnel et formé de deux groupements divers, tels que H_2C = et = CH du propylène, que l'auteur a repris l'étude de ces composés.

Le *glycol propylénique* étant H_3C - CH (OH) - CH_2 (OH) on prévoit l'existence de deux mono-chlorhydrines diverses

a) H_3C - CH (OH) - CH_2 Cl α ou mono-chlorydrine *isopropylique.*

b) H_3C - CH Cl - CH_2 (OH) β ou mono-chlorhydrine *propylique.*

La première est un *alcool secondaire*, la seconde, un *alcool primaire*. De là, par conséquent, des différences dans leur manière d'être et leur manière d'agir.

Ce que l'on sait de l'influence diverse qu'exerce sur la *volatilité* la méthylation des composés en C_2 pour passer en C_3, suivant qu'elle s'exerce dans un composant *hydroxylé, alcool*, ou un composant *chloré, éther chlorhydrique.*

$H_3C - CH_2(OH)$	Éb. 78°	$> + 5°$
$H_3C - CH(OH) - CH_3$	83°	
$H_3C - CH_2 - Cl$	Éb. 12°	$> + 24°$
$H_3C - CH\,Cl - CH_3$	36°	
$(HO)\,CH_2 - CH_2(OH)$	Éb. 197°	$> - 9°$
$(HO) - CH_2 - CH_2(OH) - CH_3$ . . .	188°	
$Cl\,CH_2 - CH_2\,Cl$	Éb. 84°	$> + 14°$
$Cl\,CH_2 - CH\,Cl - CH_3$	98°	

fait prévoir que ces deux composés, qui sont l'un et l'autre la mono-chlorhydrine éthylénique $(HO)\,CH_2 - CH_2Cl$ *mono-méthylée*, différeront également par leur *volatilité.*

$(HO)\,CH_2 - CH_2\,Cl$ . . . . Éb. 132°

β $(HO)\,CH_2 - CH\,Cl - CH_3$.

α $Cl\,CH_2 - CH(OH) - CH_3$.

La mono-chlorhydrine α doit, dans cet ordre d'idées, être la plus volatile.

Il importait de préparer ces deux composés dans des circonstances où l'on est autorisé à admettre qu'il se forme un composé unique.

A. — Origine et préparation de ces chlorydrines.

Point de départ général : le *chlorure d'allyle,* $H_2C = CH. - CH_2\,Cl$

1° *Chlorhydrine* α ou *isopropylique.* $H_3C - CH(OH) - CH_2\,Cl$

Deux méthodes :

a) Hydratation sulfurique du chlorure d'allyle. Sa combinaison avec H_2SO_4, distillation du composé avec l'eau. Transformation du système $H_2C = CH -$ en $H_3C - CH(OH) -$. Réaction de Berthelot et d'Oppenheim.

b) Fixation de H Cl sur l'oxyde de propylène $H_2C - CH - CH_3$.
O

L'oxyde de propylène (Éb. 35°), est un composé unique de son espèce : avec H Cl, quelle que soit son origine, il fournit, par addition chlorhydrique, toujours le même produit $H_6C_3(OH)Cl$.

Cette chlorhydrine *isopropylique* $HC_3 - CH(OH) - CH_2Cl$ est un liquide bouillant à 127°.

2° *Chlorhydrine* β ou *propylique* $H_3C - CHCl - CH_2(OH)$. Elle s'obtient de la précédente à la suite des réactions suivantes :

a) Action de $H_3C - CH(OH) - CH_2Cl$ sur $K\text{-}C_2H_3O_2$ sec à chaud, Formation de *mono-acétine isopropylique* $H_3C - CH(OH) - CH_2(C_2H_3O_2)$. Éb. 184°.

b) Action de H Cl, gaz, à chaud, sur la mono-acétine précédente d'où $CH_3 - CHCl - CH_2(C_2H_3O_2)$. Éb. 153-154°.

c) Saponification de cette *chloro-acétine* par l'alcool méthylique en excès, d'où $CH_3 - CHCl - CH_2(OH)$.

Cette *mono-chlorhydrine* β bout à 133°-134°.

Entre ces deux *chlorhydrines propyléniques* il y a les mêmes rapports de volatilité qu'entre les deux *dichlorhydrines glycériques* qui en sont les dérivés monochlorés.

$H_3C - CH(OH) - CH_2Cl$	Éb. 127°	> + 6°
$H_3C - CHCl - CH_2(OH)$	133°	
$ClCH_2 - CH(OH) - CH_2Cl$	Éb. 176°	> + 6°
$ClCH_2 - CHCl - CH_2(OH)$	182°	

B. — Liaisons et transformations réciproques.

C'est l'*oxyde de propylène* $\underset{\diagdown\ O\ \diagup}{H_2C - CH} - CH_3$ (Éb. 35°) qui relie l'une à l'autre ces deux chlorhydrines; elles le fournissent l'une et l'autre sous l'action des alcalis caustiques.

Avec H Cl, cet oxyde fournit la chlorhydrine α dont la transformation en chlorhydrine β vient d'être indiquée.

C. — Différenciation chimique. Diverses méthodes s'offrent pour différencier ces chlorhydrines, en tant qu'alcool et en tant qu'éther haloïde. L'auteur expose celle qu'il a suivie, se réservant de revenir plus tard sur les autres. Cette méthode est l'oxydation, soit *nitrique*, soit *chromique*.

Lors de ces oxydations, le noyau *tricarboné* C_3 est parfois

conservé, d'où avec la *chlorhydrine* α *des produits acétoniques*, avec la *chlorhydrine* β, des composés *acides* tricarbonés.

D'autres fois le noyau C_3 est brisé et désagrégé, d'où avec le composé α de l'acide chloro-acétique $Cl\,CH_2 - CO(OH)$ et avec le composé β de l'acide acétique $H_3C - CO(OH)$.

Voici quelques indications complémentaires :

Chlorhydrine α. Avec l'acide nitrique à froid, production de $H_3C - CO - CH\,Cl\,(NO)$, *acétone chloro-nitrosée*, solide cristallisable, fusion 110°.

Avec HNO_3, à chaud, acide *acétique* $CH_3 - CO(OH)$ et acide *mono-chloro-acétique* $Cl\,CH_2 - CO(OH)$.

Avec le mélange chromique, formation d'*acétone monochlorée* $Cl\,CH_2 - CO - CH_3$ et ultérieurement d'acides acétique et chloro-acétique.

Chlorhydrine β. Avec l'acide nitrique, formation d'acide α *chloro-propionique* $H_3C - CH\,Cl - CO(OH)$, liquide (Éb. 185°) et d'acide acétique.

Avec le mélange chromique formation d'acides formique et acétique.

Ces oxydations par l'acide nitrique sont aussi accompagnées de la formatiou d'acide oxalique.

Pour satisfaire les esprits rigoureux, M. Louis Henry déclare que si ces faits démontrent que les chlorhydrines obtenues comme il a été indiqué renferment l'une un *alcool secondaire*, l'autre un *alcool primaire*, ils ne démontrent pas que ces chlorhydrines ne renferment que cela et sont des produits homogènes. Le seul fait positif à invoquer, c'est l'impossibilité d'obtenir la *chloro-nitroso-acétone* $CH_3 - CO - CH(NO)\,Cl$ avec la chlorhydrine β.

Selon M. Louis Henry, les réactions qui donnent naissance à ces deux alcools chlorés si *fonctionnellement* différents l'un de l'autre, sont de celles où l'on peut admettre la formation d'un produit unique, eu égard à la facilité et à l'énergie du processus chimique dans lequel elles consistent.

M. Louis Henry ajoute en terminant que rien n'autorise à admettre des transpositions atomiques dans la série des réactions qui conduisent du composé α au composé β.

M. Louis Henry entretient encore incidemment la section de deux autres objets :

a) La fabrication et le prix actuels des composés éthyléniques.

b) Le phénomène de la *liquéfaction des corps solides dans le vide,* comme il en est parlé dans le *Traité de chimie élémentaire de Lavoisier* (Paris, 1789) et le rapport qui a été fait de cet ouvrage à l'Académie des Sciences de France, par d'Arcet et Berthollet, le 4 février 1789.

Il se propose de revenir dans une séance ultérieure sur ces deux questions, intéressantes à des titres divers, alors que les informations qu'il aura receuillies seront plus complètes.

Le P. Schaffers décrit *un nouvel appareil de démonstration pour les lois des gaz et des vapeurs.* Cet instrument est destiné surtout aux établissements qui ne disposent que de ressources modestes; mais les institutions mieux pourvues, qui possèdent les divers appareils nécessaires pour établir les lois en question, y trouveront pour certaines expériences des facilités nouvelles. La cuvette profonde, en particulier, si peu maniable d'ordinaire, y est avantageusement remplacée. Il en est de même de l'appareil de Gay-Lussac pour la tension des vapeurs dans les gaz.

Le principe dérive de celui de l'appareil de Weinhold pour les tensions de vapeur à diverses températures. C'est aussi celui de l'appareil de Frick pour la comparaison des tensions de vapeur de divers liquides à la même température.

Trois tubes en verre de 84 centim. de longueur et de 0,6 centim. de diamètre intérieur sont disposés verticalement le long d'une planchette graduée munie d'un fil à plomb. A leur pied ils sont réunis, par des bagues de gros caoutchouc et de fortes ligatures, à trois tubes courts de même diamètre soudés à une branche transversale, au delà de laquelle le tube du milieu se continue par un prolongement rectiligne, fermé en bas par un robinet et portant latéralement un bout de tube sur lequel est fixé un tuyau flexible en caoutchouc. Ce tuyau, long de 1,10 mètre environ, est fixé d'autre part à un ballon d'un demi-litre, suspendu derrière la planchette graduée, et mobile comme dans les pompes à mercure, mais de manière à pouvoir descendre jusqu'à une cinquantaine de centimètres au-dessous de la branche transversale. L'assemblage des trois grands tubes au moyen de bouts de caoutchouc a pour but de faciliter leur nettoyage, le cas échéant. Si on ne tient pas

à cet avantage, on peut les souder directement, ou encore les mastiquer sur une fourche en fer disposée comme la fourche en verre.

Ce qui permet d'utiliser cet appareil pour de nombreuses expériences différentes de celles qu'avaient en vue Frick et Weinhold, c'est avant tout la disposition de la partie supérieure des trois tubes verticaux. Les deux extrêmes portent des robinets ordinaires surmontés d'un entonnoir de 5 centim. de hauteur, dont la section s'évase jusqu'à 1,5 centim. de diamètre.

Celui du milieu a un robinet spécial, au-dessus duquel s'élève un entonnoir, et à côté de lui un petit tube coudé. La clef de ce robinet est percée obliquement de deux lumières parallèles qui, par une rotation de 180 degrés, mettent successivement en communication avec l'intérieur du grand tube l'entonnoir et le petit tube coudé (fig. 1 de la note p. 141). C'est une disposition bien connue dans l'étude des gaz; elle tient lieu ici du robinet à gouttes de l'appareil de Gay-Lussac. Le gros tube porte en outre, à partir du robinet, une graduation en centimètres cubes.

Pour mettre l'appareil en service, on commencera par remplir la boule de mercure, les robinets supérieurs étant tous ouverts, puis en relevant le réservoir, on fera pénétrer le mercure jusqu'au-dessus des robinets. Si l'on constate que le verre n'est pas suffisamment sec, on y versera un peu d'acide sulfurique, d'alcool, d'éther (*), qu'on fera descendre jusqu'au bas des gros tubes pour les reprendre ensuite dans les entonnoirs au moyen de pipettes, de papier à filtrer, etc.

Voici maintenant les expériences auxquelles se prête l'instrument. Si l'on ferme un des robinets pleins de mercure, on obtient un *tube barométrique,* d'autant plus commode à manier que s'il y reste une goutte d'eau ou une bulle d'air, on peut toujours s'en débarrasser en relevant le mercure au-dessus du robinet. Si le robinet reste ouvert, on a un *manomètre* à air libre. Si, en même temps, on ferme un autre tube après y avoir introduit un peu d'air; on a un appareil tout préparé pour la vérification de la *loi de Mariotte* dans le cas des pressions inférieures à 1 1/2 atmosphère.

(*) L'éther dissolvant la graisse, il faudra, si l'on s'en sert, prendre comme lubrifiant de la glycérine.

Pour cette dernière expérience, il conviendra de se servir du tube central, dont la graduation fera connaître les volumes occupés par le gaz. Le tube ouvert marquera les pressions correspondantes, tandis que le troisième, employé comme baromètre, donnera la pression atmosphérique du moment. Pour opérer entre 1 et 1 1/2 atmosphère, on fera le remplissage en ramenant le niveau du mercure au pied de l'échelle; au-dessous de 1 atmosphère, au sommet (*).

Pour les lois de la *tension des vapeurs saturantes* ou *non saturantes, dans le vide,* il suffira de verser, dans les entonnoirs, les liquides correspondants et d'en admettre au moyen du robinet la quantité convenable. Ce réglage est des plus faciles, puisqu'il suffit, pour expulser un excès de liquide, introduit par accident, d'élever le niveau du mercure en remontant le réservoir. Un des tubes

(*) Voici un exemple pour chacun des deux cas.

1° En ouvrant les robinets de deux des tubes on y ramène le mercure au 0 de l'échelle. On lit alors la pression barométrique du moment, marquée par le troisième tube, par exemple 760 millim., ainsi que le volume occupé par l'air dans le tube central, par exemple 30 centim. cubes. On ferme le robinet de celui-ci et on remonte le réservoir jusqu'à ce que le volume soit réduit aux 2/3, c'est-à-dire à 20 centim. cubes. Donc la pression doit être les 3/2 de la pression atmosphérique. On constate en effet que dans la branche restée ouverte le mercure s'élève maintenant à 380 millim. au-dessus du niveau dans la branche où l'on comprime l'air.

2° Le premier tube sert encore de baromètre, le second est fermé quand l'air y occupe un volume de 2 centim. cubes, par exemple, le troisième est employé comme manomètre à air libre. Supposons que dans le deuxième, et par suite aussi dans le dernier, le niveau soit à 5 centim. du sommet. Abaissons le réservoir de manière à doubler le volume. Le niveau dans le tube de Mariotte sera à 10 environ, dans l'autre à 48. La pression sera donc mesurée par 76 — 38 centim. ou 1/2 atmosphère. Triplons le volume : nous aurons les hauteurs 15 et 66. Différence : 51 ; donc pression réduite des 2/3. On aurait de même, quadruplant le volume, les hauteurs 20 et 77. Donc pression propre de l'air enfermé 76 — 57 = 19 ou 1/4 d'atmosphère. En même temps le baromètre commence à marquer : il est à 1. A partir de ce moment il remplacera le manomètre. Mais pour éviter la rentrée de l'air par celui-ci, il faudra d'abord remonter le réservoir de manière à le transformer aussi en baromètre.

On continuera alors ainsi :

Tube de Mariotte,	25,	baromètre	10,	pression	15 centim. =	1/5	atmosphère.
»	30	»	17	»	13	1/6	»
»	35	»	24	»	11	1/7	»

etc. jusqu'à ce que le réservoir soit à fond de course.

servira de baromètre de comparaison ou bien d'indicateur du niveau libre, si le robinet est ouvert. La graduation du tube central permettra aussi de démontrer que les vapeurs éloignées de leur point de saturation suivent la loi de Mariotte.

On étudiera de la même façon les *tensions de vapeur des solutions* et celles des *mélanges de vapeur*.

Enfin la *tension des vapeurs dans un gaz* pourra être étudiée au moyen du tube à robinet double. On y introduira d'abord par le tube coudé de l'air bien sec; puis, en tournant la clef de 180°, on y fera passer lentement le liquide de l'entonnoir (fig. 1).

Avec un peu d'habitude, il est très facile d'en régler la quantité (*). Il faudra seulement prendre la précaution d'abaisser le niveau du mercure avant l'introduction du liquide, pour éviter à coup sûr la sortie de bulles d'air. Dans cette expérience la

(*) Il n'est pas inutile de remarquer que l'appareil est exempt d'un grave défaut de celui de Gay-Lussac, à savoir la présence d'air non dépouillé de vapeur d'eau dans l'intervalle des deux robinets et dans ceux-ci. Si, pour quelque expérience spéciale, on tenait à n'introduire le liquide que goutte à goutte, il suffirait de conduire le canal correspondant à la communication avec l'entonnoir de manière qu'il ne soit pas dans le plan diamétral de la

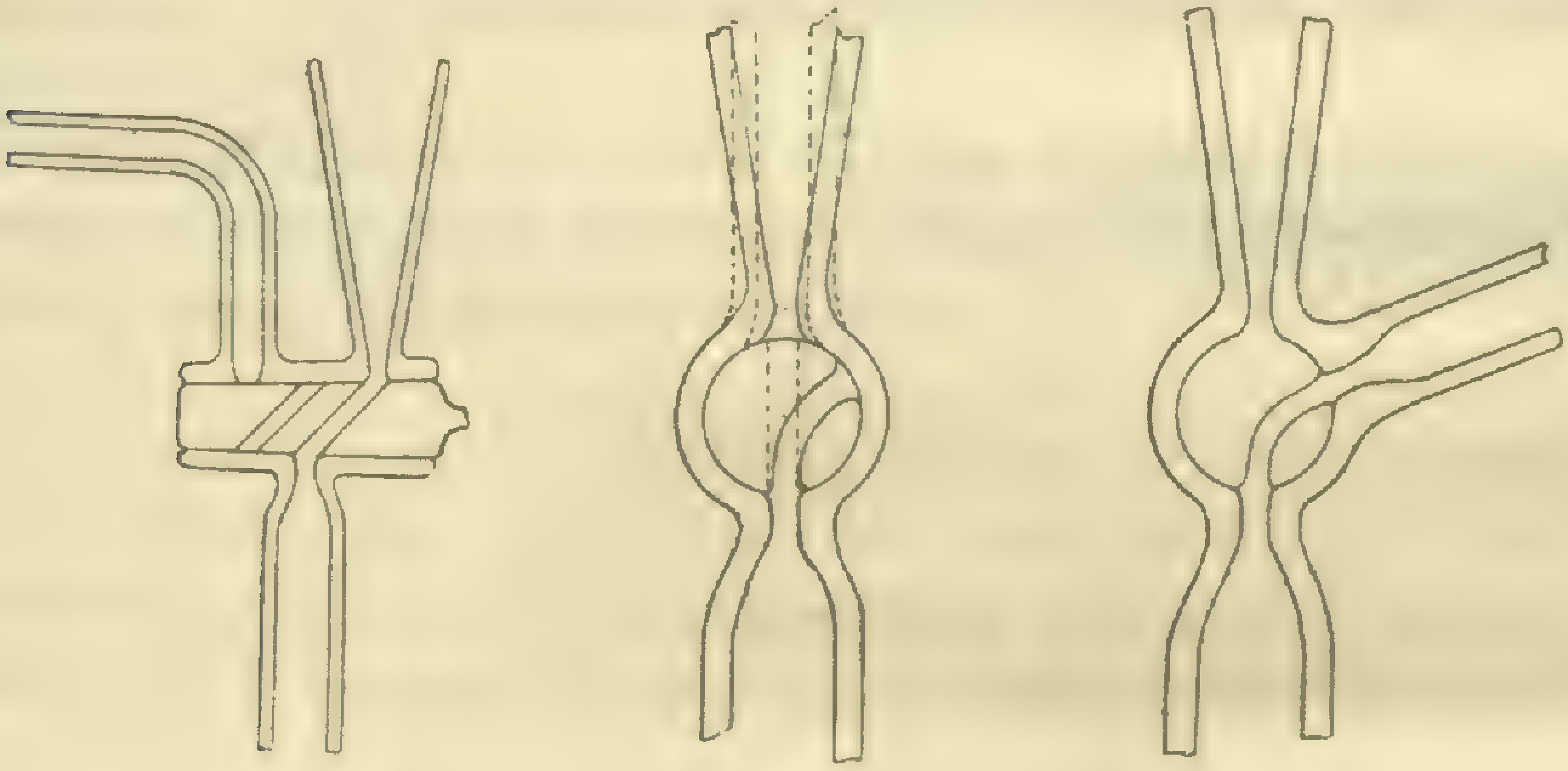

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

clef (fig. 2). On ferait alors passer le contenu de l'entonnoir dans le tube par de petits balancements alternatifs du robinet. Une clef double ordinaire, à deux canaux diamétraux, conduirait encore au même résultat, à la condition de reporter l'orifice de l'entonnoir sur le côté du boisseau. Enfin on peut même se contenter, du moins dans les robinets métalliques, d'une clef à un seul canal (fig. 3), qui doit être excentrique, en replaçant l'entonnoir au sommet du boisseau, et le tube coudé sur le côté. Des robinets de ce genre seraient très utilement employés en chimie.

quantité de gaz sec introduite doit être suffisante pour que la hauteur qu'elle occupe dans le tube, à la pression atmosphérique, soit supérieure à la hauteur de la colonne qui mesurera la tension de la vapeur. Faute de prendre cette précaution, on s'exposerait à voir le mercure dépasser, dans celui des tubes qui sert de manomètre, le robinet et l'extrémité de l'échelle.

Veut-on, en outre, montrer la *dépendance de la tension vis-à-vis de la température?* Dans ce cas, les tubes devront pouvoir être enfermés dans un manchon en verre à circulation de vapeur, d'eau chaude, d'air chaud, etc. Les règles seront donc en verre opale, et munies d'un ou deux thermomètres. Le bas des tubes, sauf 4 centim. réservés pour les raccords en caoutchouc, sera pris dans un disque de liège épais fixé aux montants en bois et muni d'un ajutage d'écoulement pour le fluide de chauffage. Le haut sera serré légèrement dans une sorte de râtelier, supporté également par les montants en bois. Ce râtelier sera dévissé quand on coiffera les tubes de l'enveloppe de chauffage, et remplacé par un collier qui soutiendra cette enveloppe.

Dans cette expérience, le tube central restera ouvert, un des deux autres contiendra de la vapeur sèche, l'autre la même vapeur, en présence de son liquide.

M. Willame expose à grands traits un mémoire analytique qu'il présente à la section *Sur la capacité uniformément répartie.* MM. Witz et Delemer sont nommés commissaires pour l'examen de ce mémoire.

Troisième section

Mardi, 21 avril 1903. Après un hommage ému à la mémoire de M. de la Vallée Poussin, M. le Président entretient la section de la question de concours.

Un mémoire a été envoyé à la section, en réponse à la question de concours : “ On demande de nouvelles recherches sur les insectes tertiaires. „ Pour permettre à l'auteur du mémoire de tenir compte dans son travail de quelques observations présentées par

les rapporteurs, la section décide de maintenir au concours cette question proposée en 1901. Ensuite, elle propose la nouvelle question suivante : *Étude des caoutchoucs africains au point de vue scientifique et commercial* (délai jusqu'au 1er octobre 1904).

Sur l'avis favorable : 1° de M. le chanoine de Dorlodot et du R. P. Schmitz, S. J.; 2° du R. P. Deschamps, S. J. et de M. F. Meunier; 3° de M. de Lapparent et du R. P. Schmitz, la section vote la publication aux Annales des mémoires présentés : 1° par M. le chanoine Bourgeat : *Influence des plis hercyniens sur le Jura ;* 2° par M. l'abbé Kieffer : *Description de trois genres nouveaux et de cinq espèces nouvelles de la famille des* Sciaridae; 3° par M. le Cte F. de Montessus de Ballore : *Relations géologiques des régions stables et instables du Nord de l'Europe.*

A propos de son récent voyage au Spitzberg, M. J. Leclercq signale l'observation qu'il a faite d'un arc-en-ciel blanc. Il insiste sur le fait qu'il a pu constater la disparition de la baleine des côtes de la Norvège, et sa présence en assez grand nombre près de la côte occidentale du Spitzberg. Il résulte des renseignements recueillis sur place que les morues ont émigré en même temps que les baleines. Les innombrables petits poissons que celles-ci chassaient devant elles en pénétrant dans les fjords ayant disparu, la morue a dû aller chercher sa nourriture dans d'autres parages. On estime que la pêche de la morue aux îles Lofoden ne représente plus que le quart de ce qu'elle était jadis.

M. De Wildeman attire l'attention des membres de la section sur un curieux bananier, récolté dans les environs de la Mission de Bergeyck-Saint-Ignace (Kisantu), dans le Bas-Congo, par le Frère J. Gillet, S. J. Il montre un régime de fleurs desséchées de cette curieuse variation dans lequel les fleurs, au lieu d'être disposées en glomérules à l'aisselle d'une bractée et de former des mains comme on a dénommé ces glomérules, sont disposées le long de l'axe en forme de spirale sur deux rangs sans laisser de vide entre elles. Ce mode de disposition est des plus curieux. Les fleurs sont protégées par une bractée épaisse, coriace, plusieurs fois plus longue que les fleurs qui est continue depuis la base du rachis jusqu'au sommet et paraît se détruire par fragments, de manière à

découvrir les fruits. Ceux-ci appartenant au type de la banane comestible sont trigones, mesurent une vingtaine de centimètres de long et 4,5 centimètres de large, ils sont très bons à manger.

Par cet ensemble de caractères particuliers, ce bananier aurait pu constituer le type d'un genre nouveau, malheureusement cette fructification étrange est un cas tératologique, toutes les fleurs sont irrégulières et ont souvent leurs étamines transformées en fleurs avortées.

Ce cas tératologique se transmet par les rejets, M. De Wildeman a reçu à deux reprises des inflorescences à des stades différents de développement, qui présentaient la même modification.

Cette curieuse variation mérite de fixer l'attention des botanistes et au point de vue de la culture elle peut avoir certaine importance à cause des gros et nombreux fruits auxquels elle donne naissance. On ne sait encore si ce bananier s'est développé accidentellement dans le Bas-Congo ou s'il y a été introduit par des pieds provenant d'autres régions tropicales. Le Frère J. Gillet a d'ailleurs introduit au Congo diverses espèces de bananiers comestibles et industriels, par exemple le *Musa textilis* ou " chanvre des Philippines „ qui s'acclimate très bien et se reproduit facilement, même de graines.

M. De Wildeman signale aussi à propos de bananier la curieuse forme observée l'année dernière par M. Hunger à Java où elle était désignée sous le nom de " Pisang samboe ou Pisang sewoe „, ce qui signifie " Bananier millier „.

Le régime peut en effet comporter plus de 3000 fruits, mais ces fruits étaient comme dans tous les bananiers réunis par mains, chaque main protégée par une bractée

Le R. P. Bolsius adresse à la section la photographie d'un nid de pigeons construit tout entier d'aiguilles à coudre.

Le R. P. Schmitz présente la cinquième édition de l'*Abrégé de géologie* de M. de Lapparent, dont il a donné un compte rendu dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 avril 1903.

Il est donné lecture d'une étude de M. Eug. Beauvois, *La fable des Amazones chez les indigènes de l'Amérique précolombienne.* Le R. P. J. Van den Gheyn, S. J. et M. Jules Leclercq sont nommés commissaires pour l'examen de ce travail.

Mercredi, 22 avril 1903. M. l'abbé M. Lefebvre présente des observations nouvelles sur les glandes salivaires de *Nepa cinerea.* La section vote l'impression de ce travail dans les ANNALES (voir la seconde partie).

M. l'abbé Kieffer présente deux mémoires : 1° *Nouvelles Cécidomyides Xylophiles ;* 2° *Étude sur les Cécidomyides gallicoles.* Ces mémoires sont envoyés à l'examen de M. l'abbé M. Lefebvre et de M. F. Meunier.

La section, après en avoir pris connaissance, vote la publication dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, des travaux suivants : *Exode des araignées,* présenté par M. le Prof. Fabre, et *Le Transafricain,* présenté par M. le Mis de Nadaillac. On les trouvera dans la livraison du 20 juillet 1903.

La section transmet également à la REVUE une note de M. de Kirwan *Sur le genévrier millénaire monosperme,* et un travail du même auteur intitulé : *De la restauration par la mise en défends des montagnes pastorales.*

Jeudi, 23 avril 1903. M. André Dumont fait l'historique de la découverte du bassin houiller de la Campine, et montre les importants résultats obtenus jusqu'à ce jour. Après avoir évoqué le souvenir des recherches de Lambert, il signale qu'on considérait comme une utopie, dans les milieux géologiques, l'existence d'un bassin houiller campinois, indépendant de celui de Liége, et si l'on se trouve aujourd'hui devant le fait accompli, on le doit à l'obstination des mineurs, qui ont eu la foi rude.

Le bassin houiller est reconnu depuis la Meuse jusqu'à Santhoven. Plus à l'ouest, on ne sait rien. La superficie reconnue jusqu'à ce jour est de 150 000 hectares, soit l'étendue des concessions actuelles en Belgique ; mais les couches n'ont pas l'allure plissée des gisements exploités au sud de l'île de Brabant, d'où cette conséquence, que les concessions, qui n'ont guère que 400 hectares dans les charbonnages de nos divers bassins, devront atteindre 2000 hectares dans le Limbourg et 4000 hectares dans la province d'Anvers. Le terrain houiller s'enfonce plus rapidement vers l'ouest que vers le nord, et ici il est beaucoup moins aquifère et moins boulant que vers le sud.

Le charbon est de bonne qualité; il renferme 42 % de matières volatiles. Il a été rencontré à 880 mètres de profondeur à Eelen, à quelques kilomètres au sud de Maeseyck, et à 530 mètres à Asch, où se trouvent sept couches de 42 centimètres d'épaisseur.

En terminant, M. Dumont ajoute qu'il a pratiqué trente sondages, que les opérations sont loin d'avoir pris fin, mais qu'on peut proclamer dès l'instant que la Belgique possède en Campine de grosses réserves de combustible pour l'avenir.

Le Président de la section rend hommage à l'esprit de persévérance de M. A. Dumont et le félicite des remarquables résultats auxquels il est arrivé.

La communication de M. A. Dumont est complétée par quelques considérations géologiques présentées par M. Denoël et par le R. P. Schmitz, S. J., qui déclare que, au point de vue de la flore et de la faune, les recherches dans le houiller du Limbourg n'ont rien donné qui ne fût connu.

Le mémoire présenté par M. le chanoine Bourgeat *Sur la brèche de Bachant et sur les formations analogues,* fait l'objet de quelques remarques de la part du R. P. Schmitz, qui en demande l'insertion aux Annales de la Société. La section se rallie à cette proposition.

La race Alpine fait l'objet de la communication ci-jointe de M. l'abbé Claerhout.

Le problème de l'origine des races Européennes semblait résolu par les admirables découvertes de la linguistique; on avait constitué le tronc aryen, dont on voyait se détacher les différents rameaux des peuples indogermaniques, apparentés par leurs langues respectives.

Les recherches des anthropologistes ont bouleversé ce beau système et tout remis en question; actuellement toute une école n'admet plus l'existence de la race aryenne, tandis que d'autres savants persistent à rejeter les données de l'anthropologie et à rester tributaires, pour l'ethnologie, de la science du langage (*).

(*) Otto Bremer, *Ethnographie der Germanischen Stämme,* Strasburg, K. J. Trübner, 1900.

Voici la conception qu'on se fait actuellement des races, qui ont peuplé l'Europe; on les ramène à trois types distincts. Nous avons d'abord le type Nordique; il est confiné dans le nord-ouest de l'Europe et a son centre de dispersion en Scandinavie; c'est un type dolichocéphale; la figure est longue, les cheveux sont blonds, les yeux sont bleus et la taille est élevée.

Le second type est le type Alpin; il a son centre de dispersion dans les Alpes et se retrouve dans l'Europe centrale; il est brachycéphale; les yeux et les cheveux sont plus foncés, à mesure qu'on s'avance vers le sud, où nous rencontrons le troisième type, le type Méditerranéen, appelé ainsi parce que cette race occupe les bords de la Méditerranée. Il est dolichocéphale comme la race Nordique, mais les cheveux et les yeux sont très foncés, bruns ou noirs.

On peut consulter au sujet de l'ethnologie de l'Europe le magistral ouvrage de M. Ripley : *The Races of Europe,* édité à Londres en 1900. On y trouvera, avec la bibliographie complète, l'état actuel de nos connaissances sur les races, qui habitent l'Europe.

Occupons-nous un moment de la race Alpine; nous pouvons l'étudier sur notre sol, parce que nous avons sous les yeux le mélange des représentants du type Alpin et du type Nordique.

Nous voulons faire observer que M. Ripley n'a pas réussi à fixer aussi nettement le type Alpin que le type Nordique et le type Méditerranéen.

Le seul caractère qui le distingue et qui se maintient, c'est la brachycéphalie; les autres caractères affectent une grande mobilité.

M. Kraitschek s'est demandé, dans le CENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE (*), si M. Ripley a le droit d'isoler ce type, puisqu'il confond dans une même race des individus à figure longue et à face ronde et qu'il ne détermine pas clairement la pigmentation.

M. Ripley a réuni dans un tableau les traits caractéristiques des

(*) CENTRALBLATT FÜR ANTHROPOLOGIE, ETHNOLOGIE UND URGESCHICHTE, VI. JAHRGANG, 1901, Iena, p. 321.

trois races (*); pour la race Alpine, il désigne les cheveux comme blonds ou châtains; nous ne pouvons admettre les cheveux blonds comme un caractère de la race Alpine; quand ils sont alliés à d'autres caractères de cette race, il est certain qu'ils sont le résultat du métissage entre deux races. M. Ripley indique les yeux comme gris ou couleur-noisette. Quand il s'agit de justifier ces tons, il s'exprime assez vaguement : “ La couleur de la chevelure et des yeux est plutôt neutre, en tous cas intermédiaire entre la race Nordique et la race Méditerranéenne. Il y a une tendance vers les yeux gris et la chevelure est souvent brune. Sous ce rapport, cependant, il existe une grande variété et la transition du nord au midi s'établit par degrés (**). „

Nous avons voulu soumettre les types de la race Alpine à une petite enquête et nous avons porté nos investigations sur 100 enfants de notre école de Pitthem, choisis au hasard. Nous avons rencontré parmi eux, 25 représentants de la race Nordique.

Les 75 enfants qui paraissent appartenir à la race Alpine, se partagent comme suit, pour la couleur de la chevelure : 32 enfants ont les cheveux châtains; les autres ont la chevelure plus foncée; quelques-uns même s'approchent du noir. Il y a lieu d'observer, que nous passons par tous les tons, du clair au noir; non seulement on rencontre des nuances de plus en plus foncées en descendant du nord au sud de l'Europe, mais on peut signaler les mêmes couleurs en concentrant les observations sur un groupement, tel que nous venons de le circonscrire.

Pour la couleur des yeux, nous avons compté 14 types, aux yeux gris; les enfants, aux yeux couleur-noisette, semblent représenter un type distinct : nous n'en avons rencontré que 13. Que faut-il dire de la couleur des yeux des 48 enfants qui restent? La couleur paraît un mélange de teintes grises, brunes ou verdâtres et c'est tantôt le vert, tantôt le brun, tantôt le gris qui domine les autres nuances.

Que résulte-t-il de cette analyse qu'on pourrait répéter sur maint groupement d'enfants ou d'adultes? Faut-il rejeter la classification des trois races européennes, que n'admet pas l'éminent

---

(*) W. Ripley, *Opus laud.*, p. 121.
(**) *Ibid.*, p. 124.

anthropologiste suédois, M. Retzius, sans la remplacer cependant par un autre système (*)?

Ne peut-on soupçonner que la race Alpine comprend le mélange de deux ou trois races, qui étaient autrefois aussi distinctes que le type Nordique par exemple?

Ne serait-on pas enclin à souscrire aux conclusions de M. Ammon, un des maîtres de la science, qui a étudié à fond les populations du grand-duché de Bade?

Voici comment il s'exprime :

„ Tous les peuples de la terre sont le résultat de croisements. La supposition que l'on puisse se trouver en présence de types purs est basée sur le fait que l'on rencontre des individus, qui paraissent réunir les caractères, que l'on attribue aux races primitives (**). „

Quelle est l'origine de la race Alpine?

Voici le résumé des théories de M. Ripley, au point de vue ethnique : les couches les plus anciennes et les plus profondes de l'Europe occidentale étaient extrêmement dolichocéphales; la race Méditerranéenne paraît s'en rapprocher le plus; c'était vraisemblablement un type africanoïde qui, dans le nord de l'Europe, est devenu blond par l'influence du milieu et par l'effet de la sélection; à l'âge néolithique se sont introduites en Europe des populations brachycéphales, dont les affinités sont nettement asiatiques : le type Alpin représente encore aujourd'hui cet élément intrus.

Pour ce qui concerne notre patrie, nous devons avouer que les théories de M. Ripley sont pleinement confirmées par les découvertes de l'anthropologie préhistorique. On connaît les néolithiques de la Meuse, si bien étudiés par M. Fraipont, qui les a désignés sous le nom de types de Furfooz (***).

Au commencement des temps néolithiques sont venus se juxtaposer et se superposer par immigration, aux dolichocéphales primitifs des races brachycéphales. De ces invasions proviennent

---

(*) Centralblatt für Antropologie, Ethnologie und Urgeschichte, VI. Jahrgang, 1901, p. 168.

(**) L'Anthropologie, t. XIII, Paris, 1902, p. 728.

(***) Julien Fraipont, *Les Néolithiques de la Meuse*, Bruxelles, 1900, pp. 77 et suiv.

la race de Grenelle en France et le type sous-brachycéphale de Furfooz, résultat du métissage des dolichocéphales primitifs et des brachycéphales nouveau venus.

M. A. Proost signale l'importance de plus en plus grande que prennent en Belgique les écoles ménagères agricoles, et fait remarquer combien les sciences naturelles y sont nécessairement en honneur. Ces écoles vont probablement servir de modèle à des institutions analogues en France et au Grand-Duché de Luxembourg.

M. Proost montre aussi les efforts faits pour doter le pays d'une bonne carte agronomique, et la grande utilité du recensement agricole *annuel* entrepris par le ministère de l'agriculture. Des exemplaires du recensement de 1901 sont mis à la disposition des membres de la section.

Une étude sur les *Acalyptères de l'ambre* est présentée par M. F. Meunier. M. A. Proost et le R. P. Bolsius, S. J. sont priés de faire rapport sur ce travail.

M. F. Meunier présente le rapport suivant sur un mémoire présenté par M. l'abbé Kieffer et intitulé *Description de trois genres nouveaux et de cinq espèces nouvelles de la famille des* SCIARIDAE.

Malgré l'importante et minutieuse monographie des *Sciaridae* de feu Winnertz (*) et l'étude relativement recente de E. H. Rübsaamen (**) le savant cécidologue de Bitche a encore trouvé de nouveaux et très curieux *orthorapha* de cette famille. Son tableau synoptique complète celui de Rübsaamen (*loc. cit.*, p. 30-31). Les genres et espèces de ce travail sont décrits très exactement et les dessins de parties d'organes (balancier, ailes) reproduisent bien le détail de la fine morphologie de ces diptères. Qu'il me soit cependant permis de faire une observation dont M. l'abbé J. J. Kieffer sera le premier à apprécier la portée. Dans l'intérêt de la science diptérologique ne ferait-il pas chose utile en donnant des dessins

---

(*) *Beitrag zu einer Monographia der Sciarinen*, VERHANDL. K. K. ZOOL. BOT. GESELLSCHAFT, Wien, 1867.

(**) *Die aussereuropaïschen Tranernücken des Königl. Museums f. naturkunde zu Berlin*, BERL. ENT. ZEITSCHRIFT, Bd. XXXIX, Heft, I, 1894.

de *Peyerimhoffia brachyptera* ♀, de *P. aptera,* dépourvu de balanciers, et de *Sciara membranigera* ♂ dont la structure des haltères, ferait croire à une deuxième paire d'ailes.

Je propose l'impression du travail de M. l'abbé J. J. Kieffer dans les ANNALES de la Société.

La section se rallie à cette conclusion.

M. le Dr H. Lebrun présente à la section quelques données sur l'œuf ovarien chez *Batracoceps attenuatus,* avec démonstration de préparations microscopiques.

Voici un résumé de cette communication.

Depuis que nous avons commencé en 1897 la publication du résultat des recherches que nous poursuivions avec Carnoy, sur le développement de l'œuf des Batraciens, la critique et le contrôle de nos observations ont été faits tant en Belgique qu'à l'étranger. Mais les confirmations de nos résultats nous sont arrivées surtout de l'étranger et de ceux-là même dont nous avions attaqué les conclusions et qui, après contrôle de nos méthodes, se sont ralliés à notre manière de voir. Deux de nos compatriotes au contraire, MM. Van Beneden et Von Winiwarter le maître et l'élève, ont émis sans contrôle, semble-t-il, sans recherches préalables, des critiques plutôt tendancieuses, que nous n'avons pas cru nécessaire de relever.

Nous nous bornerons à citer ici l'appréciation d'un collègue allemand, Wilhem Lubosch : “ Quand, dit-il, Winiwarter affirme que les figures de Carnoy et Lebrun paraissent provenir de préparations desséchées ou en partie mal fixées, c'est une impression que maint observateur aura pu partager de prime abord. Mais, exprimer publiquement cette opinion, sans aucun contrôle sur l'objet même, me semble être un procédé qu'on ne saurait assez blâmer, dans l'intérêt même de toute recherche scientifique. Après m'être familiarisé avec l'objet, je dois dire bien clairement que je n'ai pu découvrir dans les planches VI, VII et VIII, la moindre petite particularité, qui pourrait être prise pour un produit artificiel. „

Lubosch vient de publier un mémoire dans le JENAISCH ZEITSCHRIFT où il expose le résultat des recherches qu'il a entreprises uniquement pour contrôler nos observations sur les Tritons. Feu le pro-

fesseur Born de Breslau avait étudié l'objet avant nous et nous étions arrivés à des conclusions absolument opposées. Sur son conseil, Lubosch a fait une étude comparative de nos méthodes de fixation et de coloration; il a suivi fidèlement la technique nouvelle que j'avais minutieusement décrite, et la conclusion de son travail nous donne gain de cause. Il a étudié 14 ovaires de Triton, et néanmoins il ne peut, dit-il, sans vouloir infirmer l'exactitude de nos observations, se rallier entièrement à notre manière de voir sur un point capital, à savoir la non-permanence des chromosomes à travers toute la vie de l'œuf.

Nous nous réservons de répondre en détail aux objections qu'il soulève à ce sujet, dans le mémoire que nous préparons sur l'histoire de l'œuf de *Batracoceps*. Nous avons entrepris cette histoire dans un double but, apporter et ajouter de nouvelles preuves à celles que nous avons précédemment fournies, et ainsi profiter d'une occasion favorable pour maintenir la légitimité de nos conclusions.

Nos recherches sont suffisamment avancées aujourd'hui pour dire que nous avons retrouvé chez *Batrococeps attenuatus,* plusieurs stades qui démontrent à l'évidence :

1° Que les nucléoles de l'œuf représentent bien l'élément nucléinien de la cellule ;

2° Que le boyau primitif disparait assez rapidement;

3° Qu'à plusieurs stades, très distants les uns des autres dans la vie de l'œuf, l'élément de l'œuf nucléinien est exclusivement représenté dans la vésicule germinative par les nucléoles.

4° Par conséquent la continuité morphologique des chromosomes à travers toute la vie de l'œuf, telle que Weissman et Rückert l'admettent, est *démentie* par les faits.

L'auteur montre ensuite les préparations microscopiques qui justifient ses conclusions.

La section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président d'honneur :	André Dumont.
Président :	Chanoine Bourgeat.
Vice-Présidents :	Marquis de Trazegnies.
	R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Secrétaire :	F. Van Ortroy.

Quatrième section

Mardi, 21 avril 1903. La quatrième section avait porté à son ordre du jour une discussion sur le *fœticide médical.* Cette question soulève des problèmes de la plus haute gravité dont il importe que le médecin possède la solution, s'il veut mettre sa conduite dans l'exercice de sa profession en harmonie avec sa conscience de chrétien. Les derniers progrès de la science obstétricale d'une part, les récentes décisions de la cour de Rome de l'autre, donnaient à cette étude une véritable actualité.

Vu l'importance des débats, la section avait convié à cette réunion des personnes même étrangères à la Société, médecins et ecclésiastiques. Parmi les premiers se trouvaient M. le professeur Hubert, de l'Université de Louvain, MM. les professeurs Delassus, Lemière, Lavrand, des Facultés catholiques de Lille, et des membres du corps médical de Bruxelles et de la province.

Le Président de la section, M. le D^r Faidherbe, a donné d'abord la parole à M. le D^r Ch. Van Aubel, directeur de la Maternité Sainte-Anne à Bruxelles, pour résumer le rapport préliminaire qu'il avait rédigé sur la question du fœticide, examinée au point de vue médical.

Le R. P. Vermeersch, professeur de théologie morale au Collège de la Compagnie de Jésus à Louvain, l'a ensuite exposée au point de vue théologique et moral et a fait connaître les décisions portées à ce sujet par le Saint-Office.

Une discussion intéressante s'en est suivie. M. le professeur Hubert, avec la haute compétence qui lui appartient, a fait des déclarations bien nettes, conformes à l'enseignement que son éminent père et lui ont toujours professé sur cette matière. Son discours, fort applaudi, a fait sur l'assemblée une profonde impression.

MM. les professeurs Delassus, Lemière, Lavrand, ont envisagé les côtés de la question qui, naguère encore, laissaient des doutes sérieux dans l'esprit de plus d'un praticien, et semblaient autoriser des divergences d'attitude assez graves. Un échange d'explications a eu lieu, sur ces points, entre ces messieurs et le R. P. Vermeersch.

M. le Dr Loontjens, de Bruxelles, et M. le chanoine Boulay, de la Faculté des sciences de Lille, ont également pris part à cette discussion, dont les conclusions seront publiées plus tard dans les ANNALES.

Il a été impossible d'épuiser en une seule séance l'étude d'un sujet aussi complexe; la section a donc décidé de la poursuivre ultérieurement, en se limitant cette fois à la partie exclusivement médico-chirurgicale.

Cinquième section

Mercredi, 22 avril 1903. M. Fernand Deschamps expose et critique *Les théories sociales du physiocrate Mercier de la Rivière.*

Jeudi, 23 avril 1903. M. Édouard Van der Smissen fait une communication sur *La baisse de l'argent et l'Union latine.* En voici le résumé.

La chute récente de la valeur commerciale de l'argent met-elle l'Union latine en péril ?

La dernière fois que la convention monétaire qu'il est d'usage d'appeler l'Union latine a été renouvelée, à la fin de 1885, elle ne l'a été que pour cinq années. Depuis le 1er janvier 1890, elle se survit grâce à la clause de tacite reconduction. Mais il dépend de chacun des États intéressés de provoquer la dissolution de l'Union par une simple déclaration unilatérale. Du point de vue juridique la vie de l'Union tient à un fil.

L'Union latine a passé par des phases d'existence distinctes, et même caractéristiques. L'Union de 1865 est bimétallique. Celle de 1878 établit, en suspendant toute frappe d'écus, un régime d'expectative qui s'est trouvé être un régime de transition. L'Union de 1885 n'a plus que les apparences du bimétallisme ; les écus n'y conservent le pouvoir libératoire qu'à titre de billets métalliques.

Les actes internationaux de 1885 ont transformé le pacte primitif par l'introduction d'une clause de liquidation relative aux pièces d'argent de cinq francs. Aux termes de l'accord du 6 novembre, chacun des États intéressés reprendra à leur valeur

nominale les écus frappés à son effigie. La Belgique n'a pas adhéré à cette clause nouvelle qui, d'après les prévisions, l'obligerait à rapatrier deux cents millions d'écus que les voies naturelles de commerce ont amené à son hôtel des monnaies à l'état de lingots et ont entraîné ensuite à l'état de disques monétaires dans la circulation française. Pourtant après s'être retirée de l'Union latine la Belgique y est rentrée à la faveur de l'acte transactionnel du 12 décembre : aux termes de cet arrangement elle n'aura à rembourser que la moitié du solde d'écus dont après une compensation préalable la France restera détentrice lors de la liquidation. Pour l'autre moitié elle s'est engagée seulement à n'apporter à son régime monétaire, pendant cinq ans après la dissolution de l'Union, aucun changement de nature à entraver le rapatriement des écus *par la voie du commerce et des échanges.* Comme il s'agira en l'espèce de pièces retirées de la circulation en vertu de la convention même, et qui ne doivent pas être remboursées, leur rapatriement ne s'effectuera pas ou, plus exactement, ne s'effectuerait que si — chose improbable — le change devenait défavorable à la France.

Quel est le rôle actuel des écus de l'Union latine ? Car c'est grâce à la détermination de ce rôle qu'on pourra mesurer les chances de durée future du régime.

Dans la circulation de l'Union latine les écus ont le même rôle que les disques analogues employés dans les autres pays, notamment en Angleterre et en Allemagne, avec cette différence qu'ils ont un pouvoir libératoire illimité.

Dans l'encaisse des Banques ils servent de rempart à l'or, rôle qu'ils n'ont pas dans les pays monométallistes, rôle dans lequel ils n'ont point de substitut. Et c'est là le secret de la vitalité de l'Union latine.

Pourquoi la France poursuivrait-elle la liquidation du régime ? La refonte de ses monnaies d'argent ne s'impose pas. Nulle part en Europe on ne songe à modifier la valeur légale des monnaies analogues qui, tout comme les écus de l'Union latine, sont des billets métalliques ou, si l'on veut, des monnaies fiduciaires pour les trois cinquièmes de leur valeur.

Pourquoi la France voudrait-elle, à défaut de refonte des écus, leur enlever le pouvoir libératoire ? Elle s'obligerait ainsi moralement à alléger la circulation française d'une grande quantité

d'écus. Il faudrait vendre ceux-ci et précipiter encore la chute de l'argent, dont la baisse, sans cette circonstance nouvelle, paraît être proche de ses limites naturelles. L'opération entraînerait un sacrifice de 800 millions de francs au moins, sinon d'un milliard, d'après l'estimation autorisée de M. P. Leroy-Beaulieu. Et la compensation que la France trouverait dans les bénéfices de la clause de liquidation serait assez mince. Ce serait un léger accroissement du stock d'or de la Banque de France, accroissement de peu de durée, puisque la Banque ne pourrait plus garder l'or à l'abri du droit bimétallique qui l'autorise à payer en écus et qui, par là, sauvegarde l'énorme circulation des billets que la Banque a émis. Car c'est le droit bimétallique qui sert de rempart à l'encaisse-or, laquelle encaisse a passé, sous le régime de l'étalon boiteux de moins d'un milliard en 1882 à plus de 2 1/2 milliards.

Il est vrai que la France pourrait garder le régime de l'étalon boiteux après la dissolution de l'Union latine. Mais, dans ce cas, la dénonciation de la convention lui ferait perdre à la fois une hégémonie très appréciable et les avantages commerciaux liés à la facilité que l'Union donnait aux transactions des pays associés. La France, il est permis de le croire, ne réalisera pas le plan de Bismarck qui voulait son isolement commercial et fit adopter pour ce motif l'étalon d'or comme régime de l'Empire allemand, fondé sur les désastres de la France. Car la liquidation en désagrégeant le système monétaire de l'Union latine, aurait pour conséquence presque inéluctable l'abandon du bimétallisme boiteux par l'Italie, la Suisse et la Belgique.

La section procède au renouvellement de son Bureau. M. Ern. Dubois n'accepte pas le renouvellement de son mandat ; sont élus :

Président d'honneur :	Comte F. van der Straten Ponthoz ;
Président :	Léon Joly ;
Vice-Présidents :	E. Leplae ;
	Éd. Van der Smissen ;
Secrétaire :	A. Nerincx.

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 21 AVRIL 1902.

La séance s'ouvre à deux heures, sous la présidence de M. le chanoine Boulay, professeur aux Facultés libres de Lille, président de la Société pendant l'année 1902-1903.

M. P. Mansion, secrétaire général, fait le rapport sur les travaux de la Société pendant l'année 1902-1903. En voici le résumé :

Publications. 1° La Société a fait paraître les trois dernières livraisons du tome XXVI des Annales correspondant à la précédente année sociale 1901-1902, et un fascicule du tome XXVII de l'année 1902-1903 ; l'impression du second fascicule de ce même tome est très avancée.

Le tome XXVI comprend 480 pages, dont un peu plus de 80 renferment des documents statistiques ou historiques. Les 400 pages restantes sont consacrées aux travaux des cinq sections à peu près dans le rapport suivant :

I. Sciences mathématiques	130	pages.
II. Sciences physiques.	72	"
III. Sciences naturelles.	130	"
IV. Sciences médicales . . , ...	50	"
V. Sciences économiques, etc.	18	"

Parmi les travaux présentés dans les sections II, IV, V, un certain nombre ont été publiés dans la Revue des Questions scientifiques.

C'est à la fin de ce volume XXVI des Annales que nous avons pu enfin faire paraître le mémoire du R. P. Deschamps, S. J., couronné en 1900, *Sur les néphridies des gastéropodes prosobranches et pulmonés*. La publication de quelques autres mémoires dont l'impression est décidée depuis assez longtemps est retardée par le manque de ressources, le conseil devant veiller scrupuleusement à maintenir l'équilibre des recettes et des dépenses annuelles.

2° Depuis notre dernière session de Pâques, nous avons publié, comme toujours, quatre livraisons de la Revue des Questions scientifiques, celle d'avril 1902 qui termine le tome LI, puis le tome LII en entier, enfin la première livraison du tome LIII. Nous donnons plus bas la liste des articles principaux de ces quatre livraisons. Nous est-il permis d'y signaler spécialement l'étude difficile, mais extrêmement intéressante du R. P. V. Schaffers sur *Les électrons,* la belle conférence de M. de Lapparent sur l'*Éruption de la Martinique,* l'admirable notice consacrée au *Dr Lefebvre* par le R. P. Thirion, S. J., puis les articles de M. Couturat et du R. P. Peeters, S. J. pour et contre *la langue internationale,* enfin une étude vraiment objective sur la question du *Linceul du Christ.*

Comme les autres années, un peu plus du quart de chaque livraison de la Revue contient des analyses des recueils périodiques relatifs à l'histoire des mathématiques, à l'astronomie, à la physique, à la chimie, à la biologie, à la botanique, à la géologie, à la géographie, à l'hygiène, à l'agriculture et à la sylviculture.

Soixante-six ouvrages y ont été analysés d'une manière détaillée ou sommaire suivant leur importance.

Voici la liste dont il est question plus haut :

I. Mathématiques :

1. *L. Torres.* Machines algébriques.
2. *R. P. Ch. Lambo, S. J.* Une algèbre française en 1484. Nicolas Chuquet.
3. *P. Mansion.* Le centenaire d'Abel.

II. Sciences physiques :

4. *A. de Lapparent.* Atomes et molécules.
5. *R. P. Thirion, S. J.* La pression de la lumière.
6. *R. P. Thirion, S. J.* Alfred Cornu.
7. *P.-P.* Le linceul du Christ.
8. *R. P. Schaffers, S. J.* Le nouvel enseignement scientifique en Angleterre.
9. *G. Van der Mensbrugghe.* Une triple alliance naturelle.
10. *R. P. Schaffers, S. J.* Les électrons.
11. *A. Witz.* L'exposition de Dusseldorf.
12. *Éd. Capelle.* Le congrès de la houille blanche.

III. Sciences naturelles :

13. *É. De Wildeman.* A propos du voandzou et de l'arachide.
14. *J. H. Fabre.* Les halictes.
15. *R. P. G. Hahn, S. J.* Les multiples organes de locomotion des vertébrés.
16. *F. de Montessus de Ballore.* La théorie sismico-cyclonique du déluge.
17. *A. de Lapparent.* L'éruption de la Martinique.
18. *V. Lambiotte.* Le gisement houiller du nord de la Belgique.
19. *L. Banneux.* L'industrie belge des pierres à rasoir.
20. *F. Meunier.* Les travailleurs de la mort.
21. *É. De Wildeman.* Le thé et le café.
22. *R. P. Peeters, S. J.* et *Couturat.* Pour et contre la langue internationale.
23. *M^is de Nadaillac.* L'âge du cuivre.
24. *E. Beauvois.* Les croix précolombiennes chez les Mayas du Yucatan.
25. *R. P. A.-J. Delattre, S. J.* Trois voyageurs vénitiens au XIII^e siècle.
26. *G. Lecointe.* Vers le pôle Sud.

IV. Sciences médicales :

27. *D^r Moeller.* L'immunité contre les maladies infectieuses.
28. *R. P. Thirion, S. J.* Ferdinand Lefebvre.
29. *D^r Warlomont.* Le D^r A. Dumont.

V. Sciences économiques :

30. *Éd. Van der Smissen.* Le chèque et la compensation.
31. *F. Deschamps.* L'école historique du droit et la sociologie.

VI. Philosophie des sciences :

32. *R. P. G. Hahn, S. J.* Toute activité se réduit-elle au mouvement et à la force ?
33. *A. Proost.* La morphologie et les mœurs des animaux au point de vue évolutionniste.
34. *C. de Kirwan.* La science de la vie et ses limites.
35. *A. Gautier.* La vie depuis les phénomènes de l'assimilation jusques à ceux de la conscience.
36. *C. de Kirwan.* La liberté, la morale et la constance de l'énergie.

3° Enfin, nous avons publié une brochure de propagande où nous faisons connaître l'œuvre de la Société dans le passé, les éloges que lui a donnés le Souverain Pontife, ses publications en 1902, etc. Nous engageons vivement tous nos confrères, à la lire et à la répandre. Ils y trouveront de bonnes raisons, croyons-nous, pour être de plus en plus dévoués à l'œuvre à laquelle ils ont donné leur adhésion et des arguments à faire valoir pour lui gagner de nouveaux membres.

Sessions. Notre session de Pâques fut brillamment inaugurée par une conférence originale de M. le commandant Henry *Sur la conquête du Haut-Nil.* Il nous raconta comment il est parvenu, en trois étapes, au prix d'efforts inouïs, lui le premier, avec M. le lieutenant de Renette et quelques soldats congolais, à descendre le Nil de Kero à Khartoum, en désagrégeant les barrages de papyrus qui, depuis des milliers d'années, s'opposent à la navigation sur cette partie du fleuve. En même temps, il sauvait de la disette les malheureuses populations riveraines que la sécheresse persistante avait acculées à la famine et à la mort. On a vivement applaudi les deux braves officiers qui avaient ainsi ouvert une nouvelle porte à la civilisation en Afrique. Nous est-il permis à cette occasion de regretter que les exploits de nos officiers à l'Équateur contre la disette, le Nil, les derviches, les anthropophages soient si peu connus en Belgique ?

Le lendemain, le R. P. G. Hahn, S. J., nous a fait une conférence tout à fait technique *Sur la locomotion chez les vertébrés :* reptiles, poissons ronds, poissons plats et baleines, bipèdes, quadrupèdes, oiseaux enfin, se meuvent bien différemment et pourtant la nature n'emploie pour cela qu'un seul *mécanisme :* le muscle, c'est-à-dire un ressort qui se contracte et se détend. Mais comme le suprême Mécanicien est habile! En vérité, comme le disait le savant conférencier, quand on en arrive à voir ainsi de près la main du Divin Ouvrier dans la nature, il n'y a plus qu'à adorer : *la science conduit à Dieu,* comme dit le Concile du Vatican.

La conférence du jeudi avait un titre quelque peu énigmatique : *Les travailleurs de la mort,* par M. F. Meunier. De fait, le sujet traité par le savant entomologiste était, au premier abord, assez peu attrayant. Il nous a décrit, avec projections à l'appui, les huit

escouades d'insectes qui se chargent d'exécuter à la suite l'une de l'autre, en trois ou quatre ans, la sentence fatidique : *pulvis es et in pulverem reverteris.* Heureusement que l'on se familiarise vite même avec les travailleurs de la mort. Somme toute, on arrive bientôt à cette conclusion qu'il est heureux qu'ils existent pour rendre à la nature minérale les restes innombrables des animaux et de l'homme après la mort.

Le sous-titre de la conférence de M. Meunier était : l'*Entomologie et ses applications en médecine légale.* On peut, en effet, retrouver approximativement la date du décès d'un homme en examinant quelle est, à un moment donné, l'escouade d'insectes occupée à dévorer ses restes mortels.

Il est à peine nécessaire de dire que les membres de la *Société scientifique* n'ont pas oublié que leur banquet annuel avait lieu le jour anniversaire de la naissance de S. M. Léopold II et l'année du jubilé de S. S. Léon XIII : on a bu avec plus d'entrain encore que de coutume au Pape et au Roi.

La première session de l'année sociale 1902-1903 s'est tenue à Liége, le 29 octobre dernier, dans les salons que le cercle *Concordia* avait gracieusement mis à notre disposition, tant pour les réunions des sections que pour l'assemblée générale. Les séances des sections furent très suivies; l'assemblée générale de l'après-midi très brillante. Elle eut lieu sous la présidence d'honneur de Mgr Rutten, évêque de Liége, et sous la présidence effective de M. le comte Fr. van der Straten-Ponthoz. Notre illustre confrère, M. de Lapparent, nous y fit une savante et belle conférence sur l'*Éruption de la Martinique.* C'est la dixième que ce membre dévoué entre tous à l'œuvre de la Société fait dans nos séances générales, toujours avec la même clarté, le même bonheur d'expression, avec le même succès aussi. Elle a paru *in extenso* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Mgr Rutten termina la session en nous adressant une allocution où il recommanda vivement à l'assemblée, la *Société scientifique* et la REVUE. Nous exprimons encore une fois toute notre gratitude au savant prélat pour ses paroles si encourageantes : elles provoqueront, nous n'en doutons pas, de nombreuses adhésions à notre œuvre dans le diocèse de Liége. Nous saisissons aussi l'occasion qui s'offre à nous de remercier la GAZETTE DE LIÉGE qui a fait un compte rendu de

notre session de Liége, plus étendu que nous n'avons l'habitude d'en trouver dans la presse de notre pays.

La session de janvier 1903 a été, à un certain point de vue, le complément et la suite de celle d'octobre. Le R. P. Dierckx, S. J., nous a entretenus des *Volcans de Java* qu'il avait pu étudier pendant une mission scientifique dans ce pays lointain. Malgré la terrible catastrophe qui en a été la suite, l'éruption de la Martinique a été pour ainsi dire un épisode normal de l'histoire des volcans et une confirmation de la théorie qui explique le volcanisme par la déperdition de l'énergie du noyau igné de la Terre. L'étude des phénomènes que présentent, avec une fréquence plus grande, les volcans de l'archipel malais conduit aux mêmes conclusions : il y a là-bas tel volcan, nous dit le R. P. Dierckx, qui jette au vent toutes les dix minutes, les bouffées de ses éruptions intermittentes, comme pour attester la régularité des lois qui régissent la dynamique interne du globe.

État actuel de la Société. Au 1er janvier 1901, la Société comptait 456 membres; un an après, elle en avait 477, c'est-à-dire, 21 de plus; au 1er janvier 1903, nous sommes redescendus à 456, c'est-à-dire précisément au même nombre que deux ans auparavant.

D'où vient cette décroissance bien que nous ayons recruté bon nombre d'adhérents pendant l'année écoulée? Tout d'abord, nous avons eu un certain nombre de démissions, très explicables, de religieux français que les circonstances actuelles arrachent à leurs études, à leur maison, à leur bibliothèque ; ensuite, nous avons dû nous résigner à rayer de nos listes des membres négligents qui s'obstinaient à recevoir nos publications sans payer leurs cotisations, enfin et surtout la mort a frappé à coups redoublés dans nos rangs, nous enlevant nos meilleurs collaborateurs. Je doute qu'aucune année ait été marquée par autant de deuils que 1902-1903 : je n'en compte pas moins de dix-sept. Je ne puis vous parler de tous ces chers confrères qui nous ont quittés pour un monde meilleur, mais je dois au moins vous citer quelques noms et tout d'abord celui du Dr Lefebvre, le savant professeur de Louvain, l'un des fondateurs de la Société, son premier président, son président d'honneur pendant notre année jubilaire, le médecin

qui a passé en faisant le bien pendant une vie pleine d'œuvres méritoires, dévoué à toutes les nobles causes et savant auteur de recherches remarquables sur l'hérédité; le Dr Achille Dumont, qui dans une sphère plus modeste, comme le disait M. Faidherbe, nous a donné l'exemple du travail assidu, de la foi inaltérable et qui fut secrétaire de la section de médecine pendant près de vingt ans; de la Vallée Poussin, savant doublé d'un lettré, grand chrétien et le plus aimable des hommes; ses recherches sur les roches feldspathiques, éruptives ou non, et sur le calcaire carbonifère belge sont des plus remarquables, et ses conférences à la Société sur divers points de philosophie scientifique sont des modèles d'exposition lumineuse; Mgr Van Aertselaer, dont le nom est indissolublement uni à l'organisation des cours supérieurs de l'Institut Saint-Louis; Bouquillon, ce digne prêtre, ce théologien éminent dont le séminaire de Bruges, l'Université catholique de Lille et celle de Washington garderont toujours le souvenir, l'auteur de l'un des livres les plus remarquables publié au XIXe siècle dans notre pays, la *Theologia moralis fundamentalis;* Fr. d'Hondt, qui a tant fait pour les progrès de l'agriculture dans la région de Courtrai, etc., etc.

Je pense être l'interprète de la *Société scientifique* tout entière en ajoutant aux noms de ces confrères dont nous pleurons la perte, celui de M. le Marquis de Beaucourt, le fondateur et président de cette *Société bibliographique* avec laquelle nous entretenons depuis si longtemps des rapports de confraternité scientifique. Demain, le délégué de la *Société bibliographique* elle-même vous parlera comme il convient de l'historien de Charles VII, du créateur du Polybiblion et de la Revue des Questions historiques; mais nous nous reprocherions de ne pas saluer aujourd'hui la mémoire de ce chrétien d'élite : c'est, en effet, partiellement sur le modèle de la *Société bibliographique* fondée en 1868 que, sept ans plus tard, s'organisèrent la *Société scientifique de Bruxelles* en Belgique et la *Goerres-Gesellschaft,* en Allemagne; c'est plus étroitement encore sur le plan de la Revue des Questions historiques que fut créée la Revue des Questions scientifiques.

Après nos douleurs, disons quelques mots de nos joies, comme les autres années, et faisons connaître les distinctions accordées à plusieurs de nos membres. Pendant l'année écoulée nous avons

recruté dix-neuf nouveaux adhérents, parmi lesquels nous citerons, M. le commandant Henry, dont je vous parlais à l'instant, M. G. Francotte, ministre de l'Industrie et du Travail, M. Lossen, professeur à l'Université de Königsberg, M. Gosselet, correspondant de l'Institut de France et enfin S. A. R. le Prince Charles-Théodore, le père de notre future reine.

M. André Dumont, dont la découverte du bassin houiller du nord de la Belgique a fait connaître le nom partout, a été promu au grade de commandeur de l'Ordre de Léopold; trois de nos membres les plus dévoués et les plus actifs, M. V. Lambiotte et les RR. PP. Van den Gheyn et Thirion S. J., ont été nommés chevaliers du même ordre; un autre des plus anciens et des plus fidèles, M. Nollée de Noduwez, est depuis quelques jours camérier secret de cape et d'épée de S. S. Léon XIII; M. Édouard de Pierpont a obtenu le prix Guimard pour les services rendus à l'ordre social en propageant les sociétés de secours mutuels dans le pays de Dinant. L'un des conférenciers de notre session jubilaire, M. J. Capart, a été nommé professeur d'égyptologie à l'Université de Liége. L'Académie des Sciences de Paris a décerné des prix à trois de nos membres dans sa séance solennelle du 22 décembre 1902 : le premier, le prix Poncelet, à M. d'Ocagne pour ses remarquables travaux sur la *Nomographie*; le second, le prix Fontannes, à M. de Grossouvre pour un magistral mémoire sur les *Ammonites de la craie supérieure.* „ Le travail de M. de Grossouvre, dit le savant rapporteur, est considérable. On peut presque dire qu'il épuise la matière. Son ouvrage renferme d'ailleurs sous le titre d'*Essai sur l'histoire de la Terre,* un important chapitre d'aperçus généraux où se révèlent la pleine compétence du savant ingénieur et sa remarquable érudition dans tout ce qui touche à la succession des terrains stratifiés sur le globe entier. „

Le prix Thore a été décerné au R. P. R. de Sinéty, S. J., pour des *Recherches sur la biologie et l'anatomie des Phasmes* qui contiennent des découvertes vraiment remarquables sur la parthénogenèse des orthoptères.

Nous offrons à tous nos bien vives félicitations à l'occasion de ces distinctions si bien méritées.

Une des joies de la *Société scientifique de Bruxelles* pendant cette année a été de pouvoir s'associer aux fêtes jubilaires de S. S. Léon XIII.

Le 8 mars dernier, les Vice-Présidents de la Société, interprètes de la décision de son conseil, ont fait parvenir à S. É. le Cardinal Rampolla la dépêche suivante : “ La *Société scientifique de Bruxelles* s'unissant à la joie du monde chrétien, envoie à S. S. Léon XIII ses meilleures et ses plus sincères félicitations à l'occasion du XXVe anniversaire de son couronnement „.

Son Excellence répondit à MM. les Vice-Présidents : “ Sa Sainteté a vivement agréé l'hommage des félicitations de la *Société scientifique de Bruxelles*. Bien de cœur, Elle envoie sa bénédiction apostolique pour tous les membres de cette Société „.

Bien de cœur aussi, nous remercions le Saint-Père de cette bénédiction paternelle et nous répétons encore une fois pour lui ces paroles qui, pendant la vingt-cinquième année de son pontificat, sont sorties de tant de bouches : *Ad multos annos!* qu'il règne longtemps encore pour le bien de l'Église et de la Société.

La parole est donnée à M. le chanoine Boulay, professeur aux Facultés catholiques de Lille, pour sa conférence sur *les Hépatiques* aux points de vue historique, biologique et philosophique. Un travail de M. Boulay, sur ce sujet, paraîtra plus tard dans les Annales. Voici un aperçu de sa conférence :

Le conférencier a fait ressortir la part qui revient aux botanistes belges et en particulier à B. Du Mortier, dans l'étude de cette classe intéressante de végétaux cryptogames. L'élégance du tissu, la variété prodigieuse des formes affectées par les nombreuses espèces de ce groupe expliquent l'ardeur, on pourrait dire la passion, que leur étude inspire aux spécialistes. La réflexion philosophique, appuyée sur les faits révélés par l'observation, ouvre aux regards de l'intelligence les vues les plus saisissantes sur l'harmonie constante maintenue par la Providence dans cette multitude de phénomènes, les uns grandioses, les autres minimes, dont se compose l'univers. Ces études constituent un des moyens les plus efficaces pour échapper au scepticisme; bien conduites, elles procurent à ceux qui s'y livrent, les jouissances les plus pures et les plus élevées.

M. le chanoine Delvigne, vice-président, remercie et félicite l'orateur.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 22 AVRIL 1903

La séance s'ouvre à 2 1/2 heures, sous la présidence de M. le chanoine Boulay, Président de la Société.

Un des savants bénédictins du monastère d'Herck-la-Ville, délégué de la *Société bibliographique de Paris,* présente sur les travaux de cette société le rapport suivant :

Un événement douloureux marque pour la *Société bibliographique* l'année 1902 : elle a perdu celui qui, après l'avoir fondée, l'avait gouvernée en qualité de président avec une intelligence et un dévouement au-dessus de tout éloge.

Le Marquis de Beaucourt fut en France l'un des hommes qui ont le plus fait pour démontrer aux catholiques la nécessité d'organiser sérieusement leur action intellectuelle et d'ajouter à l'exercice de la charité matérielle la propagande de la vérité. Il donnait personnellement l'exemple. Son histoire de Charles VII, qui a mérité deux fois le prix Gobert, lui donnait l'autorité qui s'attache toujours à la personne d'un historien éminent.

La pénétration de son esprit l'avait mis à même de comprendre de bonne heure la faiblesse à laquelle l'isolement condamne les travailleurs catholiques. C'est pour remédier à cette cause d'infériorité qu'il fonda la REVUE DES QUESTIONS HISTORIQUES, le POLYBIBLION, la SOCIÉTÉ BIBLIOGRAPHIQUE et la SOCIÉTÉ D'HISTOIRE CONTEMPORAINE. Il sut grouper des hommes dévoués à la cause de la défense de la Foi par la Science. Telle fut la vigueur de l'impulsion donnée par lui à ces organisations diverses, qu'elles ont pu résister à l'action dissolvante qu'exerce fatalement sur les cœurs, même les plus dévoués, un quart de siècle d'efforts en apparence infructueux. Il eut la consolation, avant de mourir, de voir combien restaient vivaces et actuelles ces créations, qui avaient absorbé la meilleure partie de son existence.

Dans les premiers jours de l'année 1902, la Providence lui avait ménagé le concours d'un secrétaire général, entièrement dévoué

à sa personne, à ses idées, à ses œuvres. M. le Marquis de Beaucourt et M. le Comte Aymer de la Chevalerie cherchèrent surtout les moyens d'accroître l'action de la *Société bibliographique* sur ses membres et par eux sur le pays. La *Société bibliographique* a recueilli, depuis sa fondation, plus de 10 000 adhésions. Nos nombreux sociétaires sont répandus dans la plupart des provinces. La situation qu'ils occupent les met à même d'exercer une influence considérable. Il fallait en tirer tout le parti possible, à une époque surtout où les ennemis de la Foi concertent leurs efforts avec une énergie et une persévérance inconnues jusqu'à ce jour. Une adaptation de la Société à des besoins nouveaux, et un développement de son organisation furent le fruit de ces travaux.

Comprenant que l'un des premiers besoins de l'heure présente est de faciliter aux catholiques instruits la connaissance et la lecture des ouvrages les plus propres à les mettre au courant des résultats acquis par les défenseurs de la vérité, le Président et le Secrétaire général donnèrent une impulsion nouvelle au groupement, commencé depuis plusieurs années, des sociétaires en comités locaux, dans lesquels on s'efforcerait, par la création de bibliothèques sagement formées, par des séries de conférences, d'activer la vie intellectuelle parmi les catholiques et de les prémunir contre les erreurs religieuses, sociales, historiques et philosophiques qui s'infiltrent de toutes parts.

Le clergé rural fut l'objet de toute leur sollicitude. Un projet de bibliothèques sacerdotales, arrêté par eux, est en voie d'exécution. Pour obtenir un résultat plus complet, la *Société bibliographique* s'est concertée avec l'*Œuvre des Campagnes.*

Les circonstances, il faut l'avouer, ne sont guère favorables au développement de pareilles œuvres. Mais qu'importe ! Elles répondent à un besoin trop urgent pour qu'on ne cherche pas à les créer en dépit de tous les obstacles. Les premiers résultats obtenus font entrevoir le succès.

Ce plan d'action était élaboré; les épreuves du Manuel qui l'expose venaient d'être corrigées lorsque M. le Marquis de Beaucourt fut soudainement enlevé à l'affection de sa famille et de ses collaborateurs.

Quelques mois après cet événement, le Conseil d'administration confiait la présidence de la *Société bibliographique* à celui qu'il

avait lui-même choisi pour héritier de sa tradition. En voyant M. le Comte Aymer de la Chevalerie à l'œuvre, tous ont eu l'impression que le même esprit animait la Société. Rien n'était plus de nature à lui concilier le dévouement de tous ceux qui avaient travaillé avec son éminent prédécesseur.

La mort de M. de Beaucourt laissait sans direction la Revue des questions historiques. M. Paul Allard a bien voulu accepter sa succession. Elle ne pouvait tomber en meilleures mains. M. Allard est l'un de ces hommes qu'il est superflu de louer. Ses ouvrages, si connus, si universellement estimés, le classent parmi les penseurs et les écrivains de premier ordre. Ici encore, on peut le dire, l'œuvre de M. de Beaucourt continue, semblable à elle-même.

On nous demandera peut-être quelles ont été les publications de la *Société bibliographique*. A cela, il faut répondre qu'elle a, depuis longtemps, renoncé à publier elle-même. Elle se borne à encourager les travaux de ses membres et à seconder les éditeurs qui demandent son patronage. Il est difficile, dans ces conditions, de donner une liste d'ouvrages dont l'honneur lui revienne. Elle a, comme les années précédentes, donné son concours à la partie historique de la collection : " Science et Religion ".

Si la *Société bibliographique* n'a pas publié d'ouvrages, elle vient d'entrer dans une voie nouvelle qui, nous l'espérons, développera son action, et lui permettra d'exercer plus efficacement encore son influence dans les milieux scientifiques.

Le Conseil de la Société a décidé, dans sa séance du 5 février dernier, qu'un prix de *cinq cents francs,* désigné sous le nom de *Prix Beaucourt,* en mémoire de notre si regretté fondateur et président, serait attribué au *meilleur ouvrage ayant paru dans les trois années précédentes,* jugé par elle digne d'être *donné en prix dans les écoles primaires libres.*

Les concurrents devront déposer, avant le 1er janvier 1904, au siège de la Société, 5, rue de Saint-Simon, un double exemplaire de leur ouvrage et s'engager à faire paraître les éditions subséquentes avec le sceau de la Société et la mention du prix décerné.

Ce prix sera donné à l'assemblée générale de 1904.

Ce concours est le premier qu'ait organisé la *Société bibliographique.* Son succès, qui n'est pas douteux, nous engagera certainement à en ouvrir d'autres.

Le Prix Beaucourt sera décerné tous les trois ans; d'autres prix, nous l'espérons, viendront s'ajouter à lui et rapprocheront de nous le monde de la science, qui, trouvant un encouragement et un appui, fera de nouveaux efforts pour produire des ouvrages honnêtes et moraux, où respirera le souffle patriotique et chrétien.

N'est-ce pas le but que s'est proposé notre vénéré fondateur lorsqu'il a posé les bases de la *Société bibliographique,* et lui a donné pour programme de moraliser le livre, et de le répandre, une fois moralisé, dans la Société tout entière. Notre désir est, en effet, de continuer les grandes et solides traditions de celui qui fut, pendant de nombreuses années, notre guide si sûr et si ferme.

S'inspirant de ces traditions, la *Société bibliographique* sera toujours heureuse de saisir toutes les occasions qui se présenteront à elle pour resserrer les liens étroits déjà qui l'unissent à la *Société scientifique de Bruxelles.* Pour atteindre ce but, le Conseil a désigné pour représenter la Société un bénédictin du monastère d'Herck-la-Ville (Limbourg belge), qui, condamné à l'exil, a trouvé sur le sol catholique de la Belgique un refuge aussi bienveillant que dévoué.

En terminant ce rapide aperçu, qu'il soit permis à une grande Société française d'adresser de chaleureux remerciements à la catholique Belgique, pour l'hospitalité si cordiale qu'elle offre à nos malheureux proscrits, à nos congréganistes, hommes et femmes, qui sont forcés de franchir les frontières de notre pays pour continuer à se consacrer au service de Dieu, à vivre sous la règle de leur fondateur et à porter l'habit de leur ordre.

Honneur à la nation sœur, qui nous a souvent donné de si beaux exemples de courage et de fermeté!

La parole est donnée à M. le D[r] Lemière, professeur aux Facultés catholiques de Lille, pour sa conférence, avec projections lumineuses, sur *les moyens de défense de l'organisme contre les agents pathogènes.* En voici un résumé :

Les êtres vivants nous étonnent par la complexité et la fragilité de leurs organes, quand on considère que les agents pathogènes, si nombreux et si variés, ne cessent de les attaquer de toutes parts.

Parmi ces agents pathogènes, les plus nombreux et les plus

dangereux, les microbes, nous sont bien connus depuis les découvertes de Pasteur. Ils sont de forme variée, ils ont des propriétés diverses ; ils sont dangereux par la faculté qu'ils possèdent de se développer et de se multiplier dans le corps des êtres vivants, d'y vivre en parasites. Mais si l'attaque est incessante, la défense est aussi parfaitement organisée.

Rempart épithélial de la peau et des muqueuses qui empêche leur pénétration, présence de tissu réticulé et de ganglions lymphatiques nombreux dans les points les plus menacés qui arrêtent ceux qui ont pu forcer la première barrière : tout cela est merveilleusement disposé.

Ce n'est pas grâce à la présence d'une substance chimique dans nos liquides humoraux que nous détruisons les microbes, mais bien par suite d'une action constante de certaines cellules.

Ces cellules de défense, ce sont les leucocytes, toujours présents dans notre sang, mais plus abondants, grâce à leur multiplication en présence du danger, le jour où nous sommes menacés d'une maladie microbienne.

Ces cellules appartiennent à deux variétés : la polynucléaire, qui lutte surtout contre les microbes provocateurs des maladies aiguës et la mononucléaire, qui a surtout pour mission de détruire les microbes, agents des maladies chroniques. Les polynucléaires ou microphages luttent surtout contre les microbes; les mononucléaires ou macrophages contre ceux qui, ayant succombé, ne sont plus que des cadavres. Les microphages sont les gendarmes de l'économie, les macrophages en sont les balayeurs ou les croque-morts.

Pour détruire les microbes, les leucocytes entreprennent contre eux une véritable lutte corps à corps; ils finissent par les avaler et les digérer. Ce sont des mangeurs de microbes, d'où leur nom de phagocytes.

Cette théorie a surtout été découverte et démontrée par Metchnikoff, mais un grand nombre de travaux de différents auteurs ont contribué à la faire admettre. Parmi ces travaux, il faut citer ceux, très importants, entrepris par des Belges, MM. Massart et Bordet, M. Denys, de Louvain, et ses élèves.

Cette résistance fait souvent défaut ; nos gendarmes ne sont pas toujours assez forts pour arrêter leurs adversaires ; ils laissent

échapper les malfaiteurs les plus redoutables. Comme pour les gendarmes qui veillent sur la société, il faut souvent faire leur éducation avant de les trouver aptes à remplir leur tâche. C'est ce que l'on arrive à obtenir par la vaccination, qui n'est qu'un entraînement rationnel de nos leucocytes.

Les microbes ne nous tuent le plus souvent que par intoxication. Il ne suffit donc pas de détruire le microbe, il faut encore annihiler l'action de ses poisons.

Pour lutter contre l'intoxication produite par certains microbes très redoutables, comme le microbe de la diphtérie et celui du tétanos, on arrive, en immunisant les animaux et en particulier le cheval contre l'action de ces toxines, à leur faire produire de l'antitoxine qui se répand dans leur sang. Après saignée, on injecte le sérum de ce sang contenant de l'antitoxine, aux individus qui succombent parce que leur propre organisme ne contient pas assez d'antitoxine. C'est le principe de la sérothérapie, par laquelle on donne aux individus menacés une immunité passive, temporaire, contre les toxines.

Les phagocytes nous protègent donc contre les microbes, contre les toxines microbiennes; ils débarrassent notre organisme des éléments étrangers et des déchets cellulaires. Ils luttent encore avec succès contre les poisons minéraux, contre les toxines végétales et contre les poisons animaux.

Leur rôle est donc de tout premier ordre dans le mécanisme de la défense de l'organisme contre les agents pathogènes. Ils jouent probablement aussi un rôle dans la combinaison de certaines substances chimiques, de façon à les rendre inoffensives, comme l'ont démontré MM. Heymans, Lang et Masoin fils, en annihilant l'action de l'acide prussique par une injection d'hyposulfite de soude.

La médecine a fait, dans ces dernières années, des progrès très grands; elle en fera d'autres, et les médecins seront toujours à la hauteur de leur tâche; ils s'inspireront toujours de cette pensée de Pasteur, qui résume bien toute la vie de ce grand savant, de ce grand chrétien et de ce grand Français : " En fait de bien à opérer, le devoir ne cesse que là où le pouvoir manque ".

M. le chanoine Boulay adresse quelques paroles de félicitations au conférencier.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 23 AVRIL 1903

L'assemblée générale s'ouvre à 2 1/2 heures, sous la présidence de M. le chanoine Delvigne, Vice-Président de la Société.

M. Mansion soumet à l'assemblée les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes de la Société relatifs à l'année 1902. Ces comptes sont adoptés par l'assemblée.

En voici les détails et le résumé :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1902

Revue

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements. fr.	10414,00	Impression et expédition. fr.	5981,30
Vente d'anciens volumes .	329,75	Collaboration	4161,76
Subside de la Société . .	86,06	Administration et propagande	686,75
	10829,81		10829,81

Séances et Annales

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des cotisations . .	5535,00	Impression et expédition. .	2588,82
Vente d'anciens volumes .	117,00	Indemnités pour secrétariat de la Société et des sections	2500,00
Subside de la Société . . .	907,26	Frais de bureau, frais de sessions, location des locaux	1470,44
	6559,26		6559,26

Société

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des coupons . . .	3706,93	Subside à la *Revue*	86,06
Intérêts du compte courant	224,13	Subside aux *Annales* . . .	907,26
Une part de membre à vie .	150,00	Subside pour recherches scientifiques	500,00
			1493,32
		Excédent des *Recettes* . .	2587,74
	4081,06		4081,06

RÉSUMÉ

Recettes réalisées	20476,81
Dépenses soldées	17889,07
Boni	2587,74

Le boni doit supporter les charges suivantes :

1. Prix de 500 francs à accorder éventuellement à un mémoire envoyé en réponse à la question de concours de la troisième section, et soumis actuellement à l'examen des commissaires.

2. Un subside de 1200 francs pour l'impression des planches d'un mémoire destiné aux Annales, subside voté en principe par le Conseil.

3. Les frais d'impression et d'expédition d'une brochure de propagande.

La parole est donnée au R. P. Lucas, S. J., professeur à la Faculté des sciences de Namur, pour sa conférence, avec expériences, sur les *Phénomènes sonores dans l'arc électrique, arc chantant et arc-téléphone*. En voici un aperçu :

Avant d'aborder les phénomènes sonores dans l'arc électrique, il convenait de rappeler la nature du son en général, de l'arc électrique et enfin de dire par quel moyen Simon, Duddel, Ruhmer et leurs émules parvinrent à superposer le phénomène sonore au phénomène lumineux.

Des expériences illustrèrent chacun de ces trois points. Une tige métallique serrée dans un étau, un diapason nous montrent que le son est produit par des oscillations de grande rapidité. Ces conditions se trouvent dans l'harmonica chimique, flamme chantante déjà ancienne et, particulièrement, dans l'admirable invention d'Édison, le phonographe.

D'autre part, l'arc est une flamme, corps gazeux incandescent, susceptible, par suite, de dilatation et de contraction, suivant que le courant qui l'alimente, plus ou moins intense, lui cède plus ou moins de chaleur. Que ces variations du courant se succèdent régulièrement et avec une rapidité de plusieurs centaines par seconde et l'arc rendra un son musical.

Mais par quels moyens provoquer et entretenir ces rapides variations? Deux procédés sont utilisables. Le premier recourt à la décharge oscillante des condensateurs, c'est-à-dire du phénomène caractéristique de la télégraphie sans fil. Sous cette influence, l'arc émet une simple note que l'on peut faire varier en modifiant les conditions électriques du circuit. La seconde méthode se prête à des effets plus étonnants. Devant un micro-

phone puissant, semblable à celui de nos postes téléphoniques, un artiste exécute un morceau. Nous l'entendrions dans un téléphone. A la place de ce téléphone, intercalons dans la ligne convenablement renforcée, un arc électrique et la flamme, avec plus de fidélité que la membrane métallique réceptrice, nous traduira en ondes sonores la mélodie qui fait vibrer tout son être électrique.

M. Mansion donne lecture des questions de concours et fait connaître le résultat des élections des membres du Conseil et des Bureaux des différentes sections.

La composition du Conseil pour l'année 1903-1904 est la suivante (*).

Président :	M.	le chanoine Delvigne (1907).
1er Vice-Président :	M.	le comte E. Domet de Vorges (1904).
2e Vice-Président :	M.	le lieutenant-général De Tilly (1904).
Secrétaire :	M.	P. Mansion (1907).
Trésorier :	M.	Éd. Goedseels (1904).
Membres :	MM.	le marquis de la Boëssière-Thiennes (1906).
		L. Cousin (1905).
		L. De Lantsheere (1906).
		Fr. De Walque (1906).
		G. De Walque (1904).
		Ch. Lagasse-de Locht (1905).
		Dr A. Van Gehuchten (1904).
		E. Pasquier (1905).
		A. Proost (1906).
		Comte Fr. van der Straten-Ponthoz (1904).
		Chanoine Swolfs (1905).
		Ch.-J. de la Vallée Poussin (1906).
		G. Van der Mensbrugghe (1907).
		Éd. Van der Smissen (1907).
		Dr R. Warlomont (1907).

M. le chanoine Delvigne déclare close la session de Pâques 1903.

(*) Le nom de chaque membre est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1902 au 1er mai 1903

I. Livres et brochures

R. d'Adhémar. L'état actuel de la science, d'après le rapport de M. É. Picard (Extrait de la Revue de Philosophie). Une broch. in-8° de 29 pages. Paris, C. Naud, 1902.

J.-B. André. Enquête sur les eaux alimentaires. Première partie : Résumé des réponses des Administrations communales et Renseignements divers. Un vol. in-8° de xv-465 pages. Bruxelles, Lesigne, 1902.

Alfred Angot. Instructions météorologiques. Un vol. gr. in-8° de vi-163 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Ludovic de Besse, capucin. Le Bienheureux Bernardin de Feltre et son œuvre.

T. I : La vie.
T. II : L'œuvre ou le prêt à intérêt.

Deux vol. in-8° de xx-475 et vi-471 pages. Tours, A. Mame et fils, 1902.

Hippolyte Chopin. Le Saint-Suaire de Turin photographié à l'envers. Une broch. in-8° de 13 pages. Paris, A. Picard, 1902.

J. Cornet et **G. Schmitz, S. J.** Note sur les puits naturels du terrain houiller du Hainaut et le gisement des iguanodons de Bernissart (Extrait du Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie). Bruxelles, Hayez, 1902.

Paul-Louis Couchoud. Benoît de Spinoza (Collection *Les grands philosophes*). Un vol. in-8° de xii-307 pages. Paris, F. Alcan, 1902.

L.-J. Delaporte. Essai philosophique sur les géométries non-euclidiennes. Un vol. in-8° de 143 pages. Paris, Naud, 1903.

Ém. De Wildeman. Études sur la flore du Katanga (Extrait des Annales du Musée du Congo). Fasc. II, pp. 25 à 80, pl. VII à XXVIII. Fasc. III et dernier, pp. 81 à 240, pl. XXIX à XLVII. Deux in-folio de 56 et xii-160 pages, avec planches. Bruxelles, Spineux, 1903.

Ém. De Wildeman. *Plantae Laurentianae,* ou Énumération des plantes récoltées au Congo par Émile Laurent en 1893 et 1895-1896. Une broch. in-8° de 57 pages. Bruxelles, Spineux, 1903.

Ém. De Wildeman. Rapport sur une visite aux Instituts botaniques et coloniaux de Paris, Berlin et Dresde en 1902. Une broch. in-8° de 16 pages. Bruxelles, P. Weissenbruch, 1902.

P. Duhem. Le mixte et la combinaison chimique. Essai sur l'évolution d'une idée. Un vol. in-8° de 207 pages. Paris, Naud, 1902.

Eug. Ferron. Esquisse historique des hypothèses principales sur la constitution intérieure des corps. Une broch. in-8° de 30 pages. Luxembourg, Th. Schrœll, 1900.

E. Fichot et **P. de Vanssay.** Congrès international de chronométrie. Comptes rendus des travaux, procès-verbaux, rapports et mémoires. Un vol. in-4° de xv-254 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Albert Gaudry. Contribution à l'histoire des hommes fossiles (Extrait de L'Anthropologie). Une broch. in-8° de 14 pages. Paris, Masson, 1903.

L. Geschwind et **E. Sellier.** La Betterave agricole et industrielle (*Encyclopédie industrielle fondée par M. G. Lechalas*). Un vol. gr. in-8° de v-669 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Maurice Godefroy. Théorie élémentaire des séries. Un vol. gr. in-8° de viii-266 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

P.-J.-Éd. Goedseels. Théorie des erreurs d'observation. Un vol. gr. in-8° de xiii-168 pages. Louvain, Ch. Peeters, 1902.

Pierre Guédon. Traité pratique des chemins de fer d'intérêt local et des tramways. Un vol. gr. in-8° de 393 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Ch.-Éd. Guillaume et **L. Poincaré.** Travaux du Congrès international de physique, réuni à Paris en 1900. T. IV : Procès-verbaux, annexes, liste des membres. Un vol. in-8° de 170 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Haton de la Goupillière. Sur un cas d'intégration de l'équation des brachystochrones (Extrait des Comptes rendus de l'Académie des Sciences). Une broch. gr. in-4° de 11 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Dr Ét. Henrard. Lésions osseuses rares. Suites de contusions diagnostiquées uniquement par la radiographie (Communication faite au 2e Congrès international d'électrologie et de radiologie médicales à Berne). Une broch. in-8° de 7 pages. Bruxelles, F. Van Gompel, 1902.

Dr Ét. Henrard. Technique de la radiographie stéréoscopique (Communication faite à la Société médico-chirurgicale du Brabant). Une broch. in-8° de 8 pages. Bruxelles, Ch. Van de Weghe, 1902.

E. Hospitalier. Rapports et procès-verbaux du Congrès international d'électricité (Paris, 18-25 août 1900). Un vol. in-8° de 526 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

Georges Houdard. L'évolution de l'art musical et l'art grégorien (Leçon d'ouverture du cours libre d'histoire musicale professé à la Sorbonne). Un vol. petit in-8° de 55 pages. Paris, Fischbacher, 1902.

A. Joannis. Cours élémentaire de chimie. Un vol. in-8° de 862 pages. Paris, Baudry et C^{ie}, 1903.

E. Jouffret. Traité élémentaire de géométrie à quatre dimensions et introduction à la géométrie à *n* dimensions. Un vol. gr. in-8° de xxx-215 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

D^{r} P. Jousset. Réfutation du transformisme et de la théorie cellulaire, à propos du livre de M. Topinard " Science et Foi " (Extrait des ANNALES DE PHILOSOPHIE CHRÉTIENNE). Une broch. in-8° de 19 pages. Paris, A. Roger et Chernoviz, 1902.

Th. Klompers. Arithmétique commerciale. Opérations en marchandises. Un vol. gr. in-8° de 248 pages. Anvers, V^{ve} Van Ishoven, 1902.

O. Lambot. Cours de dessin scientifique à l'usage de l'enseignement moyen, de l'enseignement normal et de l'enseignement industriel. Texte, un vol. in-8° de VIII-159 pages. Atlas, une broch. in-8° de 17 planches. Bruxelles, A. Castaigne, 1902.

H. Lammens, S. J. Notes sur les Musulmans indiens (Extrait des MISSIONS BELGES DE LA COMPAGNIE DE JÉSUS). Une broch. in-8° de 22 pages. Bruxelles, Bulens, 1902.

G. Lecointe. La marine marchande belge (Extrait de la REVUE GÉNÉRALE). Une broch. in-8° de 19 pages. Bruxelles, Schepens, 1902.

U. Le Verrier. Procédés de chauffage (*Encyclopédie industrielle fondée par M. G. Lechalas*). Un vol. gr. in-8° de 367 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

F. Malméjac. L'eau dans l'alimentation (*Bibliothèque scientifique internationale*). Un vol. in-8° de II-312 pages. Paris, F. Alcan, 1902.

C^{te} de Maupeou d'Ableiges. Force et matière. Action comparée de forces sur les solides invariables, élastiques, déformables. Un vol. gr. in-8° de 96 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

A. Menegaux. Singes et Lémuriens (Fasc. I de la collection Edm. Perrier *La vie des animaux illustrée*). Un vol. in-4° de 124 pages avec planches. Paris, Ballière, 1903.

F. Meunier. Les *Cecidomyidae* de l'ambre de la Baltique (Extrait de MARCELLIA). Une broch. in-8° de 4 pages. 1902.

F. Meunier. Études de quelques diptères de l'ambre (Extrait des ANNALES DE SCIENCES NATURELLES). Une broch. in-8° de 12 pages avec planches. Paris, Masson, 1901.

P. Moissonnier. L'aluminium. Ses propriétés, ses applications. Un vol. gr. in-8° de xx-220 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

P. Monnier. Électricité industrielle. Un vol. gr. in-8° de 826 pages. Paris, E. Bernard, 1903.

M. de Montcheuil. Sur une classe de surfaces (Thèse présentée à la Faculté des sciences de Toulouse pour obtenir le grade de docteur en sciences mathématiques). Un vol. gr. in-4° de 79 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1901.

F. de Montessus de Ballore. Essai sur le rôle sismogénique des principaux accidents géologiques (Extrait du GERLANDS BEITRÄGEN ZUR GEOPHYSIK). Une broch. in-8° de 41 pages. Leipzig, W. Engelmann, 1903.

F. de Montessus de Ballore. Sur la possibilité d'un exhaussement récent de l'extrémité sud de la presqu'île de Quiberon (3 pages extraites des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DU NORD, t. XXXI, p. 310).

M.-A. Morel. L'acétylène : théorie, applications. Un vol. gr. in-8° de XII-169 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Ch. Moureu. Notions fondamentales de chimie organique. Un vol. in-8° de VI-292 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

M^is de Nadaillac. Du Cap au Caire (Extrait du CORRESPONDANT). Une broch. in-4° de 20 pages. Paris, De Soye et fils, 1903.

Maurice d'Ocagne. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la nomographie (Extrait du JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE). Une broch. gr. in-4° de 62 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Maurice d'Ocagne. Sur quelques travaux récents relatifs à la nomographie (Extrait du BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES). Une broch.

E. Pâque, S. J. Flore analytique et descriptive des provinces de Namur et de Luxembourg. Un vol. in-8° de XXXII-595 pages. Namur, A. Wesmael, 1902.

Jean Perrin. Traité de chimie physique : les principes. Un vol. gr. in-8° de XXVI-299 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

A. Raingeard. Notions de géologie. Un vol. in-8° de VIII-302 pages. Rodez, Carrère, 1902.

J. Rodet. Distribution de l'énergie par courants polyphasés. Un vol. in-8° de IX-561 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Lucien Roure. Anarchie morale et crise sociale. Un vol. in-8° de II-404 pages. Paris, Delhomme et Briguet, 1903.

D^r Rutten. Dilatation extraordinaire du sac lacrymal de l'œil gauche. Un cas d'ophtalmie unilatérale et passagère de l'œil gauche. La teinture de *Rhus toxicodendron* comme antinévralgique. Bec de lièvre nasal. Une broch. gr. in-8° de 14 pages. Namur, Godenne, 1902.

Robert de Sinéty, S. J. Recherches sur la biologie et l'anatomie des Phasmes (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences naturelles). Une broch. in-4° de 164 pages avec planches. Lierre, Van In, 1901.

H. Terquem. L'authenticité du linceul du Christ. État actuel de la question. Un vol. in-8° de 113 pages. Paris, Paclot, 1902.

Ern. Van den Broeck. Les coupes du gisement de Bernissart. Le Wealdien du Bas-Bourbonnais et le Wealdien de Bernissart (Extrait du procès-verbal de la séance du 27 décembre 1898 de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie). Une broch. in-8° de 58 pages. Bruxelles, Hayez, 1902.

Ém. Vercamer. Étude historique et critique sur les jeux de Bourse et marchés à terme. Un vol. gr. in-8° de xv-378 pages. Bruxelles, Bruylants, 1903.

P. Vignon. A propos du Saint Suaire de Turin (Extrait de la REVUE CHRÉTIENNE). Une broch. in-8° de 19 pages. Lille, Gerardi et Audebert, 1902.

P. Vignon. A propos du Saint Suaire de Turin. Réponse à M. Donnadieu. (Extrait de L'UNIVERSITÉ CATHOLIQUE). Une broch. in-8° de 24 pages. Lyon, E. Vitts, 1902.

P. Vignon. Recherches de cytologie générale sur les épithéliums (Archives de zoologie expérimentale et générale). Paris, Schleicher, frères.

J. Vincent. Aperçu de l'histoire de la météorologie en Belgique. 3e partie (Extrait de l'ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE pour 1903). Une broch. petit in-8° de 96 pages. Bruxelles, Hayez, 1903.

J. Vincent. Notes bibliographiques sur les nuages. Classification et nomenclature (Extrait de l'ANNUAIRE MÉTÉOROLOGIQUE pour 1903). Une broch. petit in-8° de 22 pages. Bruxelles, Hayez, 1903.

V. Williot. Études sur les nombres premiers. 1re partie : la voie de Riemann. Une broch. gr. in-8° de 40 pages avec planches. Paris, Hermann, 1903.

A. Witz. Fonctionnement comparé des machines à vapeur et des moteurs à gaz (Extrait de l'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE). Une broch. in-4° de 15 pages. Paris, C. Naud, 1902.

Encyclopédie des Aide-mémoire publiée sous la direction de M. Léauté, membre de l'Institut. Collection de vol. petit in-8°. Paris, Gauthier-Villars et Masson.

Section de l'ingénieur :

J. Defays et H. Pittet. Étude pratique sur les différents systèmes d'éclairage.

L. Gages. Les alliages métalliques.

Léon Guillet. L'industrie des acides minéraux.

Léon Guillet. L'industrie des métalloïdes et de leurs dérivés.

F. Miron. Les eaux souterraines.

F. Miron. Gisements miniers. Stratification et composition.

E. Ozard. La pratique des fermentations industrielles.

E. Rabati. L'industrie des résines.

A. Taveau. Épuration des eaux d'alimentation de chaudières et désincrustants.

Ministère de la Justice, Statistique judiciaire de la Belgique. Troisième année. Un vol. gr. in-4° de 334 pages. Bruxelles, Larcier, 1902.

Karl Ahlenius. Angermanälfvens flodomrade. En geomorfologisk-antropogeografisk Undersökning. Un vol. gr. in-8° de XII-220-IV pages. Uppsala, Almqvist & Wiksells Boktryckeri. A. B., 1903.

José Algué, S. J. Ground temperature at Manila. Une broch. in-8° de 16 pages. Manila, Bureau of Public printing, 1902.

D^r^ Ernst Bardey. Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Un vol. in-8° de XIII-420 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

F. M. Bernard. Erdbebenstudien des Grafen de Montessus de Ballore. Une broch. in-8° de 9 pages. Laibach, Kleinmayr, 1902.

Prof. D^r^ Paul Bachmann. Niedere Zahlentheorie. I. Teil. Un vol. gr. in-8° de x-402 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Alexander Brownlie. The Tides in the midst of the Pacific Ocean (Extrait du Bulletin of the American Geographical Society). Une broch. in-8° de 23 pages.

Fr. Carbonell y Solés. Application de la cristalogenia experimental á la investigación toxocológica de los alcaloides. Une broch. in-8° de 15 pages. Barcelona, Casamajó, 1903.

Fr. Carbonell y Solés. Estudio comparativo, experimental y clinico de la viruela en el hombre y en los animales domésticos. Une broch. in-8° de 32 pages. Barcelona, Casa provincial de Caridad, 1898.

Fr. Carbonell y Solés. Estudio de la cistita tuberculosa concepto clinico y tratamento de la misma. Une broch. in-8° de 92 pages. Barcelona, Casa provincial de Caridad, 1900.

Prof. Bellino Carrara, S. J. Il P. Angelo Secchi. Discorso letto nella solenne commemorazion del XXV anniversario dalla sua morte nell' aula del Collegio sacro in Padova. Une broch. in-8° de 34 pages. Padova, Seminario, 1903.

T. A. Coghlan. Results of a Census of New South Wales taken for the night of the 31st march 1901 :

Part 1 (manque).
Part 2 Education of the people.
Part 3 Religions of the people.
Part 4 Birthplaces of the people.
Part 5 Conjugal condition and families.

Vol. in-4° de 73-474 pages. Sydney, W. Applegate Gullick, 1902-1903.

T. A. Coghlan. A statistical Account of the seven Colonies of Australasia, 1901-1902. Un vol. in-8° de VIII-1093 pages. Sydney, W. Applegate Gullick, 1902.

T. A. Coghlan. Statistics. Six states of Australia and New Zeland, 1861-1891. Un vol. in-8° de 84 pages. Sydney, W. Applegate Gullick, 1902.

T. A. Coghlan. The Wealth and Progress of New South Wales, 1900-1901. Un vol. in-8° de xv-1043 pages. Sydney, W. Applegate Gullick, 1902.

Dr Prof. O. Comes. Chronographical Table for Tobacco in Europa, Asia, Africa, America, Oceania. Cinq tableaux. Napoli, Societa Anonima Cooperativa Tipografica, 1900.

Maximilian Curtze. Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter u. der Renaissance. II. Teil. Un vol. gr. in-8° de 627 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Emanuel Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Un vol. gr. in-8° de 594 pages. Leipzig, Teubner, 1902 et 1903.

John Doyle, S. J. Magnetical Dip and Declination in the Philippine Islands. Une broch. in-8° de 16 pages. Manila, Observ. printing office, 1901.

Friedrich Engel. Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung des Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der jüngere, Georg Scheffers. II. Band. II. Theil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Un vol. de VIII-266 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

D. Norberto Font y Sagué. Los kiokenmodingos de Rio de Oro (Sáhara español) (Extrait du BOLETIN DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA NATURAL). Une broch. in-8° de 4 pages et 2 planches hors texte.

Dr Phil Kurt Geissler. Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Un vol. de VIII-417 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

M. Hamburger. Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs, gehalten im mathemat. Verein der Universität Berlin (Sonderabdruck aus dem ARCHIV DER MATHEM. U. PHYSIK). Une broch. gr. in-8° de 16 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Dr Kurt Hensel und **Dr Georg Landsberg**. Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Un vol. gr. in-8° de XVI-708 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

F. Klein. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Un vol. in-8° de 468 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

J. Kübler. Die Theorie der Knick-Elastizität und Festigkeit. Une broch. in-8° de 29 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

P. Placido-Angel R Lemos, O. F. M. La Vida orgánica en sí misma y en sus manifestaciones. Madrid, Greg. del Amo, 1902.

Dr Gino Loria. Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Trad. par Fritz Schütte. Un vol. de 744 pages avec 17 planches. Leipzig, Teubner, 1902.

Artbur Mac Donald. A Plan for the Study of Man. Un vol. in-8° de 166 pages. Washington, Government printing office, 1902.

Santiago Marin Vicuña Al travers de la Patagonia. Un vol. in-8° de 202 pages. Santiago de Chile, 1901.

Santiago Marin Vicuña. El laudo arbitral. Une broch. in-8° de 28 pages. Santiago, Mejia, 1902.

Fernand Meunier. Una nueva Cicada del Kimeridgense en el Montsech (Extrait des MEMORIAS DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES DE BARCELONA). Une broch. in-4° de 24 pages. Barcelona, A. Lopez Robert, 1902.

Ernst Pascal. Repertorium der höheren Mathematik. Analysis und Geometrie. II. Teil : die Geometrie. Un vol. in-8° de IX-712 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Un vol. in-8° de VIII-116 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Dr Ferd. Rudio. Die Elemente der analytischen Geometrie. Zweiter Teil : die analytischen Geometrie des Raumes. Un vol. in-8° de x-186 pages. Leipzig, Teubner, 1901.

Dr Paul Sauerbeck. Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven, nach den Methoden von J. Paul de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Un vol. gr. in-8 de VI-166 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Dr M. Schuster. Trigonometrie (Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie). Un vol. in-8° de VII-112 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

J.-A. Serret. Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Deutsch bearbeitet von A. Harnack. III. Band. I. Lieferung. Differentialgleichungen herausgegeben von G. Bohlmann u. E. Zermelo. Un vol. gr. in-8° de 304 pages. Leipzig, Teubner, 1903.

C. D. Sherborn. Index animalium, sive index nominum quae ab A. D. MDCCLVIII generibus et speciebus imposita sunt. Sectio prima : a kalendis ianuariis MDCCLVIII usque ad finem decembris MDCCC. Un vol. gr. in-8° de LIX-1195 pages. Cantabrigiae, e typographico academico MDCCCCII. (Cambridge, University press. 1902).

Dr Otto Stolz u. Dr A. Gmeiner. Theoretische Arithmetik. II. Abtheilung. Die Lehren von den reellen und von den complexen Zahlen. Un vol. gr. in-8° de XI-402 pages, Leipzig, Teubner, 1902.

Dr D. Rafael del Valle y Aldabalde. El pronostico en la Tuberculosis pulmonar. Une broch. in-8° de 55 pages. Madrid, N. Moya, 1902.

Luis Mariano Vidal. Sobre la presencia del tramo Kimeridgense en el Montsech y hallazzo de un batracio en sus hiladas. Une broch. in-4° de 12 pages. Barcelona, A. Lopez-Robert, 1902.

Informes presentados a la Secretaria de Fomento por el Director del Observatorio astronomico nacional sobre los trabajos del establecimento. Un vol. in-8° de 99 pages. México, Oficina tip. de la Secretaría de Fomento, 1902.

II. Périodiques

Académie des Sciences. Comptes rendus hebdomadaires des séances (1903), Paris.

Académie royale de médecine de Belgique :
Bulletin, 4e série, t. XVI (1902). Bruxelles.
Mémoires couronnés et autres mémoires, t. XV, 9e fasc. (1902). Bruxelles.
Procès-verbaux des séances de l'année 1902. Bruxelles.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse, 2e série, t. IV (1902). Toulouse.

Annales de la Société géologique de Belgique, t. XXVbis, 2e livr. et t. XXIX, 2e, 3e et 4e livr. (1902). Liége.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique, t. XXXVI (1901). Bruxelles.

Annales de Philosophie chrétienne (1903). Paris.

Annuaire astronomique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1903. Bruxelles.

Annuaire météorologique de l'Observatoire royal de Belgique pour 1903. Bruxelles.

L'Anthropologie, t. XIV (1903). Paris.

Bulletin de la Société astronomique de France (1903). Paris.

Bulletin de la Société bibliographique et des publications populaires (1903). Paris.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie, 2e série, t. III, fasc. 3 et 4, t. VI, fasc. 2, 3, 4 et 5.
Nouveaux mémoires, série in-4°, fasc. 1 (1903). Bruxelles.

Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique (1903). Bruxelles.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXI (1903). Paris.

Bulletin de la Société royale belge de géographie (1902). Bruxelles.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy et de la Réunion biologique de Nancy, 3e série, t. II, fasc. IV ; t. III, fasc. I et II, Nancy.

Bulletin des séances de la Société française de physique (1902). Paris.

Bulletin du Jardin botanique de l'État, vol. I, nos 1, 2 et 3. Bruxelles.

Bulletin mensuel du magnétisme terrestre de l'Observatoire royal de Belgique (1902). Bruxelles.

Bulletin météorologique de l'Observatoire royal de Belgique (1902). Bruxelles.
Ciel et Terre (1902-1903). Bruxelles.
Cosmos (1902). Paris.
Études (Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus), 1903. Paris.
Journal de l'École Polytechnique, 2e série, 7e cahier (1902). Paris.
Journal des sciences médicales de Lille (1903). Lille.
La Nouvelle-France, t. I, nos 1-12, t. II, nos 1, 2, 3 et 4 (1903). Québec (Canada).
Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (1903). Paris.
Le Progrès médical (1903). Paris.
La Réforme sociale (1903). Paris.
Revue de philosophie (1903). Paris.
La Revue générale (1903). Bruxelles.
Revue Néo-Scolastique (1903). Louvain.
Revue philosophique (1903). Paris.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux :
  Mémoires : Appendice au t. V de la 5e série, 6e série, t. I. Bordeaux.
  Procès-verbaux des séances, années 1900-1901. Bordeaux.
L'Université catholique (1903). Lyon.

Revue semestrielle des publications mathématiques, t. X, 2e partie, t. XI, 1re partie et table des matières, 1898-1902. Amsterdam.
Wiskundige opgaven met de oplossingen, nieuwe reeks, achste deel (1899-1902). Amsterdam.

Civiltà cattolica (1903). Roma.
Le matematiche pure ed applicate, vol. I, nos 1-12, vol. II, nos 1-11 (1902). Tempio (Sardaigne).
Rivista di Fisica, Matematica et Scienze naturali (1903). Pavia.
Rivista internazionale di Scienze sociali e discipline ausiliarie (1903). Roma.
La Scuola cattolica (1903). Milano.

Anales del museo nacional di Montevideo, publicados bajo la direccion de J. Arechavaleta, fasc. XXIII. Montevideo.
Anuario del Observatorio astronómico nacional de Tacubaya para el año de 1903. Año XXIII. Mexico.
Boletín del Instituto geológico de México, nos 15 et 16.
Boletín mensual de la direccion general de la estadistica de la Provincia de Buenos Aires (1900-1902). Buenos Aires.
Boletín mensual del Observatorio meteorologio del Colegio Pío de villa Colón, año XIII, nos 1-6, XIV, 1, 2, 3, XV, 4, 5, 6. Montevideo.
Boletín mensual del Observatorio de Manila bajo la direccion de los Padres de la Compañia de Jesús. Año 1901, 1er et 2d trimestre. Manila.
La Ciudad de Dios (1903). Madrid.
El criterio católico en la Ciencas medicas (1903). Barcelona.
Memorias y Revista de la Sociedad científica " Antonio Alzate ", t. XIII, nos 3 et 4, t. XVI, nos 2, 3, 4, 5 et 6, t. XVII, nos 1, 2 et 3. México.
Razón y Fe (1903). Madrid.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1902. Anno XVIII. Rio de Janeiro.

Boletín mensal do Observatorio do Rio de Janeiro (1902). Rio de Janeiro.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira, vol. XV, nº 1. Coimbra.

The Damian Institute (1903). Birmingham.

The Month (1903). London.

Stonyhurst College Observatory. Results of meteorological and magnetical Observations with report and notes of the Director (1902). Cliterhoe.

The American Catholic Quarterly Review (1903). Philadelphia.

American Chemical Journal edited by Ira Remsen, vol. 26, nos 4, 5 et 6; vol. 27, nos 1, 2 et 3. Baltimore.

American Journal of Mathematics, vol. XXIV, nº 1. Baltimore.

The American Museum of Natural History.

Annual Report of the President, 1901. New-York.

Bulletin, vol. XI, part. IV; vol. XIV; vol. XV, part. I; vol. XVII, part. I and II; vol. XVIII, part. I. New-York.

Bulletin of the American Mathematical Society, 2de série, vol. VIII, nº 10; vol. IX, nos 1 à 8, Annual Report and Catalogue of the Library (janv. 1903). New-York.

Bulletin of the Philippine Weather Bureau (Manila central Observatory), 1901. Manila.

Bulletin of the University of Kansas :

Kansas University Quarterly, juillet 1901. Lawrence.

Science Bulletin, vol. I, nos 1 à 4. Lawrence.

Catholic World (1903). Washington.

Missouri Botanical Garden. 13th Annual report (1902). St-Louis. Mo.

Occasional Papers of the California Academy of Sciences. VIII. San Francisco.

Proceedings of the California Academy of Sciences :

Botany, vol. II, nos 3 à 9.

Zoology, vol. II, nos 7 à 11; vol. III, nos 1 à 4. San Francisco.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotia Institute of Science, vol. X, part. III. Halifax, Nova Scotia.

Smithsonian Institution :

Annual Report, 1901. Washington.

U. S. National Museum, 1901. Washington.

Transactions of the Academy of Science of St Louis, vol. XI, nos 6 à 11; vol. XII, nos 1 à 8.

United States, Geological Survey. Washington.

Annual report, 1899-1900, part. II, III, IV, V, VII.

Bulletin : nos 177 à 190; nos 192 et 193.

Monography XLI.

Reconnaissances in the Cape Nome and Norton Bay Regions, Alaska, in 1900, by A. H. Brooks, G. B. Richardson, A. J. Collier and W. C. Mendenhall (1901).

The geology and mineral Ressources of a portion of the Copper River District, Alaska, by F. Ch. Schrader and A. W. Spencer (1901).

Mineral Ressources of the U. S. (1900).

U. S. naval Observatory. Report of the Superintendent for the fiscal Year ending June 30, 1902. Washington.

The University of Nebraska. Lincoln, Nebraska :

Agricultural 15th annual report.

Press bulletin, nº 16.

Bulletin, vol. XIII, nºs 70, 72, 73, 74.

Bibliotheca mathematica (1902). Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen begründet von Dr O. Böklen im Auftrag des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Würtemberg, herausgegeben von Dr A. Schmidt, Dr A. Haas, Dr E. Wolfing (1903). Stuttgart.

Monatsschrift für Christliche Sozial-Reform (1902). Basel (Schweiz).

Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. Sonderabdruck aus dem Archiv der Mathemat. u. Physik. III. Reihe; II. Band 3 u. 4 Heft; III. Band 1-4 Heft. Une broch. gr. in-8º de iv-66 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala, vol. X, part. II, nº 10 (1901). Upsala.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, XVII, nºs 1 et 2. Stockholm.

Kongl. vitterhets historie och antiqvitets Akademien Manadsblad (1897). Stockholm.

Journal de la Société physico-chimique russe de l'Université impériale de Saint-Pétersbourg, t. XXXIV, nºs 4 à 9; t. XXXV, nºs 1, 2 et 3. Saint-Pétersbourg.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀ ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins ; à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVI, 1877 à 1902.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . . . fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, 1902. Deux volumes.

Les deux volumes de 700 pages in-8°, chacun . . . . fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . fr. **2 00**

Ph. **Gilbert**. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . fr. **7 50**

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions**. *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8°; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures; 1901 . . . . 10 fr.

TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire*; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme*; 1900 . . . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique*; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres*; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures** In-4° avec nombreuses figures; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à 1793.* Grand in-8°.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

DEUXIÈME FASCICULE

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

—

1903

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

	PAGES
Session du 29 janvier 1903	89
Première Section	89
Deuxième —	96
Troisième —	103
Quatrième —	103
Assemblée générale	113
Conférence du R. P. Dierckx. S. J., sur les *Volcans de Java*	113

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La croix chez les Scandinaves d'Amérique au moyen âge, par M. Eug. Beauvois	65
Gliome ou sarcome de l'œil, par le docteur Rutten	71
De la présence de la bile dans le lait de certaines nourrices, par le docteur Alex. Faidherbe	75
Les espèces du genre " *Haemanthus* L. " (sous-genre Nerissa Salisb.) par É. De Wildeman	84
Sur quelques équations de la forme $X^2 + cY^2 = Z^3$, par le R. P. Pepin, S. J.	121

Le volume des *Annales de la Société scientifique* paraît en 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

Adresse du secrétaire : **M. Paul Mansion**, *6, quai des Dominicains, Gand.*

Hémiatrophie faciale gauche

PAR

le Dr Rutten, de Liège

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

UN CAS D'HÉMIATROPHIE FACIALE GAUCHE

PAR

le Docteur **RUTTEN**

de Liége

Je prends la liberté de vous entretenir de nouveau d'un cas d'hémiatrophie faciale, connu de la plupart d'entre vous. En effet, ceux qui ont assisté à la dernière réunion de Charleroi, ont pu examiner le sujet dont l'observation complète a été publiée dans le Bulletin de la Société scientifique du mois d'octobre 1897 (*). Pour ceux qui n'ont pas eu l'occasion de constater sur le vivant les altérations anatomiques d'une rareté telle (**) que Virchow la taxait d'extrêmement intéressante, j'ai apporté cette photogravure, faite d'après une photographie, prise quelque temps après la présentation du malade aux membres de la Société à la réunion de Charleroi.

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXII, 1re partie, p. 28.

(**) Dans la littérature médicale qui nous est accessible, nous n'avons pas trouvé de description d'un cas semblable en Belgique. C'est donc la première observation d'hémiatrophie faciale, constatée et décrite dans notre pays.

Parry et Stilling ont reconnu les premiers cette forme spéciale d'atrophie. Romberg, en Allemagne, Moore, en Angleterre, Bitot et L. Lande, en France, l'ont constatée ensuite. L. Lande, de Bordeaux, en 1869, a décrit cette affection sous le titre d'aplasie lamineuse progressive.

Parmi les savants qui ont le plus largement contribué à faire connaître l'hémiatrophie faciale, nous citerons en premier lieu Romberg. Les différents cas publiés par le pathologiste allemand ont marqué un progrès considérable dans l'histoire des hémiatrophies faciales.

Il faut citer ensuite Hueter, Virchow, Guttmann, Cahen, Lewin, Rosenthal, Mendel, Homen, etc., etc.

La photogravure tiendra lieu d'une nouvelle description des symptômes. Depuis ma première communication, deux nouveaux faits se sont présentés chez notre malade. D'abord, et c'est précisément la raison qui m'a engagé à reprendre ce cas, le sujet vient de mourir à l'âge de 30 ans, enlevé en quelques jours par une méningo-encéphalite. Il est regrettable qu'on n'ait pas pu faire l'autopsie, puisqu'il n'existe jusque maintenant qu'une seule étude nécroscopique de cette maladie : celle de Mendel, un des deux cas décrits par Virchow, la femme Kuhlike.

Deuxième particularité, qui mérite de vous être rapportée, et que je soupçonnais déjà dans mon premier travail de 1897, c'est que l'atrophie n'est pas restée localisée au côté gauche, elle est devenue bilatérale, en envahissant également le côté droit de la face. Fait curieux à constater : le trouble atrophique a commencé à côté de la première plaque de la région pariéto-frontale, mais en dehors de l'amincissement des téguments et de l'os, il n'y a pas eu perte de cheveux. L'atrophie a donc passé la ligne médiane et d'unilatérale est devenue bilatérale. Elle est descendue progressivement jusqu'à la ligne zygomatique et n'a produit, comme pour le côté gauche, aucun trouble dans le jeu de l'articulation maxillaire. Les paupières supérieure et inférieure entreprises presque en même temps ont présenté les mêmes symptômes que pour l'œil gauche. Fortement amincies, retractées et raccourcies, elles étaient devenues insuffisantes pour couvrir le globe oculaire à l'état de sommeil et ont occasionné de la kérato-conjonctivite qui a cédé comme pour le côté gauche à la fermeture de l'œil par une compresse humide. L'affection des yeux n'était donc pas une ophtalmie neuro-paralytique, mais reconnaissait comme cause le lagophtalmos. En dehors du trouble superficiel dû à la sécheresse du globe, il n'y avait aucune altération à constater à l'ophtalmoscope dans le fond de l'œil : pupille aux 3/4 dilatée, réagissant à la lumière, cristallin transparent, fond de l'œil normal, champ visuel et acuité visuelle — après la disparition des symptômes inflammatoires superficiels — non altérés. Du côté gauche, le premier atteint, la vue est restée bonne, seulement, de temps à autre, il y a eu de la conjonctivite qui était facilement combattue par le traitement. Pas d'autres troubles sensoriels. Ni le goût, ni l'odorat, ni l'ouïe n'étaient atteints par la maladie. Le système sécrétoire :

sébacé, sudoral ou lacrymal étaient indemnes. A aucun moment de la vie on n'a constaté une altération dans le système nerveux moteur ou sensitif. Sur les autres parties du corps — contrairement à ce que Virchow avait constaté chez la femme Louise Kuhlike sur l'avant-bras et l'épaule — je n'ai jamais remarqué des traces d'atrophie.

N'ayant à ma disposition que des renseignements incomplets sur les derniers moments de la vie, je ne puis me prononcer sur la question de savoir si la méningite s'est annoncée par des symptômes prodromiques, par exemple par un changement de caractère ou d'autres troubles cérébraux. Il paraît que non puisque, d'après une lettre d'un membre de la famille, l'affection méningitique s'est déclarée brusquement.

Le malade, qui n'avait jamais abandonné son travail très rude de mouleur, a assisté à une partie de jeu de balle, est allé se baigner pour se rafraîchir et a ressenti immédiatement après son bain des frissons, de la fièvre et les autres symptômes cérébraux. La mort par méningo-encéphalite est survenue après huit jours de maladie.

La *définition* de l'hémiatrophie faciale ne peut être que symptomatique puisque la cause exclusive de cette altération spéciale est inconnue. C'est une atrophie à marche progressive, atteignant tous les tissus de la région, y compris l'os, frappant un côté de la face et rarement les deux côtés, ne s'accompagnant à aucun moment de son évolution des troubles fonctionnels qui forment le cortège habituel des atrophies.

Quant à *sa fréquence* on a cru longtemps que l'affection était très rare, mais il est hors de doute que cette maladie est beaucoup plus répandue que ne semble l'indiquer le nombre très restreint des cas décrits. Comme nous le verrons dans la bibliographie, on publie actuellement des cas un peu partout. Il n'y a pas de doute que beaucoup de personnes ne soient atteintes de plaques aplasiques et ne s'en aperçoivent pas. Dans notre cas le trouble oculaire a donné l'éveil et a seul engagé le malade à aller consulter le médecin. Le fait qu'on a pris la première tache du cuir chevelu qui était accompagnée de la perte des cheveux pour de la pelade fournit une autre preuve que l'affection doit être souvent méconnue dans des cas pareils. Elle ne se distingue, en effet, de

la pelade que par l'amincissement de l'os. Il est nécessaire d'examiner à ce point de vue les pelades neurotiques unilatérales.

Causes. — L'étiologie de l'hémiatrophie faciale est encore assez vague et ne peut être établie sur aucune base certaine. La maladie s'observe déjà dans l'enfance. C'est surtout dans l'âge de dix à vingt ans qu'on la rencontre. Dans notre cas, ayant opéré l'individu de végétations adénoïdes vers l'âge de seize ans, je n'ai pas constaté d'altérations trophiques à ce moment, mais à l'âge de 19 ans, au moment où il a passé devant le conseil de revision, la plaque dans le cuir chevelu avec perte de cheveux a été la cause de son renvoi de l'armée. On peut donc dire avec certitude que l'affection a débuté vers l'âge de 17 à 18 ans.

La femme Kuhlike a commencé à ressentir les premiers symptômes vers l'âge de 23 ans.

La maladie est rare après trente ans, disent les auteurs, mais l'explication se trouve dans ce fait qu'une fois cet âge atteint, les transformations que subissent les différents tissus ne sont plus si manifestes.

L'atrophie de l'os sous forme de dépression, qui forme le caractère pathognomonique de l'hémiatrophie faciale, ne se présente presque plus lorsque l'ossification est achevée. Virchow avait déjà remarqué que les troubles osseux étaient plus prononcés quand l'affection se développe au jeune âge. Néanmoins, Berend a constaté un cas d'hémiatrophie faciale chez un malade âgé de soixante ans.

Quant *au sexe,* elle semble plus fréquente chez la femme que chez l'homme comme il a été constaté pour les affections nerveuses en général.

Le *côté gauche* est le plus souvent atteint comme pour l'hémicranie. L'hémiatrophie devient rarement bilatérale, ce qui est le cas chez notre malade. Wolff et Flashar ont également constaté la bilatéralité, mais dans ces cas il y avait d'autres troubles nerveux — atrophie du nerf optique et paralysie de l'oculo-moteur externe — indiquant une lésion centrale.

Dans tous les cas décrits jusque maintenant, la région de la face dépendant de l'innervation du nerf maxillaire supérieur a été le plus souvent atteinte, soit seule, soit conjointement avec celle innervée par la troisième branche du trijumeau; et dans ce

cas l'on a remarqué que la partie qui reçoit le nerf auriculo-temporal l'était beaucoup plus que la région du maxillaire inférieur Comme on peut le constater sur la photographie, chez notre malade la région innervée par le nerf ophtalmique de Willis l'est en entier; dans la région innervée par le nerf maxillaire supérieur, ce sont la branche collatérale du nerf orbitaire ainsi que le nerf sous-orbitaire, branche terminale du nerf maxillaire supérieur, qui sont le plus affectés. On ne peut pas dire avec certitude si la partie osseuse de la région temporale était entreprise, mais la partie tégumentaire était sûrement atrophiée.

Les *causes* vraies de la maladie sont indéterminées. Quant à notre cas, on a relevé, dans la famille, des accidents nerveux antérieurs : hystérie, attaques de migraine. Le traumatisme peut être exclu. A part l'influenza, on ne signale pas de maladie infectieuse : diphtérie, fièvre typhoïde, érysipèle assez fréquemment accusé comme cause occasionnelle (Cahen et Virchow), grippe, angines, ni même otorrhée unilatérale (Karl Decsi). On pourrait à la rigueur invoquer comme cause la présence des végétations adénoïdes dont mon malade a été opéré un an avant l'apparition des premiers symptômes. Dans les cas connus jusque maintenant, on a incriminé neuf fois le traumatisme, quatre fois l'angine, trois fois les maux de dents, sept fois l'érysipèle, quatre fois les maladies infectieuses.

On sait que la lèpre nerveuse, la morphée et la lèpre anesthésique donnent souvent lieu à des atrophies, suites de névrites périphériques (Mendel).

Symptomatologie. — Sauf les cas qui reconnaissent comme cause le traumatisme, on n'a jamais pu étudier la maladie dès son début pour la raison bien simple que les symptômes prodromiques ou accompagnant l'affection sont nuls. Ce qui a particulièrement frappé tous ceux qui se sont occupés de l'hémiatrophie faciale, c'est le point initial de la première plaque constatée sur la peau. Elle ne correspond pas toujours aux points d'émergence d'une branche du trijumeau, mais choisit indifféremment tantôt quelque endroit du domaine de la branche II, ce qui est le cas le plus fréquent, tantôt l'aire innervée par les branches I ou III du trijumeau, mais presque toujours aux extrémités du nerf. La peau devient d'abord luisante, tendue, elle est parfois pigmentée et a l'aspect

d'une cicatrice. Elle s'amincit et se rétracte. Le pli que l'on forme en la pinçant arrive bientôt à n'avoir que deux à trois millimètres d'épaisseur. Les rides du front disparaissent. La peau des deux paupières est fortement amincie et rétractée : la supérieure rentre sous l'arcade orbitaire et l'inférieure sous le globe oculaire. Il n'y a pas d'ectropion ni d'enophtalmie.

La forme du nez attire spécialement l'attention. Le cartilage a manifestement diminué de volume à gauche, ce qui est très visible sur la photographie. Seulement, trois à quatre ans après, le côté droit a subi la même transformation et le contraste n'était plus si évident. La face droite, devenue atrophique comme le côté gauche, ne différa plus de celui-ci que par l'aspect de la peau. Des muscles, l'orbiculaire des paupières paraissait seul atteint dans sa constitution, mais il ne l'était nullement dans ses mouvements.

Les paupières, quoique fortement amincies et rétractées, pouvaient se fermer complètement des deux côtés après un effort très considérable; mais pendant le sommeil elles restaient écartées, ce qui a occasionné à gauche d'abord, à droite ensuite, de la kérato-conjonctivite passagère. Les vaisseaux ne sont pas modifiés. Ils sont plus surperficiels, du fait de l'atrophie des parties molles.

La couleur des cils de même que celle des cheveux qui restent n'ont pas changé. La perte des cheveux ne s'est pas montrée à droite.

Quoique je n'aie constaté aucune complication de n'importe quelle nature, l'hémiatrophie faciale est cependant souvent accompagnée d'autres complications, soit d'une atrophie analogue sur d'autres parties du corps comme dans le cas de Mendel et de Virchow, soit d'une hypertrophie de l'autre côté de la face; d'autres fois, il y a de la sclérodermie qui est constituée par une induration toute spéciale de l'enveloppe cutanée, s'accompagnant d'un certain degré de tension et d'immobilité. Hallopeau la considère comme de même nature que l'atrophie et la désigne pour cette raison sous le nom de trophonévrose disséminée.

Emminghaus a publié l'histoire d'un malade chez lequel on pouvait constater en même temps l'atrophie unilatérale de la face et une sclérodermie du membre inférieur.

Lépine a de même relaté un cas qu'il a intitulé « Mélanodermie étendue à presque toute la surface du corps avec atrophie de la

moitié droite de la face „. Il y avait en plus sclérodermie aux doigts avec atrophie des phalangettes (Estor).

L'hémiatrophie faciale appartient souvent, dit Brissaud, à la syringomyélie.

Grasset décrit une trophonévrose alterne : atrophie cranio-faciale d'un côté et hémiatrophie du tronc et des membres de l'autre; il admet l'origine protubérantielle.

Dans ces derniers temps, le 21 mai 1897, M. Schlesinger a communiqué sous le titre d'hémiatrophie faciale progressive, à la Société Império-Royale de médecine de Vienne, un cas dans lequel on a constaté en dehors de l'atrophie à droite — téguments et os — une parésie du moteur oculaire externe, une paralysie faciale et une paralysie des nerfs glosso-pharyngiens et pneumo-gastrique. Il s'agit ici d'une hémiatrophie faciale consécutive à des lésions des nerfs cérébraux, probablement par suite d'une lésion de la base du crâne.

Tous ces cas ne sont pas des atrophies pures et doivent être distraits du groupe des hémiatrophies faciales circonscrites, ainsi que Virchow l'a proposé. De très légers troubles dans l'innervation soit motrice soit sensitive, voire la complication de l'hémiatrophie de la langue si elle est causée par une lésion du grand hypoglosse, devraient aussi en être exclus définitivement.

Dans le cas de Virchow, la langue était déviée du côté de l'atrophie, mais le malade (Schwahn) pouvait la redresser quand il le voulait.

Néanmoins Mendel, en parlant, à une réunion des médecins allemands, de l'hémiatrophie faciale, prétendait que cette affection était toujours précédée de troubles de la sensibilité, soit hyperesthésie ou anesthésie, mais qu'on avait rarement l'occasion de les constater, la maladie passant assez souvent inaperçue. Chez notre malade, on a observé à des intervalles irréguliers des douleurs névralgiques osseuses, mais ces douleurs n'étaient que passagères et ne duraient jamais plus d'un jour. Elles n'ont jamais donné lieu au plus léger trouble de la sensibilité.

Avant d'aborder l'étude pathogénique de cette affection, revenons, pour un instant, à la description de la plaque primitive. Une fois la maladie localisée dans un point de la face, la peau se montre d'habitude décolorée, blanchâtre ou même pigmentée

comme dans le cas d'Ephraïm de Breslau, et s'accompagne ensuite d'une dépression, par la raison bien simple qu'en même temps qu'elle s'étend circulairement, elle attaque le derme qui s'amincit, les parties sous-jacentes surtout le tissu cellulo-adipeux, les muscles, si elle en rencontre sur son chemin — mais sans toutefois porter atteinte à leur fonctionnement — et en dernier lieu excave le tissu osseux comme si la tache était le résultat d'une compression continue du doigt sur la peau. Ainsi que je l'écrivais dans mon premier travail l'affection détermine la formation d'une véritable cupule. S'il y a apparition d'un certain nombre d'autres taches qui finissent en se développant par devenir confluentes, elle peut s'étendre et donner lieu à un facies tout spécial, surtout si elle envahit toute la moitié de la face, et Guttmann a pu dire avec raison que sa malade était jeune fille d'un côté de la face et vieille femme de l'autre. Ces enfoncements séparés, ces dépressions multiples des téguments sous-jacents, montrent évidemment une cause locale bien circonscrite et semblent à première vue indiquer un processus indépendant du système nerveux, surtout s'ils se présentent comme dans mon cas en dehors des points d'émergence des nerfs. Ajoutez à ces faits la bilatéralité, complication qui ne s'était pas encore présentée dans la description des différentes trophonévroses pures de la face, c'est-à-dire celles où il n'y a aucun autre trouble nerveux de n'importe quelle nature.

Pathogénie de l'hémiatrophie faciale.

L'histoire du malade étant connue, il faut tâcher d'élucider la pathogénie de l'hémiatrophie faciale qui reste toujours des plus obscures. Le point essentiel en pathogénie, c'est de déterminer la nature du processus en produisant expérimentalement les lésions, propres à confirmer sa spécificité. Jusque maintenant, aucune expérience n'a pu produire les désordres que nous constatons. Nous restons donc devant des hypothèses. Il est profondément regrettable que l'autopsie n'ait pas pu être faite. A cause de mon départ pour Liége, j'ai été averti trop tard de la mort de mon malade, qui habitait les environs de Charleroi. D'abord l'hémiatrophie faciale est-elle une maladie du système nerveux?

Est-elle une maladie locale, par exemple une atrophie primitive du tissu conjonctif, comme le prétend la théorie bordelaise de Bitot et de Lande? Tel est le problème longtemps discuté et qui a été tour à tour résolu dans un sens ou dans l'autre. Quoique nous ne possédions pas les faits positifs, tous les pathologistes admettent l'intervention du système nerveux.

Les théories nerveuses s'appuient sur l'existence de troubles nerveux dans l'hémiatrophie faciale et la présence de troubles trophiques du même ordre dans les affections nerveuses. Par quel mécanisme le système nerveux arrive-t-il à produire des lésions atrophiques si diverses comme nature et comme intensité? On n'en a pas encore donné jusque maintenant une explication suffisante.

" Les uns, disent Pitres et Vaillard, ont prétendu faire dépendre les troubles trophiques de nerfs spéciaux n'ayant d'autres fonctions que de régulariser la nutrition des tissus : les nerfs trophiques. D'autres y ont voulu voir le résultat éventuel de l'irritation centrifuge des fibres nerveuses communes. D'autres pensent que les lésions des nerfs ne peuvent pas leur donner naissance et qu'ils résultent d'altérations primitives ou secondaires des centres nerveux. "

D'autres, comme Bergson et Guttmann, y ont vu la conséquence d'une lésion du système nerveux vaso-moteur dont l'irritation permanente aurait provoqué une diminution permanente du calibre des vaisseaux et par suite l'atrophie des tissus.

Emminghaus supposait, sans préciser davantage, une altération du grand sympathique qui était une paralysie pour Seeligmuller et Nicati, une excitation pour Brunner. Plus récemment MM. Déjérine et Nicati ont soutenu à nouveau cette théorie. Certains faits expérimentaux parlent en sa faveur. Déjà Brown-Sequard aurait noté à la suite de la section du grand sympathique cervical ou de l'excitation du ganglion cervical supérieur des lésions atrophiques. Plus récemment Angelucci a observé, après l'extirpation du ganglion cervical supérieur chez des chiens nouveau-nés et des chats adultes une dystrophie des os du crâne. De même les opérations pratiquées sur le tronc du sympathique ou sur les ganglions chez les épileptiques déterminent un arrêt de développement de la face.

Mais Vulpian avait déjà fait observer que les résultats expéri-

mentaux ne s'observent que chez des animaux très jeunes et ne sont pas constants (Ch. Achard et L. Levi). Quant à la théorie vaso-motrice, on peut faire remarquer en plus que les données physiologiques les plus certaines ne permettent pas d'admettre une contraction permanente du système vasculaire par irritation chronique des nerfs vaso-moteurs.

On sait, en effet, combien est fugace cette action et combien, au contraire, persiste la réaction qui la suit de près : réaction qui suffit et au delà pour rétablir l'équilibre. Nous devrions aussi avoir en plus les symptômes ordinaires de l'irritation du grand sympathique : réaction de l'ouverture pupillaire et trouble sécrétoire pour ne parler que des plus communs. D'ailleurs, il est constaté que les fonctions des capillaires dans l'hémiatrophie faciale pure ne sont nullement troublées. Virchow avait été frappé de l'intégrité presque complète des vaisseaux sanguins et était d'avis que de tous les tissus altérés la tunique des vaisseaux l'était le moins. Pour finir, qu'il me soit permis de rappeler les expériences que le Dr Cahen a faites dans des cas analogues avec le nitrite d'amyle et la pilocarpine, celles de Virchow avec les irritants appliqués sur la peau (*). Ces différents médicaments réagissent chez les sujets atteints d'hémiatrophie faciale de la même façon que chez les personnes saines. L'effet sur les capillaires est facile à constater, puisqu'ils transparaissent à travers la peau amincie (Virchow). La théorie vaso-motrice est donc insuffisante pour expliquer les troubles trophiques cutanés et osseux.

La théorie des nerfs trophiques, telle qu'elle a été formulée par Samuel, etc., ne peut pas être adoptée. L'existence des nerfs spéciaux auxquels il donne le nom de nerfs trophiques n'a jamais été démontrée. De même, le trouble trophique résultant de la section d'un nerf moteur ou nerf sensitif ne prouve nullement que les nerfs moteurs ou sensitifs contiennent des fibres spéciales, destinées à régler la nutrition des tissus auxquels ils se distribuent puisque les fibres ordinaires peuvent exercer une influence spéciale sur leur nutrition sans qu'il soit besoin de faire intervenir l'existence de nerfs hypothétiques (Vulpian).

Ces deux théories éliminées et l'élément nerveux seul admis

(*) On pourrait recommencer les expériences avec la solution d'adrénaline.

pour expliquer la cause du trouble trophique dans la trophonévrose pure d'une moitié de la face, la question suivante se présente. Est-elle d'origine périphérique ou centrale ?

Depuis les travaux de Charcot, on a voulu faire de la névrite la condition pathogénique de la production des troubles de nutrition. On a constaté que la section d'un nerf ne donnait rien, mais sa contusion ou même sa section incomplète donnent lieu à des phénomènes de névrite. On a constaté qu'après la division complète d'un nerf, il y avait diminution ou cessation de la sueur, tandis que ce même nerf étant sectionné incomplètement, la sueur est très augmentée et répand une odeur acide quelquefois insupportable.

Comme la peau, le tissu conjonctif subit, après les lésions des nerfs, diverses altérations ; tantôt il participe à l'atrophie générale du membre, tantôt, au contraire, il prend un accroissement inusité et qui peut être qualifié d'hypertrophie (Weir Mitchell) (*).

Charcot admet dans chaque cas une lésion anatomique des nerfs. De son côté, Vulpian, sans nier absolument l'intervention de la névrite, pense que les troubles trophiques sont dus surtout à l'affaiblissement ou à l'abolition d'une influence exercée par les centres nerveux sur la nutrition des organes. Charcot proclamait toutefois que toute névrite était loin d'entraîner nécessairement l'apparition de troubles trophiques ; il faut pour que ceux-ci se produisent, l'intervention de circonstances que l'analyse n'a pas encore permis de dégager.

Pour Mougeot et Couyba, la névrite est l'unique cause du développement des lésions nutritives (**).

(*) Estor a publié un cas d'atrophie de la région temporale et d'hypertrophie de la paupière gauche qui a nécessité une intervention chirurgicale.

(**) L'importance et la fréquence des névrites périphériques primitives au point de vue de la production d'un grand nombre de trophonévroses cutanées a été longuement vérifiée et complètement admise par plusieurs médecins éminents dans une série de mémoires des plus intéressants. Parmi ceux-ci, je citerai surtout le mémoire de Schwimmer sur les *Neuropatischen Dermatosen*, Vienne, 1885, l'important travail de Pitres et Vaillard sur les névrites périphériques non traumatiques, le mémoire de Déjérine sur les névrites périphériques des ataxiques, les recherches de Ballet sur les troubles trophiques observés chez les ataxiques, l'article *Dermatoneurose*, d'Amozan, dans le Dictionnaire encyclopédique des Sciences médicales, etc.

En effet, la seule autopsie qui ait été pratiquée, celle de la femme Kuhlike, faite par Mendel, a confirmé cette opinion. On a pu noter les signes matériels d'une névrite, mais ce seul fait suffit-il pour la justifier? On peut objecter en plus que si la névrite interstitielle du trijumeau a été constatée, elle peut être non primitive mais passagère. La femme Kuhlike, dont on a fait l'étude nécroscopique, fut atteinte d'hémiatrophie faciale et par conséquent de névrite durant vingt ans. En présence de cette longue durée de la névrite on ne comprend pas bien l'absence complète de troubles sensitifs et moteurs. Il est vrai que, d'après l'avis du professeur Vulpian et de beaucoup d'autres physiologistes, l'absence de troubles sensitifs dans certaines affections d'origine trophique ne prouve rien contre l'origine nerveuse de ces affections, car les altérations des nerfs périphériques ne portent pas dans ce cas sur tous les tubes nerveux, mais sur un tiers environ (vitiligo).

Jusqu'à preuve contraire, il faut donc admettre comme cause de l'hémiatrophie faciale une névrite interstitielle chronique et latente. En opposition avec le zona ophtalmique qui n'affecte ordinairement, comme son nom l'indique, que la branche ophtalmique du trijumeau et est toujours une névrite aiguë, la névrite périphérique est ici chronique. Elle est interstitielle et se traduit par une végétation scléreuse du tissu conjonctif et particulièrement de la trame conjonctivo-vasculaire. Le nerf paraît épaissi, dur, augmenté de volume par l'exubérance du tissu néoformé, souvent noueux.

La névrite dans les hémiatrophies faciales est, de plus, latente.

Que faut-il entendre par névrites latentes? „ Certaines altérations dégénératives des nerfs, même lorsqu'elles sont profondes, peuvent demeurer silencieuses, disent Pitres et Vaillard, c'est-à-dire ne se traduire par aucun symptôme assez frappant pour les déceler. Ce fait est commun chez les tuberculeux. L'examen histologique montre très souvent l'existence de lésions diffuses et considérables chez des sujets qui, au cours de leur vie, n'ont manifesté aucun trouble appréciable. Chez les cachectiques les névrites latentes ne sont point rares. De quoi dépend cette latence si complète? L'explication n'en est pas encore donnée, mais le fait seul est certain. „

Il arrive d'un autre côté que les nerfs dont la dégénération a donné naissance à des troubles trophiques peuvent récupérer par un processus de régénération leur structure anatomique et leurs propriétés physiologiques (Pitres et Vaillard). Ceci peut servir de réponse aux autopsies des hémiatrophies faciales qui ont fourni des résultats négatifs.

Toujours est-il qu'ici le processus a quelque chose d'étrange : alors que le trijumeau est atteint dans ses fibres périphériques environnant l'œil, le lacrymal, branche de l'ophtalmique, ne donne pas lieu à une hypersécrétion des larmes ; le frontal qui fournit des rameaux nerveux aux glandes de Meibomius, à la muqueuse de la paupière et à la peau qui la recouvre ne produit aucune altération sécrétoire : la peau seule est simplement amincie ainsi que le tissu sous-cutané et osseux. L'absence d'arthropathie maxillaire est également inexplicable.

La cause centrale doit être exclue pour l'hémiatrophie faciale pure, c'est-à-dire sans aucun trouble nerveux sensitif ou moteur parce que si, à la suite d'une lésion de la base, l'atrophie a été un des premiers symptômes, d'autres accidents devraient bientôt lui succéder.

Ceux qui admettent une action trophique du cerveau la localisent dans la zone rolandique ou la substance blanche sous-jacente ou dans la couche optique, comme on l'a admis pour l'atrophie précoce des hémiplégiques et des hystériques.

Pour la trophonévrose alterne, c'est-à-dire l'hémicranie faciale d'un côté, l'hémiatrophie du tronc et des membres de l'autre, on admet l'origine protubérantielle (Grasset).

Un fait définitivement acquis est le suivant : Mendel a constaté chez la dame Kuhlike la *nevritis interstitialis proliferans* du trijumeau et l'admit comme cause de la dystrophie. Déjà Virchow soupçonna, pour expliquer la névrite, une cause locale ambiante : *Als ob um die Nerven her eine krankmachende Ursache thätig gewesen sei.* Le savant pathologiste allemand jeta ainsi les premières bases de la nouvelle théorie qui reconnaît comme cause de la névrite dans l'hémiatrophie faciale un microorganisme ou poison toxique. L'opinion de Babinski est que, sauf la névrite lépreuse, toutes les autres névrites reconnaissent une cause centrale et qu'elles ne font que traduire, comme il le dit, d'une

manière discrète ou bruyante, la souffrance cachée des organes cérébraux. Si cet auteur admet la propagation infectieuse dans la lèpre, pourquoi n'interviendrait-elle pas dans l'affection qui nous occupe? On admet généralement que le poison de maladies infectieuses circulant dans le sang peut déterminer une névrite autonome semblable à celle qui résulte des injections expérimentales. L'infection diphtéritique produit des paralysies par tout le corps, mais le plus fréquemment sur le voile du palais, précisément parce que le foyer infectieux se trouve sur cet organe.

Pour expliquer ce processus, Pitres et Vaillard affirment que la fibre nerveuse est ouverte à tous les points où se fait la nutrition du segment interannulaire. Chaque étranglement représente, en effet, comme une brèche par où les substances toxiques véhiculées par les humeurs peuvent s'insinuer et, suivant leurs affinités électives, se fixer ensuite soit sur la gaine de myéline, soit sur le cylindraxe. Il est possible que si la substance toxique n'attaque que la gaine, elle ne produise que des troubles trophiques; d'où l'absence de troubles sensitifs et moteurs. Cette théorie microbienne ou toxique explique en même temps la présence de l'atrophie sur d'autres parties du corps soit de la tête, comme pour le plexus cervical dans le cas où le trouble trophique envahit la nuque, soit du bras, comme on l'a vu chez la femme Kuhlike, soit des deux côtés de la face, comme c'est le cas chez notre malade. Il est plus difficile d'expliquer d'où provient l'infection, de quelle nature elle est et pourquoi elle a une préférence spéciale pour le côté gauche. Elle peut être de nature microbienne, mais plus probablement de nature toxique. Il est actuellement admis que toutes les maladies infectieuses peuvent localiser leurs effets sur les nerfs périphériques. Même une infection à siège intestinal peut porter ses effets sur les nerfs périphériques. Le professeur Verriest, de Louvain, a examiné mon malade à ce point de vue et a constaté chez lui une dilatation très notable de l'estomac et tous les symptômes indiquant un trouble antérieur de cet organe datant de sa plus tendre enfance.

Ajoutons que les causes ordinairement admises pour l'H. F. sont les maladies infectieuses et plus particulièrement l'érysipèle et les affections attaquant la muqueuse pharyngo-buccale. On

explique même de cette façon la fréquence plus grande des affections de la branche II du trijumeau.

Il reste en dernier lieu à déterminer si le poison est la cause directe de l'obsolescence des autres tissus ou s'il agit en produisant d'abord la névrite périphérique qui, de son côté, fait naître les altérations des téguments y compris celles du tissu osseux. Il faudra bien admettre la dernière explication, sinon on pourrait difficilement se rendre compte de l'amincissement osseux qui est précisément invoqué contre la théorie bordelaise admettant une maladie du tissu conjonctif.

Il ne sera pas inutile de donner de cette dernière un résumé succinct d'après une monographie de Henri Gintrac, publiée dans le *Nouveau Dictionnaire de Jaccoud,* t. XIV, au mot *face.*

Lande, dans son travail, analysant minutieusement les observations qu'il a réunies, arrive à établir que le système nerveux tant de la sensibilité générale que de la sensibilté sensorielle, n'est pas atteint par l'atrophie spéciale qu'il étudie, que le système nerveux moteur est aussi parfaitement indemne; que le tissu musculaire conserve toute sa contractilité, toute sa puissance, qu'il n'y a pas de lésion vasculaire primitive et que le système ganglionnaire paraît être à l'état normal; que les glandes sécrètent normalement; que les parties dures enfin ne sont atteintes que secondairement.

Quel est donc d'après l'opinion émise par Bitot (de Bordeaux) et soutenue par Louis Lande dans sa thèse, l'élément anatomique qui peut ainsi disparaître d'une région sans que les actes physiologiques dont elle est le théâtre ne soient pour cela comprimés?

Il n'en est qu'un seul qu'on puisse rendre justiciable de ce contraste si singulier : le tissu cellulo-adipeux ou lamineux. Comme partout il pénètre, enveloppe, relie tous les organes, si, par la pensée on le fait disparaître, n'arrive-t-on pas précisément à la maladie dont il s'agit? N'est-ce pas lui qui, complétant le volume des organes tout en servant de support à leurs éléments propres, maintient l'équilibre de la tonicité et partant obvie à la crispation des parties? Mais l'étude des symptômes et de leur développement montre que si l'élément adipeux, la fibre de cellule et le corpuscule embryoplastique disparaissent, l'élément

élastique survit et persiste avec toutes ses propriétés physiologiques.

En résumé, Lande en rejetant l'existence d'un système nerveux trophique n'admet qu'une lésion " autopathique et protopathique du tissu lamineux „ et parvient à expliquer par elle seule tous les phénomènes observés.

Même l'amincissement de l'os est attribué à la disparition de leurs fibres de cellule et à la rétraction des éléments élastiques de leurs membranes enveloppantes et génératrices : périoste et périchondre.

En somme l'émaciation de la région n'est que le résultat de la rupture d'équilibre de la tonicité générale par diminution du tissu de support.

Cette théorie n'explique pas l'unilatéralité. Si l'élément nerveux n'est pas en jeu, pourquoi la maladie respecte-t-elle la ligne médiane?

Pour finir il s'agit de montrer quels sont les rapports de cette curieuse maladie avec certains faits qui sont entrés dans la science sous des dénominations diverses.

Contrairement aux atrophies localisées aux muscles, aux nerfs, à la peau et à la muqueuse comme dans la nérophtalmie, toutes consécutives à une cause connue, nous nous trouvons ici devant un processus qui sur un point limité ne produit pas seulement des altérations trophiques dans les téguments mous superposés, mais porte même son action destructive jusqu'à l'os sous-jacent, ce qui constitue le symptôme caractéristique de l'hémiatrophie faciale. Dans les différentes descriptions que j'ai lues à ce sujet, j'ai été étonné de ne pas avoir rencontré la comparaison de cette maladie avec la rhinite atrophique, cette autre trophonévrose qui au point de vue de la pathogénie anatomique a plus d'un rapport avec la question qui nous occupe.

En effet, à la dernière réunion de septembre 1901 des rhinologistes allemands à Hambourg, Cordes de Berlin, émit l'opinion que le fait pathognomonique de l'ozène réside dans l'atrophie du squelette des cornets, particulièrement du cornet inférieur à la suite d'un travail de résorption qui envahit la charpente osseuse. Ce processus retentit sur les vaisseaux des canalicules et des sillons osseux; la circulation souffre par défaut de voies libres,

l'épithélium s'altère à la surface des cornets (Siebenmann), le tissu sous-épithélial s'atrophie, les glandes de la muqueuse subissent des modifications de nutrition et déversent dans la cavité nasale une sécrétion anormale.

Les moyens thérapeutiques, dit Delie, devraient donc tendre à arrêter ce processus régressif. Ils sont légion les remèdes qu'on a essayés dans ce cas pour rappeler la vitalité qui s'éteint; et précisément cet insuccès dans le traitement depuis les injections de sérum antidiphtéritique et l'intercurrence d'un érysipèle jusqu'à l'électrolyse cuprique, toutes essayées sans le moindre résultat, n'est-il pas la meilleure preuve que, en dehors des nombreuses découvertes de microbes et cocco-bacilles de Lœuwenberg, d'Abel Perze et de Cozzolino, il y a en plus un arrêt dans la vitalité qui ne peut se trouver comme dans l'hémiatrophie faciale que dans le système nerveux local sous forme de névrite périphérique. N'a-t-on pas prouvé dans quelques cas que si le nerf est sectionné incomplètement, la sueur est très augmentée et répand en outre une odeur acide quelquefois insupportable? Et ne trouvons-nous pas dans l'ozène la confirmation de la théorie de Weir Mitchell, c'est-à-dire que la névrite peut aussi bien produire une hypertrophie qu'une atrophie. En effet, on y constate en même temps que l'atrophie du cornet inférieur une hypertrophie du cornet moyen, et il est difficile d'expliquer que la simple présence du microbe ou produit toxique occasionnerait dans le même organe deux effets différents et à première vue tout opposés. Il n'est pas rare de rencontrer dans l'ozène de la rhinite atrophique d'un côté et de la rhinite hypertrophique dans l'autre narine.

En résumé il faut, d'après moi, admettre et pour l'hémiatrophie faciale et pour l'ozène deux causes : l'infection microbienne ou toxique et la névrite puisque sans cela il serait difficile d'expliquer : 1° la participation de l'os dans ces deux atrophies qui semblent de nature nerveuse; 2° la propagation de la maladie dans des parties ne ressortissant plus de la même innervation : la complication d'atrophie de la nuque dans l'hémiatrophie faciale.

La marche de la maladie semble confirmer cette opinion, la déformation osseuse survenant plus ou moins longtemps après l'altération tégumentaire.

Comme *traitement* local on a préconisé surtout le massage et

l'électricité, mais sans obtenir de succès. Si la difformité dans l'hémiatrophie faciale est trop grande on pourrait essayer, comme le Dr Delie l'a proposé pour l'ozène, des injections sous-cutanées de produits paraffinés puisqu'on leur attribue la faculté de provoquer une prolifération du tissu conjonctif (*).

A côté du traitement local, il y a le traitement général surtout si l'on soupçonne un vice intérieur. Dans ce cas, il faut le chercher et si l'on peut, le traiter.

La gamme des recherches peut être étendue de même que pour la pelade: depuis la croissance excessive jusqu'aux troubles dentaires, dit Jacquet, en passant par les chocs psychiques, les lésions viscérales, les viciations du trophisme général, l'autotoxémie et leurs réactions nerveuses. Pour Borel et Demme la cause pourrait même se trouver dans une dystrophie thyroïdienne. Les tablettes de thyroïdine seraient donc indiquées dans ce cas.

Avant d'instituer le traitement général il serait toujours bon d'examiner l'urine pour voir s'il n'y a pas perturbation dans les excréta urinaires, c'est-à-dire une viciation hémo-urinaire, soit polyurie, soit élévation du coefficient de déminéralisation.

Marche. — Durée de la maladie. — Pronostic. — La marche de l'hémiatrophie faciale est lente et progressive. Des cas connus la durée a été chez la femme Kuhlike de 21 ans. Atteinte à 22 ans elle est morte d'une affection pulmonaire à l'âge de 44 ans. Chez notre malade la durée de la maladie n'a été que de treize ans; mais en revanche le premier cas décrit par Virchow, le voyageur en pathologie, le fameux Schwahn, connu du monde entier, a vécu plus de quarante ans sans que la maladie lui occasionnât la moindre gêne. Le pronostic n'est donc pas grave pour la trophonévrose faciale pure.

(*) Au moment d'envoyer le manuscrit à l'imprimerie, je viens de lire dans la SEMAINE MÉDICALE du 7 janvier 1903 que Gersung, l'inventeur de la prothèse à la paraffine, a appliqué ce procédé modifié (emploi d'un mélange de vaseline et d'huile d'olive) au traitement des difformités causées par l'hémiatrophie faciale. Il a fait usage de l'ancien procédé (prothèse dure) pour combler la fosse canine et les creux sus- et sous-zygomatiques et du second (prothèse molle) pour rémédier à l'amincissement extrême des lèvres et de la joue.

Anatomie pathologique. — Le chapitre des lésions est à faire à peu près complètement. Sauf le cas de Mendel ou une névrite du trijumeau fut constatée, on ne sait rien de positif ni sur les lésions en elles-mêmes, ni sur les causes des lésions. Rappelons que la syringomyélie est en rapport avec l'hémiatrophie dans certains cas, et qu'il y aura toujours lieu de faire un examen systématique de la moelle (Achard et Levi).

BIBLIOGRAPHIE

1. Parry, 1825, Romberg Klin. Ergebnisse, S. 80.
2. Stilling, 1840, Romberg Klin. Wahrn. S. 91. — Samuel, S. 274. — Samuel, 1860, *Die trophischen Nerven*, Leipzig.
3. Romberg-Bergson-Schott, 1846 et 1851, Klin. Erg., S. 76, Klin. Wahrn, S. 83.
4. Romberg-Lehman, 1846, Klin. Erg., S. 81.
5. Romberg-Hueter, 1848 et 1856, Klin. Wahrn., S. 90.
6. Romberg-Hueter-Axmann, 1848 et 1856, Klin. Wahrn,, S. 90.
7. Pissling, 1852, Zeitschr. d. Wien. Ges. d. Aerzte.
8. Lasègue, 1852, *Atrophie partielle de la face*, Arch. Gén. Méd., t. XXIX.
9. Hering, 1867, Arch. f. Klin. Chir., Bd. IX.
10. Barwinkel, 1868, Arch. f. Heilk, Bd. IX.
11. Rosenthal, 1868, Wien. Med. Presse, n° 16.
12. Panas, 1869, *Gaz des Hôpitaux*.
13. Meyer, 1869, Sitz B. d. Berl. Med. Ges., 17 novembre 1869.
14. Hitzig, 1869. Sitz B. d. Berl. Med. Ges., 1 décembre 1869.
15. Meyer Moritz, 1870, Berlin. Klin. Woch.
16. Lande, 1870, *Essai sur l'aplasie lamineuse progressive* (thèse), Paris.
17. Lande, 1870. Arch. gén. de la Méd., Mars 315.
18. Moore et Lande, 1870, Arch. Gén. — Moore, 1852, *Unilaterat atrophy*. Dublin Quaterly Journ.
19. Volkmann, 1870, Samlung Klin. Vortr., n° I, S. 6.
20. Emminghaus, 1872, Deutscher Archiv für Klin. Med., H. I, novembre 1872.
21. Virchow, 1880, *Louise Kuhlike, et Schwahn, Les deux cas connus du monde entier*, Berliner Klinische Wochenschrift. n° 29. — Virchow, 1859, *Untersuchungen über die Entwickelung des Schadelgrundes*, Deutsche Klinik, B. XXXIII.
22. Flashar, 1880, Berliner Klinische Wochen, 2 août.
23. Lewin G., 1884. *Studien über die beihalbseitigen Atrophien und Hypertrophien, namentlich des Gesichtes vorkommenden Erscheinungen, mit besonderer Berücksichtigung der Pigmentation*. Charité Annalen, IX, S. 619.

24. Borel, 1885, *Contribution à l'étude des asymétries du visage.* Thèse de Berne.
25. Demme, 1885, *Hemiatrophia facialis.* Thèse de Genève.
26. Beuzoldt, 1886, *Hemiatrophia facialis,* Munch. Med. Woch.
27. Bechterew, 1888, *Wjestnik psichiatrii neuropatologii,* Neur. Centralblatt, 1888.
28. Cahen, 1888 et 89, *Ein Fall von Hem. fac. progr.,* Verhandl. des Med. Vereins zu Greifswald.
29. Ruhemann, 1889, Centralbl. f. klin. Med., nº 1.
30. Rosenthal, 1889, Berl. Klin. Wochenschr.
31. Steinert (Halle), 1889, *Ueber hemiatrophia faciei.*
32. Blumeneau, 1889, *Ein Fall halbseitiger Gesichtsatrophie,* Wjestnik Psichiatrii nervopat., VII-I.
33. Ephraïm, 1889, *Ein Fall von einseitiger Gesichtsatrophie,* Berlin. Klin. Woch., nº 26.
34. Stewart, 1889, *Prof. of Phar. and Ther. Mc Gill. University,* The Montreal Med. Journ.
35. Mendel, 1888, *Travail sur l'hémiatrophie faciale avec autopsie et examen histologique,* Berlin. Klin. Wochenschrift, 7 mai.
36. Homen, 1890, *Zur Kenntniss des Hem. fac. und des Ursprungs des Nerv. Trigeminus,* Berlin. Klin. Wochenschrift.
37. Sachs, 1890, *Progressive facial hemiatrophy with some unusal Symptoms,* Medical Record, 15 mars.
38. Dreyer, 1890, *Et Tilfälde of Hemiatrophia facialis progressiva,* Hosp. Tid.
39. Gluck, 1892, Berlin. Klin. Wochenschrift.
40. Mendel, 1893, *Cas d'hémiatrophie faciale complète,* Société de Médecine berlinoise, 29 novembre.
41. P. Marie et Marinesco, 1895, *Hémiatrophie de la face et du membre inférieur avec paralysie faciale,* Société Médicale des Hôpitaux.
42. Déjérine et Mirallié, 1895, *Un cas d'hémiatrophie faciale dans un cas de syringomyélie unilatérale,* Soc. de Biologie.
43. Rutten, 1897, *Un cas d'hémiatrophie faciale gauche,* Bulletin de la Société scientifique de Bruxelles, octobre 1897, Annales, t. XXII.
44. Möbius, 1895, Vienne, *Hémiatrophie faciale.*
45. Schlesinger, 1897, *Hémiatrophie faciale progressive,* Société Imperio-Royale des Médecins de Vienne, 21 mai 1897.
46. Embden, 1898, Berlin. Klin. Woch.

Il y a encore des cas décrits par Estor, Fremy-Lépine, Hallopeau, Gibney, Eulenburg, Nixon, Gailland, Baernwald et Jendrassik.

DOCUMENTS INÉDITS SUR GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT

PAR

Henri BOSMANS, S. J.

INTRODUCTION

I

Ce mémoire peut être considéré comme la deuxième partie de celui que j'ai donné, il y a un an, à la *Société scientifique*, sous le titre : *Deux Lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent publiées avec des notes bibliographiques sur les œuvres de Grégoire de Saint-Vincent et les manuscrits de della Faille* (1). Les pièces nouvelles que je présente aujourd'hui à la Société sont au nombre de quatre :

1° La lettre de Grégoire de Saint-Vincent à Jacques van der Straeten (2), lettre dont la partie astronomique éditée jadis par Quetelet et Waldack, vient de l'être récemment encore par Favaro, mais dont je publie le texte complet pour la première fois ;

2° Les deux lettres de Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne qui se trouvent à la Bibliothèque nationale de Paris et dont je dois la copie à l'obligeance de M. Paul Tannery ;

3° L'*Elogium P. Gregorii a Sancto Vincentio*, conservé aux Archives générales du Royaume à Bruxelles.

Ces documents sont précédés de deux préambules : le catalogue de toutes les lettres de la correspondance de Grégoire de Saint-Vincent éditées jusqu'ici et dont j'aie eu connaissance ; le résumé biographique de l'illustre mathématicien brugeois précisant ses voyages et les principales dates de sa vie. Ces deux préambules ne seront pas des travaux définitifs. Il faut tenir

compte de la difficulté du sujet. Mais, fruits de longues recherches, tout incomplets qu'ils soient, ils ne manqueront cependant pas d'utilité, ne fût-ce qu'en redressant, malgré leurs lacunes, un grand nombre d'erreurs courantes. Le second facilitera d'ailleurs notablement l'intelligence des pièces publiées dans ce mémoire.

Je donne aussi, avant le texte, les compléments et les rectifications à apporter à mon premier mémoire.

II

Correspondance de Grégoire de Saint-Vincent

	Origine	Date
G. de S.-Vincent à Jacques van der Straeten. Bulletins de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 2e série, t. XXXVI, 1873, p. 89 (fragment). Collection de Précis Historiques, 2e série, t. II, 1873, p. 504, en note. — Dans un article non signé, mais dû au P. Waldack, intitulé : *Galilée au Collège Romain en 1611* (fragment). Annuaire de l'Observatoire royal de Bruxelles pour 1874, p. 255 (fragment). Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale. Volume XI. Firenze, Tipografia di G. Barbera, 1901, p. 162 (fragment). Cette lettre est publiée, ci-dessous, pour la première fois en entier.	Rome	23 juillet 1611
Mutius Vitelleschi (3) à G. de S.-Vincent. Inédite (4).	Rome	4 janvier 1625
Erycius Puteanus (5) à G. de S.-Vincent. Eryci Pvteani de qvatvor principiis diei, ab a. v. Io. Boyvinio, Cons. R. ingenii cavssa propositis : qva vnvm et vrbanianvm, uno Circulo, unâ Lineâ constitutum, stabilitur. Lovanii, Apud Ioan. Oliverivm, & Coenestivm. M.DC.XXXII. Petite brochure in-4e de 31 pp. ch. et 1 n. ch. (Bibl. des Bollandistes à Bruxelles), p. 20.	Louvain	4 janvier 1632

	Origine	Date
Erycius Puteanus à G. de S.-Vincent. De qvatvor principiis diei..., p. 22.	Louvain	13 décembre 1632
G. de S.-Vincent à Mersenne. Inédite.	Anvers	9 mai 1646
G. de S.-Vincent à Mersenne. Inédite.	Anvers	(octobre 1646) (6)
G. de S.-Vincent à A. A. (7) (Adrien Auzout). Francisci Xaverii Aynscom Antverpiani e Societate Iesv, Expositio ac dedvctio Geometrica Qvadratvrarvm Circvli, R. P. Gregorii a S. Vincentio eivsdem Societatis; cvi praemittitvr liber de natvra et affectionibvs rationvm ac proportionvm geometricarvm. Antverpiae, Apud Iacobvm Mevrsivm, Anno M.DC.LVI. In fol. (Bibl. roy. de Belg., II, 355). Liv. I, ch. VII, p. 28.	(Gand)	(1650) (8)
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres complètes de Christiaan Huygens* publiées par la Société hollandaise des Sciences, t. I, La Haye, Martinus Nijhoff, 1888, p. 147.	La Haye	6 octobre 1651
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 149.	Gand	16 octobre 1651
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 151.	La Haye	25 octobre 1651
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 152.	Gand	1er novembre 1651
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 154.	(La Haye)	(8 novembre 1651)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 158.	Gand	21 novembre 1651
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 159.	(La Haye)	26 décembre 1651
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 164.	Gand	6 janvier 1652
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. I, p. 171. Cette lettre a un appendice publié dans le même volume, p. 172.	(La Haye)	(24 janvier 1652)

	Origine	Date
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 137.	Gand	16 février 1652
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 174.	(La Haye)	(15 mars 1652)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 179.	Gand	6 avril 1652
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 264.	(La Haye)	6 janvier 1654
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 266.	Gand	15 janvier 1654
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 271.	Gand	2 mars 1654
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 280.	(La Haye)	2 avril 1654
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 288.	(La Haye)	(3 juillet 1654)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens,* t. I, p. 290.	Gand	25 juillet 1654
G. de S.-Vincent à Remi Happart. *Deux Lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent...* par H. Bosmans, S. J., publiées dans les Annales de la Société scientifique, t. XXVI, Bruxelles, 1902, p. 11.	Gand	12 avril 1655
G. de S.-Vincent à un Père du Collège de la Compagnie de Jésus à Bruxelles. *Deux Lettres...* par H. Bosmans, S. J., p. 13.	Gand	1er mai 1655
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Verandeling over Huygens als uitvinder der slinger-uurwerken,* door J. H. van Swinden [9], publiée dans Verandelingen der eerste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten te Amsterdam. Derde Deel. Amsterdam, 1817, pp. 119-120. *Œuvres complètes de Christiaan Huygens...,* t. II, La Haye, 1889, p. 285.	Gand	3 décembre 1658

	Origine	Date
Gilles Fr. de Gottigniez [10] à G. de S.-Vincent. Van Swinden, *Verandeling*, p. 120. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 472.	(Rome)	(2 août 1659)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. Van Swinden, *Verandeling*, p. 121. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 472.	Gand	24 août 1659
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 485.	La Haye	22 septembre 1659
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. Van Swinden, *Verandeling*, p. 121. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 489.	Gand	4 octobre 1659
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 500. Cette lettre a un appendice publié dans le même volume, p. 500.	(La Haye)	(décembre 1659)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 504.	Gand	5 novembre 1659
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. II, p. 542.	(La Haye)	(décembre 1659)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres complètes de Christiaan Huygens...*, t. III, La Haye, 1890, p. 59.	Gand	2 avril 1660
Gilles Fr. de Gottigniez à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 59.	(Rome)	(1660)
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 62.	(La Haye)	8 avril 1660
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 72.	Gand	26 avril 1660
Gilles Fr. de Gottigniez à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 73.	(Rome)	(avril 1660)
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 137.	Gand	10 octobre 1660
Gilles Fr. de Gottigniez à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 138.	(Rome)	(août 1660)

	Origine	Date
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres complètes de Christiaan Huygens...*, t. V, La Haye, 1893, p. 176.	Gand	26 décembre 1660
Gilles Fr. de Gottigniez à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 176.	(Rome)	(décembre 1664)
Christiaan Huygens à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 195.	(La Haye)	5 janvier 1665
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 203.	Gand	23 janvier 1665
G. de S.-Vincent à Christiaan Huygens. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 250.	Gand	27 février (1665)
G. Kinner a Löwerthum (11) à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 250.	(Prague)	(7 février 1665)
Gilles Fr. de Gottigniez à G. de S.-Vincent. *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. V, p. 251.	(Rome)	(17 janvier 1665)

III

Chronologie sommaire de la vie de Grégoire de St-Vincent (12)

Grégoire de Saint-Vincent naquit à Bruges le 8 septembre 1584.

Avant son entrée dans la Compagnie de Jésus, il fit un cours d'humanités de six ans au collège de Bruges; puis il passa à Douai, où il étudia la philosophie pendant deux ans et pendant deux autres années encore les mathématiques.

Le vendredi 21 octobre 1605, il fut admis dans la Compagnie de Jésus à Rome, où il fit le noviciat qui, suivant l'usage, se prolongea pendant deux années complètes.

En octobre 1607, le noviciat terminé, Grégoire resta à Rome, où il fut appelé aux études et y suivit des cours de philosophie, de mathématiques et de théologie. Je n'ai pu découvrir à quelle date il quitta Rome, mais ce fut vraisemblablement peu après la mort de Clavius (13) (6 février 1612). Quoi qu'il en soit, de Rome il fut envoyé à Louvain, pour continuer à suivre le cours de théologie.

Ce cours avait une durée normale de quatre ans et Grégoire le termina à la fin de l'année 1613.

Le 23 mars 1613, il fut ordonné prêtre, à Louvain.

Nous le trouvons ensuite : le 23 décembre 1613, professeur de grec au collège de Bruxelles; en décembre 1614, surveillant au collège de Bois-le-Duc; le 20 août 1615, au troisième an de probation à Courtrai.

Dès le 28 décembre 1615, les catalogues le mentionnent au collège d'Anvers, mais sans indiquer l'office qu'il y remplissait; c'est probablement à cette époque qu'il demeura pendant un an, dans les camps, en qualité d'aumônier des troupes. Un office de ce genre n'empêchait pas un religieux de la Compagnie de relever d'une maison déterminée, et son nom se trouvait alors inscrit, dans les catalogues, parmi ceux du personnel de cette maison.

En 1616 et en 1617, Grégoire de Saint-Vincent appartint à la maison professe d'Anvers ([14]).

De 1618 à 1620, il fut professeur de mathématiques au collège d'Anvers; puis, de 1621 à 1624, il remplit les mêmes fonctions au collège de Louvain. Il interrompit pendant quelques jours son séjour dans cette dernière ville, pour aller à Anvers prononcer les vœux de profès ([15]) entre les mains du P. Sucquet (3 mai 1623) ([16]).

Le 27 septembre 1625, il fut envoyé à Rome pour y enseigner les mathématiques et y être mis en relation avec le P. Grienberger ([17]). Il demeura à Rome jusque vers la fin de 1627.

A la fin de 1627 ou au commencement de 1628, Grégoire de Saint-Vincent retourna en Belgique, mais pour fort peu de temps; à peine rentré dans sa patrie, il fut envoyé à Prague, où il resta jusqu'en 1631. C'est, en 1628, pendant son séjour à Prague, au moment où, sur un nouvel ordre du général, il se disposait à partir pour l'Espagne, qu'une première attaque d'apoplexie vint l'atteindre. C'est à Prague encore que, trois ans plus tard, en 1631, il perdit la plupart de ses manuscrits, dans l'incendie qui suivit la prise de la ville par les Suédois ([18]).

De 1632 jusqu'au 27 janvier 1667, jour de sa mort, les catalogues le mentionnent, sans interruption, attaché à des titres divers au collège de Gand; mais cette longue période de trente-cinq ans contient quelques dates importantes.

En 1641, dix ans après le sac de Prague, Grégoire de Saint-

Vincent rentra en possession de la partie de ses manuscrits qui avait été sauvée des flammes, grâce au dévouement du P. Rodrigue Arriaga.

En 1646, il fit plusieurs séjours, assez prolongés, semble-t-il, à Anvers; circonstance qui s'explique par la nécessité où il se trouvait de surveiller l'édition du *Problema Austriacum* qui s'imprimait alors dans cette ville chez les Meursius et parut en 1647.

Sans entrer dans le récit de toutes les phases de la controverse soulevée par cet ouvrage, je rappellerai cependant qu'Alphonse de Sarasa prit la plume pour le défendre, en 1649 ([19]); Kinner von Löwerthum, en 1653 ([20]); enfin, François-Xavier Aynscom, en 1656 ([21]).

Je terminerai ce résumé de la vie de Grégoire de Saint-Vincent en disant que l'illustre religieux eut une seconde attaque d'apoplexie en octobre 1659 et qu'il mourut foudroyé par une troisième.

IV

Je dois une rectification au lecteur à propos des lettres de Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne.

Dans la dernière note de mon mémoire *Deux lettres inédites de Grégoire de Saint-Vincent*, je révoquais en doute leur existence ([22]). Leur présence à la Bibliothèque nationale de Paris était bien, il est vrai, signalée par M. Jacques Boyer ([23]), qui indiquait même leur cote : Nouvelles acquisitions françaises 6204-05-06. Mais en consultant, à l'endroit désigné, les catalogues de la Bibliothèque nationale par M. Léopold Delisle, je constatai avec surprise qu'ils étaient muets au sujet de Grégoire de Saint-Vincent ([24]).

M. Paul Tannery a bien voulu rectifier mon erreur et il l'a corrigée de la manière la plus gracieuse et la plus agréable pour moi, puisque, pour lever mes doutes, il m'envoie la copie des lettres de Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne, en me priant de l'offrir en son nom à la *Société scientifique*, comme annexe à mon mémoire.

Notre savant collègue me demande en même temps de bien vouloir ajouter à cette partie de la correspondance de Grégoire de Saint-Vincent les quelques éclaircissements biographiques et bibliographiques qu'elle réclame. Je suis trop heureux de me

conformer à son désir et je crois même y avoir déjà partiellement répondu en donnant ci-dessus une biographie sommaire de Grégoire de Saint-Vincent. Mais M. Paul Tannery me permettra en outre de publier un extrait de la lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire à l'occasion de son envoi. Le lecteur appréciera le haut intérêt des renseignements que M. Paul Tannery y donne sur la partie de la correspondance de Mersenne concernant plus particulièrement la Belgique.

“ Pour la correspondance de Mersenne, dit-il, contenue dans les MSS. français nouv. acq. 6204-06 de la Bibliothèque nationale de Paris, les catalogues de M. Léopold Delisle ([24]) sont tout à fait insuffisants. J'ai depuis longtemps l'idée que la publication d'ensemble de cette curieuse correspondance est une œuvre bien difficile à réaliser, tandis qu'il serait relativement facile et intéressant au point de vue du patriotisme local, de se partager la besogne, en procédant à des publications par région de résidence des correspondants. J'ai donné à titre de spécimen, la correspondance de la région bordelaise, dans un fascicule d'*Histoire des Sciences* du congrès d'Histoire comparée de Paris, 1900 ([25]), fascicule dont j'ai dirigé l'impression comme président de section.

„ Pour la Belgique, voici le bilan des lettres adressées à Mersenne et conservées dans les MSS. précités (en mettant de côté six lettres du Middelbourgeois Isaac Beeckman ([26]), dont une est exceptionnellement datée d'Anvers, les autres l'étant de Dordrecht).

„ De Louvain, trois lettres d'un Polonais, Stanislas Brudzynski ([27]), datées : V. cal. nov. 1645. — VII. cal. X^bris 1645. — 20 juillet 1646.

„ De Stenay, alors belge, une lettre d'un minime, le P. Lhomme ([28]), du 6 septembre 1639.

„ D'Anvers, les deux lettres de Saint-Vincent.

„ De Bruxelles, une lettre de Vendelin ([29]), du 15 juin 1633, intéressante. J'en ai donné, à propos de l'horloge de Linus, un extrait dans le premier volume de la correspondance de Descartes ([30]).

„ De Malines et Bruxelles, quatorze lettres de van Helmont ([31]), de juin 1630 à juillet 1631; c'est le gros morceau; ces lettres sont très curieuses, malheureusement elles sont d'une écriture très malaisée à déchiffrer. „

V

L'*Elogium P. Gregorii a Sancto Vincentio* a le mérite inappréciable d'avoir été écrit aussitôt après la mort de l'illustre religieux ([32]) et d'être un document unique en son genre. En dehors de ce qu'il nous raconte nous ne savons presque rien de la vie si mouvementée de Grégoire de Saint-Vincent. Le sac de Prague, la perte de ses manuscrits, le sauvetage de quelques-uns d'entre eux par Rodrigue Arriaga nous sont connus, il est vrai, par le récit ému qu'en fait Grégoire lui-même dans la préface du *Problema Austriacum.* Quelques traits de son caractère sont narrés en peu de mots par Alphonse de Sarasa ([33]); mais c'est tout. Quant aux catalogues ou annuaires de la Compagnie ils sont, on le sait, des plus laconiques. A côté de chaque nom ils indiquent sommairement l'office attribué pour l'année courante, mais rien de plus.

Pour peu qu'on veuille confronter avec l'*Elogium,* la notice consacrée par Goethals à Grégoire de Saint Vincent ([34]), on s'aperçoit que l'auteur a fait à l'*Elogium* les plus larges emprunts. On peut en dire à peu près autant de la notice de Quetelet ([35]). Il y a donc tout intérêt à mettre à la disposition des érudits le texte même du document original que ces historiens ont mis en œuvre.

On connaît l'usage de la province Flandro-Belge de la Compagnie de Jésus au dix-septième siècle. Il y était de tradition au décès de chacun de ses membres, de consacrer au défunt une courte notice biographique. On en conserve encore aujourd'hui un grand nombre aux Archives générales du Royaume ([36]).

Ces biographies sont presque toutes écrites sur un ton de panégyrique d'assez mauvais goût et qui nous choque. Il ne faut attacher à ce style qu'une importance toute secondaire. Ce n'est pas par leurs coups d'encensoir à la mémoire du mort que les *Elogia* ont du prix, mais bien par les faits dont seuls souvent ils nous ont gardé le souvenir. A ce point de vue ils sont des plus utiles. On peut en général s'y fier pour tout ce qui concerne le caractère, les habitudes, la régularité, la piété du religieux dont ils retracent la vie. Les *Elogia* n'étaient pas destinés à être communiqués au public étranger à la Compagnie. Lus au réfectoire pendant les repas, devant les amis du défunt, qui tous avaient

vécu dans son intimité, il ne leur était guère possible d'en retracer un portrait fort différent du modèle que les auditeurs avaient connu. En un mot, c'étaient des espèces d'oraisons funèbres, mettant en relief les qualités et voilant les défauts, mais faisant somme toute fidèlement revivre l'homme.

L'*Elogium* de Grégoire de Saint-Vincent nous apprend l'un des événements de sa vie les plus importants et qui néanmoins avait jusqu'ici passé assez inaperçu.

Dans la préface du *Problema Austriacum* Saint-Vincent se plaint d'une paralysie dont il fut atteint à Prague et dont il mit cinq ans à se guérir ([37]). Il se plaint aussi des défaillances de sa mémoire. Lorsqu'en 1641, dit-il, il reçut à Gand les manuscrits sauvés par Arriaga, il avait oublié presque tout ce qu'ils contenaient ([38]). Cet affaiblissement de la mémoire, il l'attribuait, lui, à son grand âge. Mais cette raison fait sourire. Il n'avait encore que 57 ans! Il fallait en chercher une autre cause. Nous la connaissons aujourd'hui et, encore une fois, c'est l'*Elogium* qui nous l'apprend.

Dès 1628, Grégoire de Saint-Vincent eut à Prague une première attaque d'apoplexie. Il ne s'en remit plus qu'imparfaitement.

Cette année 1628 marque la fin de sa grande activité scientifique. Jamais, par exemple, il ne semble avoir songé à mettre une seconde fois par écrit ses idées sur la mécanique; à rédiger de nouveau ce traité de statique pour lequel il conserva toujours une prédilection marquée, traité complètement achevé et qui périt à Prague : " Inter plurima, quæ istic deperdita, liber erat quo totam Staticam, geometrice ex Archimedis deductam principiis comprehenderam, justæ spissitudinis tomo ([39]). „

Sans doute sa vigoureuse constitution l'emporta, ses admirateurs et ses amis purent même se faire l'illusion de le croire guéri, mais ses brillantes facultés ne retrouvèrent cependant plus leurs forces premières. Comme Fermat et tant d'autres, Grégoire de Saint-Vincent a fait toutes ses grandes découvertes dans sa jeunesse ([40]).

VI

J'ai établi dans mon premier mémoire consacré à Grégoire de Saint-Vincent qu'on imprima à Louvain des énoncés de thèses défendues sous sa présidence, en 1619, en 1623 et en 1624 ([41]). Mais

j'y ai dit aussi, après Goethals ([42]), que les *Theses de Cometis,* c'est-à-dire les thèses de 1619, avaient été défendues dans la ville universitaire. Cette dernière assertion est erronée. En 1619, Grégoire de Saint-Vincent était professeur à Anvers et c'est à Anvers que les *Theses de Cometis* furent défendues. Les documents manuscrits conservés aux Archives générales du royaume ne laissent aucun doute à ce sujet. A preuve ce curieux passage de l'histoire du collège d'Anvers ([43]).

„ Anno 1619..... Mathematici — il s'agit des scolastiques de la Compagnie de Jésus, élèves de Saint-Vincent dans la classe de mathématiques — Mathematici quoque magnam sibi apud peritiores opinionem doctrinae compararunt. Nam visus hoc anno Cometes eorum industriam plurimum acuit. Saepe enim dioptrices machinis usi, omnes ejus varietates omnemque cursum observarunt. Et vero quas nostri Antverpiae collegerunt observationes prae caeteris alibi collectis, intellectum est placuisse viris ea aetate, peritissimis. Cum vero typis evulgatae observationes illae publice defenderentur, tantus fuit auditorum ex ordine concursus, ut non problemata de Cometis sed Comoediam spectare viderentur. „

Goethals a emprunté à l'*Elogium* ce qu'il dit des *Theses de Cometis*. Une confrontation, même sommaire, des deux récits le montre à l'évidence. Grégoire de Saint-Vincent ne fut attaché au collège de Louvain qu'à partir de 1621. La tapageuse soutenance de thèses, qui y fut présidée par Grégoire et dont l'*Elogium* nous a conservé le récit, ne peut donc avoir eu lieu dès 1619. D'autre part, cette soutenance fut la première tenue à Louvain. Elle ne saurait donc être non plus postérieure à 1623, puisque nous savons que cette année-là même, Grégoire fit défendre publiquequement, à Louvain, des thèses de mathématiques ([44]). Peut-être est-ce de 1623 qu'il faut la dater.

J'ai déjà dit aussi dans mon premier mémoire ([45]), qu'au témoignage de Daniel Papebrochius ([46]), les thèses de 1624 eurent probablement encore plus d'éclat que les précédentes et qu'elles retentirent dans l'Europe entière.

Pour être vrai je dois bien avouer que tout ce bruit semble avoir été fort peu du goût du provincial le P. Florent de Montmorency ([47]) et du général le P. Mutius Vitelleschi ([48]).

En janvier 1625, Vitelleschi écrit à de Montmorency ([49]) que si

Grégoire de Saint-Vincent lui paraît avoir des allures trop compromettantes à Louvain, et que s'il a quelqu'un sous la main pour le remplacer, il peut le retirer du collège de cette ville; lui-même, général, se chargera de trouver une autre position pour Grégoire de Saint-Vincent.

Dès cette date le provincial de la Flandre-Belgique semble avoir songé à envoyer Grégoire de Saint-Vincent à Prague, car le 15 février 1625 Vitelleschi lui écrit de nouveau (50) :

« Patrem Gregorium a Sancto Vincentio nolim pro mathematico in Bohemiam mitti, cum verear ne ea quae Reverentia Vestra istic in ipso non omnino probat, in alia provincia etiam displiceant ».

Quels étaient ces défauts de Grégoire de Saint-Vincent, dont se plaignait Florent de Montmorency; défauts dont Grégoire ne devait jamais se corriger et qui allaient pendant sa vie entière causer des soucis et des tracas à ses supérieurs?

Les lettres de Mutius Vitelleschi ne le disent pas en termes exprès, mais il n'est pas difficile de les deviner. En physique et en astronomie Grégoire était un partisan des doctrines nouvelles et ne se faisait pas faute de manifester ses opinions. Il avait surtout le tort, grave alors et même dangereux, de ne pas cacher son dédain pour les théologiens et les philosophes.

Dès le début de sa carrière, professeur à Louvain, il soulève, par un manque de courtoisie à leur égard, une tempête de protestations chez les théologiens de l'Université. Le rédacteur de l'*Elogium*, qui n'y voit évidemment pas malice, fait un récit piquant de cette scène.

Au déclin de sa vie, dans une lettre du 4 octobre 1659, nous entendons le vieux Grégoire se ranimer en racontant à son jeune ami Christiaan Huygens (51), la mémorable séance du mois de mai 1611, tenue au Collège Romain, en présence de Galilée, séance dans laquelle lui Grégoire, le brillant élève à cette époque de Clavius et de Van Maelcote, avait déjà joué son rôle. Nous y avions des télescopes, dit-il, au moins aussi parfaits que celui de Galilée et nous avons montré à tout l'auditoire que Vénus tournait visiblement autour du soleil. Puis il ajoute avec un malin plaisir, que cette démonstration, il l'avait faite « non absque philosophorum murmure (52) ».

Les avertissements et les remontrances ne durent pas lui man-

quer, car le 21 août 1632, peu après le retour de Grégoire de Saint-Vincent en Belgique, Mutius Vitelleschi écrit au P. de Wael ([53]), alors provincial de la Flandre-Belgique ([54]) :

" P. Balthazarum Cordier ([55]) et P. Gregorium a Sancto Vincentio incolumes in Belgium venisse gaudeo. P. Balthazarum valde commendo; optime enim se in Austria gessit, neque ulla sua culpa istinc est dimissus, sed quod, afflictis Germanicis provinciis, personis Austria abundaret, minusque illius opera egeret.

„ P. Gregorium a Sancto Vincentio etiam Reverentiae Vestrae caritati commendo. Quia tamen ille natura liberior est, ac subinde superioribus suis gravis, peculiarem habeat illius curam, neque dubitet paulo majori fortitudine uti, ut eum, sicubi exorbitavit, in officio contineat ([56]). „

Pour comprendre aujourd'hui les préoccupations et les ennuis que la liberté de parole de Grégoire de Saint-Vincent causait à ses supérieurs, il ne faut pas perdre de vue que l'on était alors en plein procès de Galilée ([57]).

VII

Un mot, pour terminer, au sujet de l'orthographe que nous avons adoptée dans le texte des documents.

Grégoire de Saint-Vincent, suit les usages de son temps. Il emploie le *v* comme lettre initiale, l'*u* dans le corps des mots; le *j* comme seconde lettre dans le couple *ii*, et parfois comme initiale. Quant à l'auteur de l'*Elogium*, il ne suit, peut-on dire, aucune règle. C'est ainsi qu'il écrira *ut* et *vnum*. Je me suis conformé à l'exemple que me donnait M. Paul Tannery, en maintenant la distinction entre l'*u* et le *v*, d'après les habitudes modernes; mais j'écris toujours *i* au lieu de *j*.

L'auteur de l'*Elogium* fait toujours surmonter l'*y* de deux points. C'est l'orthographe des écrivains des Pays-Bas au XVII^e siècle. Les exigences de la typographie m'ont empêché d'employer ce caractère, mais je crois plus rationnel d'écrire alors *y* plutôt que *ij*, comme le font les éditeurs des *Œuvres de Christiaan Huygens* ([58]).

Enfin les majuscules, qui commencent les phrases dans le texte de l'*Elogium*, n'existent pas dans le manuscrit, où elles sont toujours remplacées par des minuscules. Il en est de même pour les majuscules de quelques noms propres.

NOTES DE L'INTRODUCTION

(1) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XXVI, année 1901-1902, 2e partie, pp. 22-40.

J'aurai fréquemment à citer ce mémoire. Je me servirai pour cela des numéros de la pagination qui lui est spéciale, pagination qui est aussi celle des tirés à part. Quant au mémoire lui-même, je le désignerai en abrégé par les mots : *Deux Lettres.*

Je désignerai aussi en abrégé le grand ouvrage de Grégoire de Saint-Vincent par les mots : *Problema Austriacum.* Il n'est cependant pas inutile d'en rappeler le titre complet :

Faux-titre : *P. Gregorii a Sto Vincentio opvs geometricvm qvadratvrae circvli et sectionvm coni Decem libris comprehensvm.*

Titre gravé par Cornelius Galle junior, d'après Abraham a Diepenbeke : *Problema Avstriacvm Plvs Vltra Qvadratvra Circvli Auctore P. Gregorio a Sto. Vincentio Soc : Iesu. Antverpiae, apvd Ioannem et Iacobvm Mevrsios. Anno M.DC.XLVII. Cum priuilegio Caesareo et Regis Hispaniarum.* In fol.

L'ouvrage n'est pas rare dans les bibliothèques publiques de Belgique. Je me suis servi de l'exemplaire de la Bibliothèque Royale de Belgique, coté V. H. 8127.

(2) Le P. Jacques Stratius ou van der Straeten naquit à Anvers en 1559 et entra dans la Compagnie de Jésus en 1580. Il fut recteur des collèges de Louvain et de Bruges et provincial de la Flandre-Belgique. Il est auteur d'un assez grand nombre d'ouvrages de piété dont on peut voir la liste dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel, t. VII, Bruxelles, 1896, coll. 1627-1630.

(3) Mutius Vitelleschi, né à Rome, le 2 décembre 1563, et entré dans la Compagnie de Jésus, le 15 août 1583. Il en fut élu général, le 15 novembre 1615, et mourut à Rome, le 9 février 1645.

(4) L'original est perdu, la minute est en possession de l'Ordre. Je ne connais le texte que par une copie appartenant au Collège Notre-Dame à Anvers, faite sur la minute. Je n'ai donc pas voulu le publier parmi les pièces principales, mais je le donne dans la note (19) du texte, p. 38 ci-dessous.

(5) Erycius Puteanus ou van de Putte naquit à Venloo, dans le Limbourg Hollandais, le 4 novembre 1574, et mourut à Louvain le 17 septembre 1646. Il était lié d'amitié avec Juste-Lipse qu'il remplaça comme professeur à Louvain après sa mort en 1606.

Puteanus est surtout célèbre comme humaniste, mais ne fut pas dénué de valeur dans les sciences.

Une bibliographie assez étendue de ses œuvres a été donnée dans les *Mémoires pour servir à l'histoire littéraire des XVII provinces des Pays-Bas...* de Paquot, Louvain, M.DCC.LXX, t. III, pp. 90-108.

J'ai déjà signalé dans mon mémoire précédent (p. 8) la correspondance manuscrite, inédite jusqu'aujourd'hui, de Puteanus avec l'astronome belge van Langren, correspondance conservée à la section des manuscrits de la Bibliothèque Royale de Belgique, sous les cotes 19837-19838.

(6) J'ai placé entre parenthèses les dates, les lieux d'origine et les noms de personne qui ne sont pas exprimés explicitement dans les lettres ou dans leur adresse, mais qu'il a fallu reconstituer.

(7) Adrien Auzout, l'un des premiers membres de l'Académie des Sciences, naquit à Rouen, au commencement du XVIIe siècle, et mourut à Paris en 1691.

On a nommé deux destinataires de la lettre de Grégoire de Saint-Vincent, Auzout et Roberval. Il n'est pas douteux cependant qu'elle n'ait été adressée à Auzout. La lecture de la " Responsio I ad Censorem A. A. " dans l'*Expositio* d'Aynscom (pp. 104-111) montre clairement, en effet, que le " Censor A. A. " (Adrien Auzout) auquel Saint-Vincent écrit la lettre (p. 28), est parfaitement distinct d'un autre personnage appelé par Mersenne " Noster mathematicus Æ. R. " (Ægidius Robervallius).

L'attribution à Roberval est due à une assez singulière erreur commise par le P. Castel, S. J., dans la préface qu'il écrivit pour l'*Analise des infiniment petits, comprenant le calcul intégral dans toute son étenduë; avec son application aux quadratures, Rectifications, Cubatures, Centres de Gravité, de Percussion, &c., de toutes sortes de Courbes. Par M. Stone, de la Société Royale de Londres : servant de suite aux infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital : Traduit en François par M. Rondet, Maître de Mathématiques. A Paris, Chez Julien-Michel Gandouin, Quai de Conti, aux trois Vertus : et Pierre-François Giffart, ruë Saint-Jacques, à Sainte Thérèse. M.DCC.XXXV. avec approbation et privilège du roi*, in-4o. (Je dois à la bienveillance de M. Paul Mansion la communication de cet ouvrage.) — Dans cette préface, le P. Castel dit en termes exprès (p. LII) : " C'est par ces deux lettres A. A. que Grégoire et Aynscom désignent M. de Roberval; " mais il ne donne aucun argument pour justifier son assertion.

M. Paul Tannery m'écrit à ce sujet : " L'erreur de Castel peut provenir de ce que le 9 juillet 1649, Carcavi écrivait à Descartes (*Clers.* III, p. 441) que Roberval se proposait de répondre à Sarasa (dans une réimpression de la *Perspective* de Nicéron), tandis que le 24 septembre 1649, il disait (*Clers.* III, p. 451) que l'on avait ici (à Paris) répondu en peu de mots (à Sarasa). Il était naturel d'induire de là (à tort, il est vrai), que la réponse était de Roberval. "

Puisque l'occasion s'en présente ici, je relèverai une erreur d'un autre genre que commet Kaestner, dans sa *Geschichte der Mathematik*, dritter Band, Göttingen, 1799, p. 249, en attribuant cette préface à Rondet. Dans son *Histoire des Mathématiques* (t. II, part. IV, liv. I, No X, p. 80), Montucla dit avec raison qu'elle est du P. Castel. D'abord il semble que la chose soit exprimée explicitement au titre de certains exemplaires. Ainsi, dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, t. II, Bruxelles, 1891, coll. 829, les PP. De Backer et Sommervogel donnent le titre de l'ouvrage comme suit : *Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul intégral dans toute son étendue, par M. Stône, traduit en françois par M. Rondet, avec une préface du Père Castel.* Paris, Gaudouin et Giffart, 1735.

Mais il est un autre argument à lui seul décisif.

Castel, on le sait, était l'un des principaux rédacteurs des *Mémoires de Trévoux*. Or les *Mémoires* pour 1736 contiennent une analyse (pp. 1095-1118) de l'ouvrage de Stone, dans laquelle le P. Castel est nommé comme l'auteur du

discours préliminaire. " L'auteur anonyme de cette Préface, écrit le rédacteur du compte rendu, est, dit-on, le P. Castel, jésuite " (p. 1118). Malgré le ton un peu dubitatif donné à la phrase, elle équivaut à une affirmation. Un rédacteur du *Journal de Trévoux* savait à quoi s'en tenir.

(8) La lettre de Grégoire de Saint-Vincent ne porte ni date, ni lieu d'origine. Cependant il n'est guère douteux qu'elle ait été écrite en 1650. En effet, l'*Expositio* d'Aynscom est de 1656. Or l'auteur y dit (liv. I, chap. VII, p. 27) qu'il y a six ans que Grégoire de Saint-Vincent attend la publication de l'attaque dont il avait été l'objet de la part de A. A. (Adrien Auzout), attaque dont, suivant un usage alors très fréquent, il avait eu une communication manuscrite.

En 1650, Grégoire de Saint-Vincent résidait à Gand.

(9) Les PP. De Backer et Sommervogel n'ont pas connu cette édition, par van Swinden, des lettres de Grégoire de Saint-Vincent. Voir *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, 1re partie, t. VII, Bruxelles, 1896, coll. 440-443.

(10) Gilles François de Gottigniez naquit à Bruxelles, le 10 mars 1630, et entra dans la Compagnie de Jésus, le 9 novembre 1653. Il passa presque toute sa vie à Rome, au Collège Romain, où il enseigna les mathématiques de 1662 à 1687. Il mourut le 6 avril 1689.

De Gottigniez écrivit de nombreux ouvrages sur les mathématiques, la mécanique et l'astronomie. On en peut voir le détail dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel, t. III, Bruxelles, 1892, coll. 1624-1626. Il y a en outre à la section des manuscrits de la Bibliothèque Royale de Belgique : *Tractatus de Panthometro siue Circino Proportionis Authore Ægidio Francisco de Gottignies Bruxellensi In collegio Romano Matheseos Professore* (II, 500) ; traité inédit, qui n'est pas signalé par les savants bibliographes.

(11) Gottfried Aloys Kinner von Löwerthum naquit vers 1610 à Reichenbach, en Silésie. Il devint docteur en philosophie et en droit. L'empereur Léopold Ier l'appela à Vienne pour le charger de l'éducation de l'archiduc Karl Joseph. En 1653, Kinner von Löwerthum se rendit à Prague où il devint, en 1670, supérieur du Chapitre " Zu aller Heiligen ". On ne connaît pas la date exacte de sa mort.

Voir note (20) ci-dessous, p. 18.

(12) Je me suis servi de l'*Elogium* publié ci-dessous, de la préface du *Problema Austriacum*, mais surtout des anciens catalogues manuscrits ou annuaires de la Compagnie conservés, soit aux Archives générales du Royaume à Bruxelles, soit dans diverses maisons de la Compagnie.

(13) Christophe Clavius naquit à Bamberg en 1538, entra dans la Compagnie de Jésus en 1555 et mourut à Rome, le 6 février 1612. Grégoire XIII l'employa à la réforme du calendrier et le chargea de justifier cette réforme contre les attaques des protestants. Il n'existe pas à ma connaissance de bonne biographie de Clavius. Quant à la bibliographie de ses œuvres, elle est donnée dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel, t. II, Bruxelles, 1891, coll. 1212-1224.

(14) La Compagnie avait deux maisons à Anvers : un collège et une maison professe.

(15) Dans ses *Lectures relatives à l'histoire des sciences, des arts, des mœurs et*

de la politique en Belgique, t. IV, Bruxelles, 1838, p. 169, Goethals dit, par erreur, que Grégoire de Saint-Vincent prononça ses premiers vœux à Courtrai. Cette cérémonie eut lieu à Rome en 1607. Saint-Vincent fit à Courtrai, à la fin de 1615, quelques mois de 3e an de probation et prononça les quatre vœux de profès à Anvers, le 3 mai 1623. J'ai eu sous les yeux la minute originale, conservée aux Archives générales du Royaume et qui est, suivant l'usage, écrite en entier, datée et signée de sa main.

[Arch. des jésuites, province Flandro-Belge, N° 597, farde 2, renfermant les actes originaux des profès des quatre vœux de 1611 à 1625].

(16) Antoine Sucquet, né à Malines, le 15 octobre 1574, entré au noviciat de la Compagnie de Jésus à Tournai, le 28 avril 1597, mort le 16 février 1627.

(17) Christophe Grienberger naquit en 1564 à Hall, en Tyrol, et entra dans la Compagnie de Jésus au mois d'août de l'année 1590. Il enseigna les mathématiques en Autriche et à Rome où il remplaça Clavius. Il y mourut le 11 mars 1636.

Voir la bibliographie de ses œuvres dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel, t. III, Bruxelles, 1892, coll. 1810-1812. Il faut la compléter cependant par Cantor, *Vorlesungen über Gesch. der Math.*, 2e édit., t. II, p. 662.

(18) Dans la préface de son *Problema Austriacum* [pp. b_3 v°- (b_4) r°], Grégoire de Saint-Vincent lui-même a fait un récit émouvant de l'histoire de la perte de ses manuscrits.

(19) Voir *Deux Lettres*, note 54, p. 18.

(20) *Elucidatio geometrica problematis Austriaci sive Quadratura circuli feliciter tandem detectae per R. P. Gregorium a Sto Vincentio S. I. clarissimum et subtilissimum aevo nostro geometram, in defensionem proposita et publico matheseos amatorum judicio exposita, auctore Godefrido Aloïsio Kinnero a Löwerthum Silesio Reichenbachense. A. a reparata salute 1653. Pragae.* — A la fin : *Pragae ex typographia Academica, 1654.* In-4° (Bibl. Roy. de Belg., V. H. 8125).

(21) Voir *Deux Lettres*, note 51, p. 18.

(22) Note 54, p. 19.

(23) Intermédiaire des mathématiciens, t. II, 1895, p. 6, quest. 419.

(24) Ce sont les catalogues cités dans *Deux Lettres*, note 54, p. 19.

(25) Annales internationales d'Histoire, Congrès de Paris, 1900, 5e section. — *Histoire des Sciences*, Paris, Colin, 1901. — *Lettres inédites adressées au Père Mersenne*, pp. 311-343. J'ai rendu compte de cet article de M. Paul Tannery dans le numéro d'avril 1902 de la Revue des Questions scientifiques, pp. 678 et 679.

(26) Isaac Beekman ou Beeckman naquit à Middelbourg, en Zélande, vers 1570, et mourut à Dordrecht, le 20 mai 1637. C'est à tort que Quetelet, dans son *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, Bruxelles, Hayez, 1864, p. 183, le fait naître à Middelbourg dans la Flandre Orientale.

Beeckman est surtout connu comme correspondant de Descartes. Voir sur ce sujet : *Histoire du Cartésianisme en Belgique*, par l'abbé Georges Monchamp, Bruxelles, Hayez, 1886, ch. II, § 1, pp. 28-31, et *Isaac Beeckman et Descartes, à propos d'une lettre inédite de Descartes à André Colvius*, par G. Monchamp, correspondant de l'Académie (Bull. de l'Acad. roy. des Sc., des Lett. et des Beaux-Arts de Belg., 3e sér., t. XXIX, Bruxelles, 1895, pp. 117-148).

(27) Je n'ai pas trouvé de renseignements sur ce personnage.

(28) Je n'ai pas trouvé de renseignements sur ce religieux.

(29) Godefroid Wendelin, né à Herk, au pays de Liége, le 6 juin 1580, mort on ne sait exactement en quelle année, mais probablement à Renaix, en 1660.

Wendelin est un savant de grand mérite que M. Le Paige a fait connaître dans deux excellentes notices qui se complètent mutuellement :

Notes pour servir à l'Histoire des Mathématiques dans l'ancien Pays de Liége (Bulletin de l'Institut archéologique liégeois, t. XXI, Liége, 1888, pp. 506-523).

Un astronome belge du XVII^e^ siècle, Godefroid Wendelin, par C. Le Paige (Bull. de l'Acad. roy. des Sc., des Lett. et des Beaux-Arts de Belg., 3e série, t. XX, Bruxelles, 1890, pp. 709-727).

(30) *Œuvres de Descartes* publiées par Charles Adam et Paul Tannery, sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Correspondance I, avril 1622-février 1638, Paris, Léopold Cerf, 1897, p. 269 en note.

François Line, Linus ou Hall, naquit à Buckingam ou à Londres en 1595 et entra dans la Compagnie le 23 août 1623. Il fut dix-sept ans employé dans les missions en Angleterre et enseigna l'hébreu et les mathématiques pendant vingt-deux ans au collège des Anglais à Liége. Il y mourut le 25 novembre 1675.

Son traité sur les horloges est intitulé :

Explicatio Horologii in horto regio Londini in Anglia an. 1669 erecti, in quo plurima horologiorum sciatericorum genera continentur : qvibvs praeter omnis generis horas diversimode expressas, multa etiam ad Geographiam, Astrologiam et Astronomiam spectantia, per Solis umbram oculis cernenda subjiciuntur. Inter quae, plurima, et potissimè magis curiosa, noviter inventa, et a nemine hactenus tradita reperiuntur. Quae omnia breviter et dilucide publicae utilitati exponit Reverendus Pater Franciscus Hallus, aliàs Linus, Societatis Jesu, Matheseos Professor. Leodii Eburonum, Apud Guilielmum Henricum Streel, Suae Celsitudinis Typographum, 1673, Superiorum permissu, in-4° (Bibl. de l'Univ. de Liége, I, 105, 2).

Il existe de cet ouvrage une édition anglaise sous le titre :

An explication of the Diall sett up in the King's Garden at London, an. 1669. In which very many sorts of Dyalls are conteined; by which, besides the Houres of all kinds diversly expressed, many things also belonging to Geography, Astrology, and Astronomy, are by the Sunnes shadow made visible to the eye. Amongst which very many Dialls, especially the most curious, are new inventions, hitherto divulged be None. All these particulars are shortly, yet clearly sett forth for the common good, by the Reverend Father Francis Hall, otherwise Line, of the Society of Jesus, Professor of mathematicks. Printed at Liege, by Guillaume Henry Streel, in the Yeare of our lord, 1673. Superiorum permissu, in-4° (Bibl. de l'Univ. de Liége, I, 118, 1).

Il existe en outre à l'Université de Liége un travail manuscrit et inédit du P. Linus sur le même sujet : *R^di^ P. Lini Tractatus de Horologiis*, 82 pp., in-4° (Bibl. de l'Univ. de Liége, *Catalogue des Manuscrits*, Liége, 1875, p. 261, N° 457).

Voir pour plus de renseignements sur l'horloge de Linus :

Bibliothèque de la Compagnie de Jésus des PP. De Backer et Sommervogel, t. IV, Bruxelles, 1893, coll. 1840-1842.

Le Paige, *Notes pour servir à l'Histoire des Mathématiques dans l'ancien Pays de Liége*, pp. 525-529.

Monchamp, *Galilée et la Belgique*, ch. X : L'Horloge du P. Linus, pp. 127-141.

(31) Jean-Baptiste van Helmont, philosophe, chimiste et médecin, naquit à Bruxelles en 1577 et mourut à Vilvorde, le 30 décembre 1644.

Il existe dans les MÉMOIRES IN-4° DE L'ACADÉMIE ROYALE DE MÉDECINE DE BELGIQUE pour 1866 (t. VI de la collection), deux travaux importants sur van Helmont :

Dr W. Rommelaere, *Études sur J.-B. van Helmont*, pp. 281-552.

Dr A. J. Mandon, *J.-B. van Helmont, sa biographie, histoire critique de ses œuvres et influence de ses doctrines médicales sur la science pratique de la médecine jusqu'à nos jours*, pp. 553-739.

Ces mémoires débutent l'un et l'autre par une notice biographique de van Helmont, mais le travail du Dr Rommelaere contient en outre une bibliographie très détaillée, dans laquelle toute l'œuvre du célèbre médecin est minutieusement décrite et analysée (2e partie, pp. 327-351).

(32) Comme nous le ferons remarquer plus loin (p. 42, note (33) du texte), il est antérieur à l'apparition de l'*Opus posthumum*, édité en 1668, et date par conséquent de l'année même de la mort de Grégoire de Saint-Vincent, ou tout au plus tard de l'année suivante.

(33) *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi... Antverpiae, Apud... Meursios... M.DC.XLIX* (Bibl. Roy. de Belg., V. H. 8127), pp. 18-22, dans l'avis, *Lectori benevolo*, intercalé entre les deux parties dont se compose l'ouvrage.

Montucla faisait déjà remarquer la pénurie des détails que l'on possède sur la vie de Grégoire de Saint-Vincent, *Hist. des mathém.*, Paris, an VII, t. II, part. IV, liv. I, N° X, p. 83.

(34) *Lectures*, t. IV, pp. 166-183.

(35) *Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges*, pp. 206-220.

(36) Archives des jésuites de la province Flandro-Belge. Dans deux cartons cotés l'un 1000-1004, le second 1000-1004bis.

(37) „ Pragam vix attigeram, ... in Hispaniam evocor, jamque ad iter accingebam me, cum ecce *paralysi subito correptus* morem gerere tam justo Regis mei desiderio non potui : et quamquam vim subiti mali infringerim aliquousque non tam feliciter tamen eluctari potui, quin *integrum quinquiennium* me isthic morbi vis ingens detinuerit. Vix hoc malum evaseram, non ita tamen quin cum morbi reliquiis toto deinceps vitae tempore mihi fuerit decertandum... „ *Problema Austriacum*, praefatio, p.b_3v°.

(38) „ Omnia enim fere exciderant quae illis chartis fueram complexus : quis enim omnium jam senex recordetur quae a triginta et quod excedit annis, fuerat commentatus? „ *Problema Austriacum*, praefatio, p.(b_4)r°.

(39) *Problema Austriacum*, praefatio, p.b_3v°.

(40) Voir sur ce sujet l'intéressant article : *Sur la date des principales découvertes de Fermat*, par M. Paul Tannery, publié dans le BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES de Darboux, 2e série, t. VII, 1883, 1re partie, pp. 116-128.

On sait d'ailleurs que Grégoire de Saint-Vincent fut beaucoup aidé par ses élèves dans la rédaction définitive du *Problema Austriacum*. Le fait est mis hors de doute par un témoignage de Christiaan Huygens. En 1652, Huygens alla trouver Saint-Vincent à Gand. Ils discutèrent longuement ensemble les démonstrations de la quadrature. Or voici comment Huygens raconte à André Tacquet le résultat de cette visite.

" Menses aliquot effluxere cum Patri Gregorio coram adfui, et multa sane disputavimus; inter quae vacillabat ad pleraque vir optimus, atque interdum non se sed discipulos totum opus contexuisse causabatur, aliquando in priori quidem quadratura errorem confiteri videbatur, sed ut in reliquis spem haberet. Quantum autem ex his verbis ipsius conjicere licet sera erit expectatio responsi; et si denique prodeat, cujus sit futurum momenti, quivis puto vaticinari potest qui argumenta mea expenderit. Vale. " (*Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, t. I, p. 189.)

Tacquet était l'ami et le collègue en religion de Grégoire de Saint-Vincent. Huygens le savait et toute exagération de sa part eût été immédiatement relevée. Son récit mérite donc toute confiance.

Ne serait-ce peut-être pas aussi à cause de la collaboration des élèves de Saint-Vincent que le *Problema Austriacum* est rempli d'innombrables hors-d'œuvre qui en alourdissent la composition? Dans leur admiration pour le Maître, les élèves durent le pousser à imprimer *tout* ce qu'il avait écrit, et ils eurent tort. Mieux conseillé Grégoire se serait contenté d'éditer son immortel livre septième, *De ductu plani in planum* (pp. 763-864) et quelques autres morceaux de choix; rien ne serait venu obscurcir sa gloire.

(41) *Deux Lettres*, pp. 6-7.

(42) *Lectures*, t. IV, pp. 169-170.

(43) Archives générales du Royaume. — Archives des jésuites de la province Flandro-Belge, N° 973, manuscrit relié portant au dos la mention : Histoire et lettres annuelles du collège d'Anvers, 1562-1695.

Compilation réunissant des narrations toujours à peu près contemporaines des événements qu'elles racontent. Le passage cité appartient à une pièce intitulée " Prosecutio Historiae Collegii Antverpiensis ab anno 1618 usque ad 1625 " et qui comprend les folios 43 r°-49 v° du recueil. Le passage lui-même se trouve fol. 44 v°.

Je n'ai pas à faire ici la bibliographie des ouvrages écrits sur la célèbre comète de 1618; je me contenterai de rappeler les suivants, parce qu'ils relatent les observations faites par les astronomes des Pays-Bas.

Willebrordii Snellii descriptio cometae, qui anno 1618 mense Novembri primùm effulsit ... Lvgdvni Batavorum, Ex officinâ Elzevirianâ. anno CIϽIϽ.C.XIX. In 4°. Bibl. Roy. de Belg. V. H. 8371.

De cometa anni CIϽ.IϽC.XVIII. dissertio Thomae Fieni in academia Lovaniensi medicinae et Liberti Fromondi philosophiae professorvm ... Antverpiae, Apvd Gvlielmvm a Tongris, sub signo Gryphi. M.DC.XIX. In-8°. Bibl. Roy. de Belg. A. S. II. 8170, exempl. privé du titre; Bibl. comm. à Anvers, N. 4981.

Eryci Pvteani de Cometa anni ∞.IϽC.XVIII. Novo Mundi Spectaculo, Libri dvo, Paradoxologia. Lovanii Apud Bernardinvm Masivum. ∞.IϽC.XIX.

In-12. Bibl. Roy. de Belg. V. H. 8374. Tout à la fin (pp. 8-9n. ch.), Puteanus parle des *Theses de Cometis* de Grégoire de Saint-Vincent et dit que ses conclusions les plus importantes sur la comète, concordent avec celles de Grégoire.

(44) *Deux Lettres*, p. 6.

(45) *Deux Lettres*, p. 7.

(46) *Annales Antverpienses*, Antverpiae, 1847, t. IV, p. 483.

(47) Florent de Montmorency, né à Douai, le 18 septembre 1580, entré dans la Compagnie de Jésus au noviciat de Tournai, le 15 mars 1599, mort à Lille, le 12 août 1659.

Il fut à deux reprises provincial de la Gallo-Belge de 1619 à 1623 et de 1638 à 1642, et provincial de la Flandro-Belge de 1623 à 1627.

(48) Voir note de l'introduction (8), p. 15.

(49) L'original est perdu, mais on en possède encore la minute. Il en existe une copie au Collège Notre-Dame à Anvers que je transcris ici :

" 11 jan. 1625. P. Provinciali.

" P. Gregorius a Sancto Vincentio si R^{ae}. V^{ae}. pro seminario Lovaniensi minus commodus videatur, habeatque inter suos aliquem qui possit ipsi in professione mathematica succedere, ego illi facile locum inveniam ut publice in celebri aliqua academia facultatem eandem doceat. "

(50) L'original est perdu, mais la minute est conservée. Je cite une copie de la minute appartenant au Collège Notre-Dame à Anvers.

(51) *Œuvres de Christiaan Huygens*, t. III, p. 490.

J'ai reproduit le passage ci-dessous, p. 33, dans la note du texte (6).

(52) Voir la note du texte (6), p. 33.

(53) Guillaume de Wael, né à Utrecht, le 10 février 1583, entré dans la Compagnie à Rome, le 7 décembre 1602, mort à Bruxelles, le 31 août 1659.

(54) L'original est perdu, mais la minute est conservée. Je cite une copie de la minute qui appartient au Collège Notre-Dame à Anvers.

(55) Balthazar Cordier naquit à Anvers, le 7 juin 1592, entra dans la Compagnie, le 31 janvier 1612, et mourut à Rome, le 24 juin 1650.

(56) Voir en outre la lettre de Mutius Vitelleschi, écrite le 16 septembre 1628 au P. Jacques van der Straeten, provincial de la Flandro-Belge, publiée ci-dessous dans la note du texte (20), p. 39.

(57) Voir sur ce sujet : *Galilée et la Belgique ; Essai historique sur les vicissitudes du système de Copernic en Belgique*, par le docteur Georges Monchamp, Saint-Trond, 1892. — *Notification de la condamnation de Galilée datée de Liége, 20 septembre 1633*, publiée par le nonce de Cologne dans les Pays Rhénans et la Basse-Allemagne, texte d'après une copie manuscrite avec remarques du docteur G. Monchamp, Saint-Trond, 1893, etc., etc.

(58) Voir les raisons qu'en donne M. Paul Tannery dans le compte rendu du tome VIII des *Œuvres de Christiaan Huygens* : Rev. critique d'Hist. et de Littér. Nouv. série, t. 48, Paris, 1899, p. 395.

TEXTE DES DOCUMENTS

I

Grégoire de Saint-Vincent à Jacques van der Straeten.

Archives de l'État à Bruges. — Affaires des jésuites.
Cote provisoire : carton n° 7.

Pax Chti.
Rvde in Chto. Pater.

Sub finem Iunii anni currentis datæ mihi fuerunt litteræ R. V. scriptæ 17 Ianuarii. Hoc mihi iam 2° contigit, ut litteras e Belgio non reciperem, nisi scriptas a medio anno. Nescio unde hic error cum tamen quam primum Romam appellunt quam primum mihi tradantur; idque causa fuit cur negotium nostrum nonnullis tricis involutum esse videri possit. Post diuturnam enim moram, integri nimirum anni, cum non intelligerem mentem vestram, accessi R. P. Assistentem nostrum (1) ab eo petens quid agerem de illo residuo. Dixit, quandoquidem a tanto tempore non responderint, utere in bonos usus, et subiunxit hæc verba præcise : quod si postea horum mentionem faciant, scribe te resumpsisse in bonos usus quorum hic Romæ non desunt materiæ. Postmodum datæ mihi sunt vestræ litteræ dicentes huius negotii resolutionem Audomaropoli petendam. Quid nobis amplius, cum Audomaropoli iam ab uno anno pecunias recepi cambii pretio soluto ? Si de novo cambium facere volunt, iure res dependet a Præside Audomaropolitano (2) ; sed quomodo pro sex vel septem scutis, summam enim præcise ignoro, in manibus enim alterius est quem modo convenire de hac re non possum, cambium innovabunt qui egerrime pro 30 facere voluerunt ? Quidquid sit hac de re faciant quomodo iis lubet, volui in hæc scribere ut noverint quomodo hac in re saltem ex hac parte agere possint. Hæc de negotio nostro

satis longo. Aliud quod scribam non (*) habeo, nisi spem satis magnam esse brevi canonizandum B. Ignatium, hoc est intra annum circiter ([3]). Iam a multis mensibus ceperunt in domo Professa altarium ornamenta quæ frontalia, casulas etc. appellant et alia miri splendoris et magnificentiæ præparare. Utinam Res Ecclesiæ pacifice permaneant, ut eam solemnitatem possim hic Romæ videre ante dicessum meum ([4]). Nescio utrum in Belgio tantus rumor de novis sideribus quantus hic est, Romæ, inventis beneficio specilli cuiusdam oblongi hic in Collegio Romano. P. Odo Malcot ([5]) hac de re Problema exhibuit, coram auctore huius novitatis Galilæo Galilæi nomine, maximo certo applausu et concursu virorum doctorum et nobilium; ita ut, præter plurimos nobilissimos viros, Comites et Duces, præter Prælatorum magnum numerum, tres ad minimum ex Purpuratis Patribus suâ præsentiâ et auribus cohonestare et gratificari voluerint. Rem breviter totam exponam. Saturnus apparet nobis non esse rotundus ; sed figuræ ovalis, diametro maiore huius figuræ æquinoxiali parallela. Iupiter continuum habet satellitium quatuor planetarum, qui eum semper comitantur, et in girum circa ipsum continuo aguntur, et singulis horis diversas habent positiones et aspectus ad invicem; semper autem in linea apparent. Ipse autem Iupiter est omnino rotundus semper. Mars nihil habet singulare. Venus omnino circa solem verti, similiter et Mercurium, compertum est, ita ut centrum illorum motus, sit centrum solis; Venusque nova Cynthia vocata est, eo quod omnino sicuti Luna crescat et decrescat. In Luna maculas non satis posse per raritatem et densitatem salvari, etiam plus quam probabile habemus. Mercurium satis diu consideravimus, quamvis raro, sed cuius figuræ sit adverti non potuit propter scintillationes nimias, valde enim scintillat hoc astrum. Pleiades triginta trium stellarum constellatio est. Nebulosa Præsepis 37 ([6]). Si apud vos hodie specilla non exstant, quem hîc illa nos ipsi Matheseos studiosi construimus, mittam ad V. R. cuius precibus et sacrificiis me enixe commendo. Romæ, 23 Iulii, 1611.

Vester in Chto Servus.
Gregorius a S^to. Vincentio.

(*) *Codex :* scribam vel habeo.

En marge :

Quæso salutet meo nomine omnes domesticos PP. eorum precibus commendet P. Godef. P. Ber. P. Mechiaelis (7).

Adresse :

Reverendo in Chto Patri
Iacobo Stratio
Rectori Collegii Brugensis
Brugas
In Flandria.

II

Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne.

Bibl. Nat. fr. n. a, 6205, p. 822.

Admodum Reverende in Christo Pater
Pax eiusdem.

Nolim inurbanitatis notam incurrere apud R. P. Vestram, ob moram longiorem litteris mihi missis respondendi commissam ; excurreram Antverpia ad diversas civitates, cum vestræ advenêre et me errantem secutæ, tamen dominum inventum officii sui memorem reddiderunt. Nescio qua ratione factum sit, ut et ego inter Mathematicos a R. P. Vestra adnumerari dignus visus sim, imo ut et ad P. Vestram argumentum scriptionis meæ pervenire potuerit (8). Postulant Vestræ, utrum ἀδύνατον demonstrem, quod de circulo quadrando problema est : fateor me morosiores de hac materia considerationes sæpius admisisse, ac tandem plane mihi persuasisse, adiumenta a veteribus nobis relicta sufficientia nullo modo esse, quibus difficultates, quæ Geometriam mutilam adhuc arguunt, expediri queant ; quare converti me ad quarumdam materiarum considerationes, quas eo conducere mihi persuadebam ; quæ licet mihi scabrosæ initio viderentur, nihilominus existimo non vano labore tempus a me detritum esse. Ante annos viginti (9) publici iuris ea facere decreveram ; sed morbus in quem paulo post incidi (10), et peregrinandi necessitas, quæ me variis exercuit incommodis, maxime iacturâ lucubrationum mearum,

quas in Mechanicis conscripseram, denique decennalis absentia mearum chartarum, quibus privatus fui, quæ Geometriam concernunt, in hoc usque tempus differre coegerunt. Charta adiuncta (11) ostendit operis argumentum, quod nonum iam mensem sub prælo sudat; post pauculos menses spero finem imponendum. Commentarium in Euclidem scripsit P. Claudius Richardus (12), quondam contubernalis meus in Italia ante annos quadraginta, qui mihi eo titulo parum arridet quod schemata (*) a contextu separavit; plures tomos alios pollicetur, et inter cæteros Apollonium integrum, cum suis notis aut commentariis. Nescio qua ratione quatuor libri, qui hucusque desiderati sunt, ad manus eius pervenerint : eumdem authorem, Apollonium scilicet, imprimi intelligo in Hollandia cum quatuor librorum qui defuerunt argumento. Charta monet verbis supersedere et affectum meum, simul cum omni obsequio quod a me præstari poterit, humillima oblatione admodum R. P. Vestræ deferre. Vale.

Admodum R[dæ] Pater[tis] Vræ servus
Gregorius a Sancto Vincentio.

9 Maij 1646.
Antverpiæ

Adresse :

Admodum R[do] in Christo P., Patri Marino
Mersennio Ordinis Minimorum
Parisiis
9S Ad Plateam Regiam.

III

Grégoire de Saint-Vincent à Mersenne

Bibl. Nat. fr. n. a. 6204, f° 65.

Admodum Reverende in Christo Pater,
Pax eiusdem.

Litteras P. V[ræ] sub discessum meum Gandavo Antverpia(m) accepi quidem, sed cum tempus non suppeteret Gandavi respon-

(*) *Codex :* scemata.

dendi, distuli donec Antverpiam venirem. Sed variæ occupationes plane cogitationes bonas excusserunt, ne memor essem officii mei. Ignoscet, spero, P. V. et boni consulet hunc naturalem defectum, Ut autem quo loco res meæ sint constitutæ explicem, verbo dicam : trimestre adhuc tempus requiro, ut coronidem plane imponam, ut ad initium sequentis anni (13), totius mundi iudicio expositus, vel damnationis vel probationis sententiam exspectem. Sed quidquid fuerit, spero ad Dei gloriam futurum. Quare R. P. V. litteras circa Natalitia festa exspectabo, et libenter præstabo quod a me fuerit requisitum (14), non solum autem P. V^{æ}, verum etiam aliis quibus gratum obsequium meum hac in parte ex V. P. intelligam. Vale, mi optime Pater; mei in SS. Sacrificiis tuis memor esse dignare.

Adm^{dum} R^{dæ} P. Vestræ Servus in Chro.,
Gregorius a S^{to} Vincentio.

Antverpiæ

Adresse : Admodum R^{do} in Chro Patri, P. Marino
Mersenno in conventu FF^{um}
Minimorum
9 S. Parisiis.

IV

Éloge de Grégoire de Saint-Vincent.

Archives générales du royaume à Bruxelles. — Jésuites, prov. Flandro-Belge Carton renfermant les fardes 1000 à 1004.

Elogium P. Gregorii a S. Vincentio
obiit Gandavi 27 ian. 1667.

Gregorium vere magnum, professis omnibus soc(ieta)tis flandrobelgicæ ætate majorem, professione et scientia mathematica longe maximum, in patre a Sto. Vincentio nuper amisit provincia nostra, in suo tamen opere de quadratura circuli adhuc superstitem semperque victurum. Brugæ illi patria fuere. Dederunt hæ mundo puerum anno superioris sæculi 84 unius et 20 annorum

iuvenem soc(ieta)ti quam ingressus est Romæ a(nn)o 1605. Egressus de terra sua et de cognatione sua et de domo patris sui ([15]) ubi in tyrocinium Romanum admissus est, cum habitu sæculari ita omnem affectum erga suos exuit ut tota deinde vita nunquam de parentibus aut consanguineis auditus sit loqui. Expleto tyrocinii tempore biennium philosophiæ impendit. Post hanc mathesim audivit sub patre Clavio, eo profectu et commendatione, ut iudicio professoris inter quamplurimos eiusdem scientiæ discipulos ipse unus excelleret. Certe illum tanti fecit P. Clavius ut cum R. admodum P. N. ([16]) illum in Siciliam destinasset ut isthic studia theologica inchoaret, pro ea, qua apud P. N. Claudium valebat gratia, summis et imis precibus institerit, suum sibi ut Gregorium retinere liceret; quod plurimis secum adhibitis gratiosis intercessoribus patrumq. primariis feliciter et ex voto impetravit. Mathesi auditæ successit theologia cuius quadriennalem cursum Romæ incepit ac deinde in Belgium reversus Lovanii absolvit. Sacerdotio initiatus est a(nn)o 1613 : 4 vota professus 1623. Sacerdos Bruxellis græca tradidit. Silvæducis præfecturam scholarum gessit. Anno uno castra regia secutus est, quod virtuti quidem eius et zelo parum fuit, superioribus tamen visum est esse satis, præstantissimus enim ingenio campus alius, et alia arena debebatur. Expleto Cortraci tertiæ probationis anno Antverpiam missus est, ibidemq. socius datus patri Aguillonio ([17]). Mathesim docuit nostros privatim tota fere vita. Antverpiæ intra domesticos parietes, Lovanii vero eam publice professus est, universim novennio. In academia Lovaniensi primus solemnes disputationes mathematicas instituit quarum fama exciti accurrere quamvis non invitati omnis generis et professionis academici, nobiles, iuris periti et ecclesiastici magno numero, rector magnificus, decanus, totiusq. universitatis doctores omnes si theologos excipias, qui postridie ægre ferentes sese in tanto concursu desideratos expostulatum miserunt, cur et ipsi quoque invitati non essent, ut, insolitis Lovanii disputationibus et eruditissimo professori, eum, quem par esset, honorem haberent ([18]). Post traditam non parva soc(ieta)tis commendatione annis aliquot mathesim Lovanii, magno sui apud omnes relicto desiderio, iterum rediit Romam, A. 1625 ([19]), ut in illo amplissimo orbis theatro spectaretur, non iam quis tyro, aut iuvenis, sed quis vir hic esset qui sua et virtute

et eruditione totam aliquando Europam impleret. Roma denuo reversus in Belgium, post aliquanti temporis moram a superioribus missus est in Bohemiam ([20]), ut vere cum apostolo ([21]) dicere potuerit : in itineribus sæpe, et secundam summarii constitutionum regulam vel suo solius exemplo veram reddere ([22]) : nostræ vocationis est diversa loca peragrare. Pragæ aliquamdiu stabile, fixumq. domicilium habuit, ubi immersus licet suis propositionibus studiisq. mathematicis, Cæsarei gynæcei ([23]) confessarius fuit, quod ipsum ille pro sua regendi conscientias dexteritate non tantum sociis pragensibus obnoxium reddidit, sed etiam inter alios urbis primores, singulari quadam omnes demerendi gratia comitem de Martinitz ([24]) societati nostræ arctissime devinxit. Tam frequenti sedis et provinciæ mutationi nihil deerat nisi ut talem tantumq. virum quem Gallia non semel transeuntem, Italia bis commorantem, Germania hospitem, Bohemia quodammodo suum viderat, hunc tot inter nationes et regna, Hispania quoque vindicaret sibi, ut coram spectarent omnes quem in edendis ab ipso operibus postea mirarentur. Hispani certe non minus quam alii optavere præsentem. Ut enim eius nominis fama eo penetravit, mox a rege catholico Philippo 4° ([25]) expetitus est, ut præceptis mathematicis institueret Ioannem Austriacum ([26]), datis non solum litteris ad R. Patrem nostrum generalem Mutium Vitellescum, sed etiam ad imperatorem Ferdinandum 2^{um} ([27]) ne is sese opponeret; ita certatim expetebatur ab omnibus. Sed hoc regis Philippi sive votum sive imperium, patrisq. Gregorii parendi studium inopinatus morbus intercepit, quando sub idem tempus cum itineri accingeret se apoplexia correptus est, et Pragæ subsistere coactus suffecto in eius locum P. Joanne Bapt. de la Faille ([28]), quod ætas adolescentis et ardentis in studia hispani principis moram non pateretur. Ex hoc periculoso malo vitæq. certissimo discrimine robustæ qua semper fuit naturæ beneficio feliciter eluctatus, simul et sibi ipse et suis belgis redditus est. Cum enim bellis arderent omnia ita ut suis quoque domi et in sinu suo natis se cogeretur exonerare Germania, totaq. insuper Bohemia trepidaretur, imminente urbi Sueco, redivit in Belgium. Qua in fuga et trepidatione (ut fit in rebus trepidis et perturbatis) omnia eius multorum annorum studia et lucubrationes intercidere; iacturam longe maximam bonus pater maiore animo tulit, hac una cogita-

tione confirmatus quod chartas quidem et plurima illis commissa, non peritiam inveniendi nova eripuisset temporum iniquitas et invidia. Hæc viri omni exceptione maioris doctrina quam unam e tumultibus germanicis et bohemicis extulit a laudatissimis viris ubiq. locorum laudata semper et deprædicata fuit. Unum multorum instar erit illustre testimonium quod iam inde a 40 et amplius annis de illo eiusq. ingenio et eximia scientia dedit R. P. Grimbergerius. Miserat ad illum P. Gregorius e Belgio 40 circiter propositiones, quibus summatim complexus erat conceptum suum quem postea in celebri illo opere de quadratura circuli vulgavit, quibus ille perlectis et multorum dierum studio expensis usque adeo captus fuit, atque obstupuit, ut alteri cuipiam provinciæ nostræ flandro belgicæ ([29]) tum istic cum illo degenti in collegio Romano, pleno ore, vir cæteroquin permodestus et verborum parcissimus asseruerit P. Gregorium prodigium hominis esse, virum antiquis mathematicis nihilo inferiorem, novam prorsus atq. orbi hactenus incognitam invenisse mathesim, novam et nunquam tritam aperuisse viam veteribus, et alia in hanc sententiam. Percunctanti autem an existimaret circuli quadraturam ab antiquitate tota ac deinde a tot recentioribus tanto studio frustra perquisitam inveniri posse ; respondit disertis verbis : ego posthac de quadratura circuli non laboro : multa enim quæ ad me misit P. a Sto Vincentio sunt mihi instar quadraturæ ([30]). Hoc suum iudicium mox etiam aperuit admodum Rdo. P. nostro Mutio, eiq. tanto verborum pondere deprædicavit P. Gregorium eiusq. singularem doctrinam, ut assereret societatem alterum in illo habere Archimedem, alterum Euclidem, Pappum, Apollonium et alia huiusmodi. Institit deinde ut illum admodum R. P. N. e Belgio iterum evocaret in urbem, deberi enim tanto viro amplissimum illud orbis theatrum, et obtinuit facile, pauloq. post ut supra indicavi, iterum evocatus est. Tam luculento P. Grimbergerii testimonio cui vix aliquid addi potest, alia quæ tamen non desunt plurima non adiicio, ne operi celeberrimo de quadratura circuli iniurius sim, quod supra multorum ne dicam omnium conatus satis superq. suum orbe toto commendat authorem. De quo opere vir eximius in epistola ad familiarem sibi geometram, ita scribit : *ab orbe condito non prodiit opus tam doctum tam varium tam reconditum.* Alter non societatis Vincentius Vivianus ([31]) in opere de maximis et

minimis sic habet : *opus vere atlanticum summi geometræ Gregorii a S^to Vincentio e doctissima spectatissima nec unquam satis laudata societate Iesu.* Nec aliter de eodem opere sentiunt ipsimet adversarii qui summo illud conamine impetunt. P. Vincentius Leotaudus (32) opus P. a S. Vincentio præstantissimum vocat. In sua autem Cuclomatia idem Vincentii nostri æmulus simul et panegyricus hoc dat illustre testimonium veritati : *accuratissime fateor testorq. de spatiis hyperbolicis nunquam satis laudatus huius quadraturæ author in maximum geometriæ emolumentum, quamplurima eaq. inaudita demonstravit.* Elogio autonomastico fere semper nominat egregium geometram aut cuclometram. Operi ita depredicato suppar alterum parabat prælo (33) imo iam pridem dederat cui immortuus est, quod posthumum aliquando Deo superisq. volentibus videbit lucem ; si tamen eo usq. promotum non prodierit, authoris operis imperfecti cœnotaphio non sine prognostico et chronotaxi insculpi poterit : gregorIVs post qVaDratVraM In CoeLo, ut ibi in divina luce plura deprehendat phænomena et in circulo æternitatis, quadratura crucis pro domino in terris portatæ, gaudeat, melior Archimedes qui meliori igne verbi et exempli plurimas naves incendit ad salutis portum navigantes. Hæc prima Gregorii vere magni encomiorum pars est ab eruditione petita ; altera non minus late patens virtutis area est. Obstupuere pleriq. tam domestici quam externi in tanta eminentis scientiæ altitudine tantam in summo viro animi demissionem ; tum imprimis cum eius tam excellens rerum mathematicarum scientia nondum omnibus perinde nota esse adeoq. neq. illa neq. ipsemet eo quo par erat a multis haberetur in pretio. Tum enim ille totos dies et annos latens et sua se involvens virtute nihilo segnius res suas ageret; lucubrationibus suis æque constanter incumbere, nunquam aut raro, et tum quidem modeste solitus de rebus suis loqui; sæpius auditus dicere laborare se non sibi aut nomini comparando sed divinæ gloriæ et societatis existimationi, quo, si quid per suos labores vel post obitum suum accederet, satis se magnum eorum fructum consecuturum : reliqua se Deo permittere. Cuius viri demonstrationibus, et circulis, orbibusq. describendis tabulæ unius et cubiculi sufficiebant angustiæ, huius animarum zelo totus angustus erat orbis europæus. Hinc florente ætate missionem ad Chinas apud R. P. N. generalem petere non destitit donec impe-

trasset : et erat cui chinenses scientiarum avidissimos inescare potuisset, et una cum mathesi in regnum chinense orthodoxam fidem invehere (34); sed eius votis piisq. conatibus facultate iam Roma impetrata obstitere Provincialis et provinciæ consultores. Quid facturus ibi fuisset ad iuvandas animas inter mille vitæ discrimina satis hic omnibus probavit in Belgio uno tantum anno castrensis. Probavere cicatrices quas octogenario maior intulit sepulchro, ex vulneribus acceptis in castris regiis dum se totum impenderet confessionibus excipiendis læsorum militum, sui unius incuriosus societatis Iesu miles. Ita et apud Belgas reperit, quos non citra vitæ suæ periculum servaret et quidem aliquando non gregarios milites, sed primariæ notæ et nominis ne urbe quidem nostra egressus. Attinebatur hic in castro gandensi captivus Ransavius Galliæ Mareschallus (35) armorum regis christianissimi in Flandria præfectus. Hic licet heterodoxus fallendi temporis et tetricæ solitudinis gratia levandæ, accersi iubebat subinde P. Gregorium fama publica sibi notum. Pater ut hominem Deo lucraretur, dexterrime in eius familiaritatem insinuare se, nec tantum verbis et rationibus de vera fide, sed etiam S. Xaverii exemplo latrunculorum (22) lusu quo mirifice capiebatur Ransavius cum eo certare. Felicissime utrique cessit concertatio non minori perdentis quam lucrantis bono. Certaminis quippe sæpe iterati victoria tulit publica protestatio fidei, quam eiurata hæresi Mareschallus amplexus est, e captivitate gandensi assertus in libertatem filiorum Dei. Ut P. Gregorius salutis alienæ studiosus, ita et in confessionibus audiendis assiduus semper fuit, et consulentibus nunquam aures benignas et patientes non præbuit (*) difficultate aliqua laborantium prudens patronus. Totus comis et affabilis, sincerus et fusci expers; omnibus bonus, sibi soli nequam; utpote qui nunquam in mensa quidcumque ederet usus sit sale et ne vel tantillum gulæ et palato serviret, alia quoque ciborum condimenta vix unquam visus sit adhibere. Senex placidus et amœnus semperq. sui similis, et quod in senibus rarum, minime morosus aut querulus; qui nihil haberet (**) senis, nisi canos et in senili corpore, animos iuveniles. Vir amans pacis et concordiæ, quidcumque

(*) *Codex :* patientes præbuit.
(**) *Codex :* haberes.

forte ortum esset altercationis, nihil amarulenti habebat in ore, nihil rancidi servabat in corde. Sacerdos pietatem spirans sive ad aram caneret sive rem divinam solemni aut privato ritu faceret. Magnæ matris cultor eximius, in illius sine macula conceptæ honorem sacrum votivum celebravit, quot sabbatis annis bene multis. Cultu diurno non contentus ut illam noctu quoque coleret cum vesperi cubitum concederet, Deiparæ coronam ad cervical appendebat ut ad manum esset de nocte vigilanti, et si forte, primo excusso sopore (quod senibus (*) familiare est) rursus indormire non posset, globulos precatorios arriperet, eosque volveret donec illum denuo somnus occupasset. Religiosus optimi spiritus nec amantior regularum quam observantior, tenacissimus piorum propositorum, quæ semel conceperat. Argumento sit hoc quod ipse de se (ut erat candidissimi pectoris) non semel ingenue fassus est, non ut se iactaret, aut sua; sed ut alios ad virtutem accenderet : nihil sibi magis esse solatio, quam quod pia sanctaq. proposita concepta in primis exercitiis novitiatus constanter ad finem usque vitæ servasset annis 62 quibus vixerat in societate. Mortis semper et ubiq. memor, quolibet vespere ita se componebat ad quietem nocturnam quasi ad æternam, et ea nocte forte suprema, supremum avocandus ad Iudicem. Non poterat hunc mors inopina occupare imparatum, neque poterat Dominus, media quoque nocte si venisset, hunc servum suum non invenire et nomine et re Gregorium hoc est vigilantem ([37]). Ita semper ad adventum Domini comparatus, paucis ante mortem diebus apoplexia tactus et sacramentis omnibus in corona patrum fratrumq. tempestive munitus anno ætatis 83 plenus dierum et meritorum, 27ª ianuarii, vivere desiit in terris, ubi iampridem ab annis multis triplex celebrarat iubilæum initæ soc(ieta)tis, sacerdotii et traditæ matheseos, æternum, uti confidimus, beatorum iubilæum celebraturus in cœlis.

(*) *Codex :* selibus.

NOTES DU TEXTE

(1) L'Assistant d'Allemagne dont dépendait la province Flandro-Belge était le P. Ferdinand Alber. Il naquit dans le Tyrol, en 1548, entra au noviciat en 1565, enseigna la philosophie, puis fut recteur du Collège d'Innsbruck en 1578, provincial de Germanie supérieure de 1585 à 1594, de Bohême en 1594, assistant de Germanie en 1608. A la mort d'Aquaviva (31 janvier 1615) il occupa les fonctions de vicaire de la Compagnie jusqu'à l'élection de Mutius Vitelleschi (15 novembre 1615). Il mourut en Hongrie le 30 octobre 1617.

(2) Je ne sais quel est le personnage que Grégoire de Saint-Vincent désigne sous ce titre. A la manière dont l'Assistant tranche la difficulté financière qui lui est exposée, il semblerait que ce *praeses* doive être un supérieur de la Compagnie; mais d'autre part la chose paraît peu vraisemblable. La Compagnie avait alors à Saint-Omer deux maisons, un collège et un séminaire anglais qui toutes les deux avaient à leur tête un recteur. En parlant d'eux, il eût été contraire à tous les usages de ne pas les qualifier par leur titre de Recteur.

(3) Saint Ignace fut canonisé par Grégoire XV, le 12 mars 1622 seulement.

(4) Cette deuxième partie de la lettre, commençant aux mots " Nescio utrum in Belgio " a déjà été éditée, à l'exception de la Note marginale qui la termine.

Voir la bibliographie de la Correspondance de Grégoire de Saint-Vincent. Introduction II, pp. 2-6 ci-dessus.

(5) Odon van Maelcote naquit à Bruxelles le 28 juillet 1572, entra dans la Compagnie de Jésus le 12 février 1590 et mourut à Rome le 14 mai 1615.

Il publia deux ouvrages qui existent l'un et l'autre à la Bibliothèque Royale de Belgique et dont voici les titres :

Astrolabivm æquinoxiale. Odonis Malcotij Bruxellensis E Societate Iesv. Per modum compendij a Leonardo Damerio Leodiensi in lucem editum. Bruxellæ, Apud Rutgerum Velpium, Bibliop. jur., 1607, in-8° (V. H. 8416).

Astrolabiorvm sev vtrivsqve planisphaerii vniversalis, et particvlaris rsvs. Per modvm compendii traditus a Valeriano Regnartio Belga. Ill^mo et exc^mo D. D. Francisco Peretto, Principis Venafri Filio. — Romae apud Bartholomaeum Zannettum. M.DC.X. Svperiorvm permissv. In-4° (V. 4973).

Voir sur ce savant :

Le Paige : Odon van Maelcote, notice donnée dans la *Biographie nationale*, publiée par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, t. XIII, Bruxelles, Bruylant, 1894-1895, coll. 43; et aussi, *Notes pour servir à l'Histoire des Mathématiques dans l'ancien Pays de Liége*, dans le Bulletin de l'Institut archéologique liégeois, t. XXI, 1888, pp. 499-500.

Monchamp, *Galilée et la Belgique essai historique sur les vicissitudes du Système de Copernic*, Saint-Trond, G. Moreau-Schouberechts, 1892, pp. 23-25.

De Backer et Sommervogel, *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, t. V, Bruxelles, 1894, coll. 281-282.

[Waldack], *Galilée au Collège Romain en 1611* (Précis historiques, 2e série, t. II, 1873, pp. 501-506).

(6) Voir sur cette séance l'article déjà plusieurs fois cité des Précis historiques, *Galilée au Collège Romain* et Monchamp *Galilée et la Belgique,* ch. III, pp. 23-25.

Le discours qu'y prononça le P. van Maelcote a été publié pour la première fois par G. Govi, à la suite de son article : *Galileo e i Matematici del Collegio Romano nel 1611* (Atti della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXXII. Série 2, vol. II, 1874-1875, p. 230) et réédité dans : *Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale* (vol. III, part. Ia, p. 291). Nous y apprenons qu'on était alors en mai 1611. (Ed. Govi, p. 239; ed. naz., p. 297).

Grégoire de Saint-Vincent garda de cette journée un souvenir ineffaçable. On peut s'en convaincre par le récit qu'il en faisait, près d'un demi-siècle plus tard, dans une lettre adressée le 4 octobre 1659 à Christiaan Huygens. Le vieux religieux y remercie son jeune correspondant pour un exemplaire qu'il avait reçu en hommage d'auteur, du *Christiani Hvgenii Zvlichemii, Const. F. Systema Satvrnivm, Sive De causis mirandorum Saturni Phaenomenôn, Et Comite ejus Planeta Novo. Hagae-Comitis, Ex Typographia Adriani Vlacq. M.DC.LIX* (In-4°, Bibl. Roy. de Belg. V. H. 8345. Exemplaire donné par Huygens aux jésuites d'Anvers).

“ Jucunda sane fuit, dit-il, libri tui inspectio quem integre cursim decurri, renouauit antiquas similium phasium species quarum aspectus ut fruerer noctes integras centenas imo plures insumpsi ante annos pene quinquaginta dum e Belgio Venetias Venetiis deinde Romam a Domino Scholiers delatum telescopium Magistro quondam suo Antuerpiæ Patri Odoni Malcotio professori tum Matheseos oblatum fuit. Vix crediderim aliquem ante nos qui Patris Clauii Academici dicebamur astrum hoc detexisse. Superuenit postmodum Galilæus cuius instrumentum satis luridum aspectu cum nostris minime inferioribus contulimus et noua phænomena illo spectante toti Vniuersitati in nostro Collegio Gregoriano exposuimus. Et Venerem circa Solem volui manifeste demonstrauimus non absque Philosophorum murmure. coniunctissima tum temporis velut auriculæ aut ansæ apparebant per instrumenta nostra quæ separata in libro tuo exhibes phænomena ab astroque seiuncta „ (*Œuvres de Christiaan Huygens...,* t. II, p. 490).

(7) *Godef.* et *Ber.* sont évidemment des abréviations pour *Godefridum* et *Bernardum*, mais le troisième nom ne serait-il pas *Michael?*

Grégoire de Saint-Vincent se conforme à l'usage très en vogue alors de ne nommer les Pères que par leur prénom. Je ne connais pas de catalogue donnant les noms des religieux des maisons de la Compagnie à Rome en 1611. Il m'a été impossible de déterminer quels sont les Pères que Grégoire entend désigner par ces prénoms.

(8) Probablement par les élèves de Saint-Vincent qui ne se faisaient pas faute de publier, à l'occasion, ses découvertes. C'est ainsi qu'on trouve, dès 1634, une petite brochure devenue aujourd'hui fort rare, dans laquelle la méthode *De ductu plani in planum* est donnée comme devant être défendue à Louvain, dans une soutenance de thèses présidée par le P. Boelmans, l'un des élèves de Grégoire (*Thesis*, 5, p. 4).

Voici le titre complet de cet opuscule : *Theses mathematicae, geometricae,*

arithmeticae, opticae, catoptricae, dioptricae, mvsicae, architectonicae, stereostaticae, hydro-staticae, qvas Praeside Reuer. P. Gvilielmo Boelmans, Societatis Iesv, Matheseos Professore, Demonstrabit ac Defendet Philippvs Iacobi. Eiusdem Societatis. Lovanii, In Collegio Societatis Iesv, Die 8 Augusti horâ tertiâ post meridiem. Lovanii apud Viduam Henrici Hastenii, Anno 1634. In-4° (Bibl. Roy. de Belg., V. 5012; Bibl. de l'Univ. de Louv. Scienc. Diss. Acad. 13; Bibl. du collège de la Comp. de Jésus à Louvain. Ce dernier exemplaire porte au titre la variante suivante : *Demonstrabunt ac Defendent Ioannes Groll, Philippvs Iacobi, Lavrentivs van Schoone, Andreas Tacqvet eiusdem Societatis... Die 8 et 9 Augusti horâ nonâ ante et tertiâ post meridiem...*)

Sur la méthode de *Ductu plani in planum* consultez :

Marie, *Hist. des scienc. math. et phys.*, t. III, Paris, 1884, pp. 189-192.

Cantor, *Vorles. über Gesch. der Math.*, 2ᵉ éd., t. II, Leipzig, 1900, pp. 893-895.

(9) C'est le 27 septembre 1625, que Grégoire de Saint-Vincent fut envoyé à Rome, pour y discuter, avec le P. Grienberger, les démonstrations qu'il se proposait de donner dans le *Problema Austriacum.*

(10) L'attaque d'apoplexie qu'il eut à Prague, en 1628. Voir la chronologie de la vie de Grégoire de Saint-Vincent, que j'ai donnée ci-dessus, dans l'Introduction III, p. 6.

(11) Ce papier n'est plus joint à la lettre.

(12) Richard Claude, naquit à Ornans dans le département du Doubs, en 1588. Il entra dans la Compagnie de Jésus à Rome le 8 décembre 1606 et enseigna les mathématiques à Lyon et à Madrid. Il mourut le 20 octobre 1664.

Son ouvrage sur Euclide a pour titre :

Evclidis Elementorvm geometricorvm Libros tredecim Isidorvm et Hypsiclem et Recentiores de Corporibus Regularibus, et Procli Propositiones geometricas Immisionemque duarum rectarum linearum continuè proportionalium inter duas rectas, tam secundum Antiquos, quam secundum Recentiores Geometras, nouis vbique fere demonstrationibus illustrauit, et multis definitionibus axiomatibus, propositionibus, corollariis, et animaduersionibus, ad Geometriam recte intelligendam necessariis, locupletauit Clavdivs Richardvs E Societate Iesv Sacerdos, patria Ornacensis in libero Comitatu Burgundiæ, et Regius Mathematicorum Professor : dicauitque. (Portrait de Philippe IV avec l'inscription : *Philippo IIII. Hispaniarvm et Indiarvm Regi Catholico). Antverpiæ, Ex Officina Hieronymi Verdussii. Cum Gratiâ et Priuilegio, M.DC.XLV.* In-fol. Bibl. de l'Univ. de Gand, Math. 58.

Les figures de l'ouvrage sont dessinées sur des planches hors texte, placées en partie au commencement, en partie à la fin de l'ouvrage. C'est cette disposition des " schemata " (figures) que G. de Saint-Vincent critique.

L'édition des coniques d'Apollonius par Claude Richard parut en 1655 sous le titre :

Apollonii Pergæi conicorvm libri IV. Cvm commentariis R. P. Clavdii Richardi, E Societate Iesv Sacerdotis, Patria Ornacensis in libero Comitatu Burgundiæ, et in Collegio Imperiali eiusdem Societatis Regii Mathematicarum Matriti Professoris, Dicatis (Portrait de dom Guill. Raym. de Montana, Marquis de Aytona) *Antverpiæ Apud Hieronymum et Ioannem Bapt. Verdvssen, Anno 1665.* In-fol. Bibl. Roy. de Belg. V. H. 8005.

Contrairement à ce que semblent croire Saint-Vincent et Mersenne, le P. Richard ne connut pas les derniers livres des Coniques d'Apollonius. Ceux-ci furent publiés pour la première fois par Borelli, en 1661, dans l'ouvrage intitulé :

Apollonii Pergæi Conicorvm lib. v. vi. vii. et Archimedis assumptorum liber. || *Apollonii Pergæi conicorvm lib. V. VI. VII. paraphraste Abalphato Asphanensi Nunc primum editi. Additvs in calce Archimedis Assvmptorvm liber, ex codicibvs Arabicis M. SS. Serenissimi magni dvcis Etrvriæ Abrahamvs Ecchellensis Maronita In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit. Io : Alfonsvs Borellvs In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, et notas vberiores in vniuersum opus adiecit. Ad serenissimum Cosmvm III. Etrvriæ principem. Florentiæ Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI Svperiorvm permissv.* In-fol. (Bibl. Roy. de Belg. V. H. 8004. Exemplaire ayant appartenu à Lalande).

Voir la bibliographie des autres ouvrages du P. Claude Richard dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel t. VI, Bruxelles 1895, coll. 1808-1809.

On conserve à la Bibliothèque Royale de Belgique (V. 5005) l'Apollonius dont s'est servi Grégoire de Saint-Vincent, c'est un exemplaire de l'*Apollonii Pergæi Conicorvm Libri qvattvor. vna cvm Pappi Alexandrini lemmatibvs, et commentariis Evtocii Ascalonitæ. Sereni Antinsensis philosophi libri dvo nvnc primvm in lvcem editi. qvæ omnia nvper Federicvs Commandinvs Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco conuertit, et commentariis illustrauit Cvm privilegio Pii IIII. Pont. Max. in annos X. Bononiæ, ex Officina Alexandri Benatii MDLXVI.* In-fol.

Ce volume porte au titre les indications manuscrites suivantes :

" Soc^{tis} Jesu gandavi M. 13. "

Puis de la main très reconnaissable de Grégoire de Saint-Vincent :

" Anno 1623 commutaui Hunc librum cum altero Apollonio venia Superiorum.

" G. A. S. V.

" Soctis Jesu Gandaui. "

Puis d'une autre encre, mais aussi de la main de Grégoire de Saint-Vincent.

" Soctis Jesu Louanii. "

([13]) En m'envoyant le texte de la lettre, M. Paul Tannery m'a fait remarquer que cette phrase permet de la dater du commencement d'octobre 1646.

Je saisis cette occasion pour corriger une faute typographique de mon mémoire *Deux Lettres* due à la chute d'un caractère d'imprimerie. Le *Problema Austriacum* y est indiqué (p. 4) comme publié en MDCXLII ; c'est une erreur, il l'a été en MDCXLVII.

([14]) Évidemment Mersenne avait demandé à Grégoire de Saint-Vinceut s'il ne voudrait pas lui envoyer à Paris quelques exemplaires du *Problema Austriacum* en cours d'impression, pour les offrir à ses amis.

Je n'ai pas à refaire ici l'histoire de la controverse soulevée à l'apparition de cet ouvrage. Les premières attaques furent faites dans des lettres manuscrites qui, grâce à Mersenne, circulèrent entre savants. Il reste sur ce sujet bien des

points obscurs à éclaircir, notamment sur le rôle joué par Roberval. Quoi qu'il en soit, ce fut le célèbre Minime qui attaqua le premier Grégoire de Saint-Vincent par la voie de la presse. Voici comment il en parle dans ses *Reflexiones Physico-Mathematicae* publiées, on le sait, dans les *Novarvm observationvm physico Mathematicarvm F. Marini Mersenni Minimi. Tomvs III. Qvibvs accessit Aristarchvs Samivs de Mvndi Systemate. Parisiis Sumptibus Antonii Bertier, viâ Iacobaeâ sub signo Fortunae. M.DC.XLVII. Cvm Privilegio Regis.* In-4° (Bibl. roy, de Belg. V. 4825).

" In illud, dit Mersenne (Ch. I, p. 72), abit necdum solutum problema, quodque forsan, longe difficiliorem, quam ipsa quadratura, solutionem requirit. Datis tribus quibuscunque magnitudinibus rationalibus, vel irrationalibus, datisque duarum ex illis logarithmis, tertiae logarithmum invenire. "

Le P. de Sarasa lui répondit dans la *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi.* Voir note de l'Introduction (33) p. 20, ci-dessus.

(15) " Egredere de terrâ tuâ, et de cognatione tuâ, et de domo patris tui, et veni in terram quam monstrabo tibi ". *Gen.* XII, 1.

(16) Claude Aquaviva, fils du duc d'Atri, né à Naples en 1542. Il entra au noviciat de la Compagnie de Jésus le 25 juillet 1567 et en fut élu général le 19 février 1581. Il mourut à Rome le 31 janvier 1615.

(17) François d'Aguillon. Voir *Deux Lettres.* Note 41, p. 17.

(18) Voir l'Introduction, VI, p. 11.

(19) C'est à l'occasion de ce voyage à Rome que le P. Mutius Vitelleschi, écrivit à Grégoire de Saint-Vincent la lettre dont j'ai parlé ci-dessus dans la Bibliographie de la Correspondance de G. de Saint-Vincent (p. 2). En voici le texte d'après la copie, faite sur la minute, copie qui appartient au Collège Notre-Dame à Anvers.

" 4 Jan. 1625. — P. Gregorio a S. Vincentio.

" P. Christophorus Grensbergius aliquoties mecum ita honorifice loquutus est de opere a V^a^. R^a^. instituto quo circuli quadraturam a se repertam esse ostendere conatur, ut cum ipso sperare incipiam id quod hactenus a praestantissimis laboriossisimis ingeniis reperiri non potuit a V. R. repertum esse. Hoc ubi paulo certius R^a^. V^a^. dicto Patri demonstrarit, deliberabo cum ipso aliisque Patribus quid ad certius inventionem R^ae^. V^ae^. explorandam fieri expediat, illudque sequar quod ad laboris et operis R^ae^. V^ae^. necnon Societatis nostrae commendationem aptius esse intellexero. Interim pergat R^a^. V^a^. ea quae affecta habet perficere et perpolire ut aliquando ad publicam utilitatem in lucem ea proferre possit. "

Le 19 avril 1625 Mutius Vitelleschi écrit sur le même sujet au provincial Florent de Montmorency :

" Non ignorat credo V^a^. R^a^. P^em^. Gregorium a Sancto Vincentio jam pridem in perquirendâ circuli quadraturâ, re a multis seculis saepe frustra tentata, laborasse, eumque omnino sperare eam a se repertam esse. Quod cum, antequam res in lucem proferatur, diligentius examinandum sit ne, ut multis accidit, re divulgata error detegatur, desiro R^a^. V^a^. eum prima commoditate huc mittat, ut cum P. Christoph. Grienberger (qui ex iis quae huc P. Gregorius misit spem optimam de illius conatibus concepit) aliisque mathematicis inventa sua communicare iisque examinanda tradere possit. "

L'original de cette lettre est perdu, la minute en est conservée. Je donne le texte ci-dessus d'après une copie faite sur la minute et qui appartient au Collège Notre-Dame à Anvers.

([20]) C'est la grande liberté d'opinion de Grégoire de Saint-Vincent qui semble avoir été la cause de tous ces déplacements; car voici ce que Mutius Vittelleschi écrit le 16 septembre 1628 à Jacques van der Straeten, à ce moment provincial de la Flandre-Belgique (la minute existe encore; je cite une copie appartenant au Collège Notre-Dame à Anvers).

" Eaedem causae quae Reverentiam Vestram cogant optare ut Pater Gregorius a Sancto Vincentio alibi extra istam provinciam occupetur, faciunt ut alii eumdem a se abesse cupiant. Quare, cum nulla onus illius minus quam ista, in qua tot annis vixit, recusare posset, danda est opera ut Reverentia Vestra eum alicubi collocet ubi moribus suis et loquendi libertate quam minimum alios offendat. "

Qu'on veuille se rappeler le caractère de Grégoire et les idées de son époque pour comprendre cette lettre.

Je l'ai déjà dit ci-dessus dans l'Intruction (VI, pp. 12 et 13). A Rome Grégoire prend plaisir à faire murmurer les philosophes, à Louvain il affecte avec éclat de dédaigner les théologiens, il est en vue et appelle l'attention sur lui; il est clair que pendant le procès de Galilée ce devait être un personnage compromettant.

Mais pour ne laisser aucun doute sur le sens des paroles de Mutius Vitelleschi j'appelle en outre l'attention sur ce fait, qu'au point de vue de la discipline et de la régularité religieuse Grégoire de Saint-Vincent ne semble pas avoir mérité de reproches. Par ses habitudes qui font scandale, il faut entendre l'audace avec laquelle il soutenait en public ses opinions scientifiques; le peu de souci qu'il prenait de ménager les préjugés de ses auditeurs. L'*Elogium* dit en termes expres que Grégoire était: " religiosus optimi spiritus nec amantior regularum quam observantior, tenacissimus priorum propositorum quae semel conceperat " p. 33.

On se tromperait d'ailleurs en voyant dans cette phrase une exagération de panégyriste contredite par les faits. Je n'en donnerai qu'une preuve mais convaincante pour tous ceux qui connaissent les traditions de la Compagnie de Jésus. Du 29 mai au 10 août 1653 les supérieurs n'hésitèrent pas à confier à Grégoire de Saint-Vincent la charge de Vice-Recteur du collège de Gand. Ce fait peu connu est relaté dans les lettres annuelles de ce collège conservées aux Archives générales du Royaume à Bruxelles (Archives des jésuites de la province Flandro-Belge, cahier relié portant inscrit au dos le titre : Histoire et Lettres annuelles du Collège de Gand 1585-1695. Pièce intitulée : Supplementum historiae Coll. Gandensis, 1653, f° 53, r°).

([21]) II *Cor*. XI, 26.

([22]) Voici le texte complet de cette règle : " Nostrae vocationis est diversa loca peragrare et vitam agere in quavis mundi plagâ, ubi majus Dei obsequium, et animorum auxilium speratur. " *Summarium Constitutionum*. Cette règle est en fait la troisième; c'est par distraction que le narrateur de l'*Elogium* dit que c'est la seconde.

([23]) Anne Éléonore de Mantoue, femme de l'empereur Ferdinand II, fille de

Vincent I duc de Mantoue et d'Éléonore de Médicis, née en 1599, morte le 27 juin 1655. Il ne faudrait pas conclure de ce que dit ici le rédacteur de l'*Elogium* que le P. Grégoire de Saint-Vincent eut le titre officiel de confesseur. La charge de confesseur de l'empereur était alors occupée par un Luxembourgeois, né à Dochamp, le P. Guillaume de Lamormaini. Je ne puis que renvoyer aux Histoires générales de la Compagnie de Jésus les lecteurs que ce sujet intéresserait. Mais je leur signalerai un document, de publication relativement récente, et que ces Histoires ne nomment pas : *Correspondenz Kaisers Ferdinand II und seiner erlauchten Familie mit P. Martinus Becanus und P. Wilhelm Lamormaini Kaiserl. Beichtvätern S. J. Herausgegeben von dr B. Dudik O. S. B.* publié dans les ARCHIV FÜR ÖSTERREICHISCHE GESCHICHTE. HERAUSGEGEBEN VON DER ZUR PFLEGE VATERLÄNDISCHER GESCHICHTE AUFGESTELLTEN COMMISSION DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, 54e Band, 2e Hefte, Wien, 1876, pp. 219-350.

(24) Jaroslaw Borita, comte de Martiniz, mort le 11 novembre 1649.

(25) Philippe IV, roi d'Espagne, né le 8 avril 1605, mort le 17 septembre 1665.

(26) Don Juan d'Autriche fils naturel de Philippe IV, né à Madrid en 1629, mort le 17 septembre 1679. Il remplaça en 1656 l'achiduc Léopold dans le gouvernement des Pays-Bas et en fut rappelé en 1659 après avoir perdu contre Turenne la bataille des Dunes (4 juin 1658). Devenu premier ministre sous le règne de Charles II (1677) il fit le mariage du roi avec Marie-Louise d'Orléans et mourut peu après.

(27) Ferdinand II, empereur d'Allemagne, né le 9 juillet 1578, mort le 15 février 1637.

(28) Voir : *Le R. P. Jean Charles della Faille de la Compagnie de Jésus, précepteur de don Juan d'Autriche,* par H. P. Vanderspeeten, Bruxelles, Vromant, sans date, et aussi mon mémoire : *Deux lettres inédites.*

(29) Le rédacteur de l'*Elogium* ne nomme pas les Pères dont il parle. Cette manière vague de dire *un Père,* sans déterminer de qui il s'agit, est intentionnelle et fréquente dans ce genre de documents. Elle n'en est pas moins regrettable. Pour l'expliquer, il faut se rappeler que les *Elogia* étaient des espèces d'oraisons funèbres qui se lisaient immédiatement après la mort du défunt et qu'il pouvait parfois être difficile et délicat d'y parler des vivants mêlés aux faits que l'on racontait.

(30) Greinberger ne me paraît pas avoir été aussi convaincu de l'exactitude de la quadrature de Grégoire de Saint-Vincent que le rédacteur de l'*Elogium* veut bien le dire. De Sarasa est, je crois, plus près de la vérité quand il écrit : " ... Vt clarius tamen facti rationem exponam, dicam omnia. Geometris scribebantur haec, quibus non sola Quadratura circuli orexin movet et explet ; alia namque habet Opus hoc (il s'agit du *Problema Austriacum*), Dimensione Circuli haud inferiora, uti non semel a multis jam annis vir in Geometricis expeditissimus Christophorus Greinbergerus Societatis Iesu, publice orè litterisque Romae professus est ; quae praeterquam quod ad Quadraturam manu deducerent, et quasi viam aperirent, non minorem ipsa plausum, quam Quadratura merebantur, cum ea plane forent ipsius tunc quidem judicio, nunc autem et plurimorum qui sine partium studio rem, prout est, dijudicant, quae cum Anti-

quorum omnium elucubrationibus poterant comparari. „(*Solutio problematis a Patre Marino Mersenno Minimo propositi*, p. 21.) Cette appréciation de Greinberger est conforme à celle de Leibniz dans le célèbre rapprochement qu'il fait entre Descartes, Fermat et Grégoire de Saint-Vincent. *Acta eruditorum*, juin 1686, p. 298.

Voir en outre dans la note du texte (19) p. 38, les deux lettres de Mutius Vitelleschi.

(31) L'ouvrage de Viviani a pour titre :

De maximis et minimis libri dvo. || *De maximis et minimis Geometrica divinatio In Qvintvm Conicorvm Apollonii Pergaei adhuc desideratvm. Ad serenissimvm Ferdinandvm II Magnvm dvcem Etrvriae. Liber primvs. avctore Vincentio Viviani. Florentiae MDCLIX. Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo Stellae. Svperiorvm permissv.*

De maximis et minimis geometrica divinatio in Qvintvm Conicorvm Apollonii Pergaei iamdiv desideratvm. Ad serenissimvm principem Leopoldvm ab Etrvria Liber secvndvs. avctore Vincentio Viviani. Florentiae MDCLIX. Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo Stellae. Svperiorvm permissv.

Deux vol. in-4°, Bibl. de l'Univ. de Gand, Math. 53. Le texte auquel il est fait allusion se trouve à la fin de la préface du 1er vol., p.(b_4), v°.

Comme le titre l'indique, cet ouvrage de Viviani est un essai de restitution du livre V des *coniques* d'Apollonius. Ce genre d'étude était à cette époque fort en vogue; mais le traité *De maximis et minimis* offre une particularité qui le rend des plus intéressants, c'est que deux ans plus tard, en 1661, Borelli publiait le texte même d'Apollonius traduit en latin sur une version arabe et fournissant ainsi l'occasion des plus rares de comparer une divination de ce genre avec l'œuvre originale. (Voir sur cet ouvrage de Borelli la note (12) du texte p. 36.)

La bibliographie des œuvres de Viviani a été donnée dans la *Biblioteca Matematica Italiana... dal dott. ing. Pietro Riccardi... Modena... MDCCCLXXX*, coll. 625-630. Elle est complétée dans les appendices publiés postérieurement : Série IV, coll. 207... Série V, coll. 175.

(32) Leotaud, Vincent, naquit à Vallouise, dans le département des Hautes-Alpes, le 22 janvier 1596, entra dans la Compagnie de Jésus le 13 octobre 1613, et mourut à Embrun, le 13 juin 1672. Il enseigna pendant douze ans les mathématiques à Dôle et à Lyon. La bibliographie de ses œuvres est donnée dans la *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus* des PP. De Backer et Sommervogel, Bruxelles, 1893, t. IV, coll. 1705-1706.

Il écrivit deux ouvrages contre la quadrature du cercle de Grégoire de Saint-Vincent. Le premier a pour titre :

Cvrvilineorvm amoenior contemplatio necnon examen circvli qvadratvrae, a R. P. Greg. a S. Vincentio, Soc. Iesv propositae. || *Examen Circvli qvadratvrae hactenvs editarvm celeberrimae, quam Apollonivs alter, magno illo Pergaeo non minor Geometra, R. P. Gregorivs a Sancto Vincentio Societatis Iesv, Exposvit, Authore Vincentio Leotavdo Delphinate, eiusdem Societatis. Cuius operâ è tenebris simul emergit perelegans et peramoena cvrvilineorvm contemplatio : Olim inita ab Illustrissimo et Reuerendissimo D. D. Artvsio de Lionne, Episcopo et Comite Vapincensi, et Abbate Solignacensi, Regioque Consiliario. Lvgdvni*

Apud Gvilielmvm Barbier, Typographum Regivm, M.DC.LIV. Cvm privilegio Regis. In-4°, Bibl. de l'Univ. de Louv. Scienc. 582. Exemplaire portant au titre l'inscription manuscrite : " Soc(ieta)tis Iesu Gandavi, M. 7. "

Le P. Aynscom essaya de le réfuter dans son *Expositio ac deductio Geometrica Qvadratvrarvm Circvli, R. P. Gregorii a Sancto Vincentio... Antverpiae... M.DC.LVI.* (Voir le titre complet : Introduction I, p. 3 ci-dessus.)

En réponse à Aynscom, Léotaud publia un second ouvrage :

Cyclomathia sev mvltiplex circvli contemplatio, tribvs libris comprehensa. In I. Quadraturae Examen confirmatur ac promouetur. II. Anguli contingentiae natura exponitur. III. Quadratricis facultates inauditae proferuntur. Authore Vincentio Leotavdo Delphinate Societatis Iesv. Lvgdvni, Sumptibus Benedicti Coral, in vico Mercatorio, sub signo Victoriae. M.DC.LXIII. Cvm Superiorvm Permissv. In-4°, Bibl. Roy. de Belg., V.5017. Exemplaire portant au titre l'inscription manuscrite : " Coll. Societatis Iesu Gandaui. M. 7. " Il est probable que Grégoire de Saint-Vincent s'est servi de ces deux exemplaires de Léotaud.

Le rédacteur de l'*Elogium* dit vrai. Des expressions flatteuses pour Grégoire de Saint-Vincent se rencontrent fréquemment sous la plume de Léotaud, mais il m'a paru sans intérêt d'en faire le relevé. Pour nommer au moins un passage, je renverrai à la préface p. e r°.

(33) Il s'agit du *R. P. Gregorii a S^to. Vincentio ex Societate Iesu opus geometricum posthumum ad mesolabium per rationum proportionalium novas proprietates. Finem operis mors authoris antevertit. Gandavi, typis Balduini Manilii, Typographi Iurati, sub signo albae Columbae, anno 1668. Superiorum Permissu.* (Bibl. Roy. de Belg., V. H. 8140.) Voir *Deux Lettres*, p. 5.

Comme Grégoire de Saint-Vincent mourut le 27 janvier 1667, il faut en conclure que l'*Elogium* a été écrit soit l'année même de sa mort, soit au plus tard l'année suivante.

(34) Dans ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (2e éd., t. I, pp. 625 et 626), Cantor résume succinctement les travaux mathématiques et astronomiques que les jésuites accomplirent en Chine. Il nomme les PP. Matthieu Ricci, Jules Aleni, Jean François Gerbillon, Adam Schall, Ferdinand Verbiest, Prémare et Gaubil. Cette liste est loin d'être complète et pour ne parler que des seuls Belges, il faudrait y ajouter les noms des PP. Couplet, Noël, Thomas et bien d'autres. Cette intéressante histoire, trop oubliée aujourd'hui, a néanmoins une bibliographie des plus riches. On en trouve les éléments principaux dans la *Bibliographie historique de la Compagnie de Jésus ou catalogue des ouvrages relatifs à l'Histoire des Jésuites depuis leur origine jusqu'à nos jours* par Auguste Carayon, S. J., Paris, Durand, 1864 (chap. III, pp. 62-175). Les renseignements qui y sont donnés doivent se compléter par ceux que l'on trouve à l'article " Chine " dans la *Bibliothèque des Écrivains de la Compagnie de Jésus...* par Augustin De Backer. Nouvelle édition, Liége, 1869, t. I, coll. 1242-1263 (Ne pas confondre cette édition avec la troisième que nous citons couramment et où l'article précédent qui appartient à la deuxième partie, *Histoire*, n'est pas encore réédité). Le P. De Backer ne reproduit pas les titres des ouvrages cités par le P. Carayon.

(35) Josias, comte de Rantzau, maréchal de France, né en Danemark le

18 octobre 1609, mort le 4 septembre 1650. Ce fut le 26 mai 1642, à la journée de Honnecourt perdue par les Français, qu'il fut fait prisonnier par don Francisco de Mello. Il fut relâché l'année suivante après la bataille de Rocroy (19 mai 1643).

Rantzau avait servi d'abord en Hollande, ensuite sous Gustave-Adolphe, puis dans l'armée de l'empereur, qu'il quitta pour retourner avec les Suédois et passer enfin, en 1635, au service de la France. Aussi était-il considéré par les Impériaux comme coupable de trahison.

Pour plus de détails, voir *Histoire des Princes de Condé pendant les XVI^e^ et XVII^e^ siècles*, par le duc d'Aumale, Paris, 1889 (tt. III-V, aux endroits signalés à la p. 152 de l'*Index*). Le maréchal de Rantzau y apparaît sous un jour fort différent de celui où le montre l'auteur de l'*Elogium*. Ce dernier écrit probablement d'après des traditions locales, qu'un quart de siècle a pu défigurer, mais qui étaient demeurées fort vivaces à Gand, car à la mort de Grégoire de Saint-Vincent, le rédacteur des lettres annuelles du collège de Gand croit lui aussi devoir insister sur la conversion de Rantzau (Archives générales du Royaume, Archives des jésuites de la province Flandro-Belge, cahier relié portant au dos le titre : Histoire et lettres annuelles du Collège de Gand, 1585-1695. Pièce intitulée " Litterae annuae Collegii Gandensis „, 1661, fol. 104 r°).

Tout ce qu'on peut cependant conclure de ces récits, c'est que pendant sa détention à Gand, le maréchal se plaisait dans la société du jésuite et qu'il s'était lié d'amitié avec lui.

(36) Espèce de Jeu de dames. Voir *Récréations mathématiques* par Edouard Lucas, t. II, Paris, Gauthier-Villars, 1883, p. 5; *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* von Dr W. Ahrens, Leipzig, Teubner, 1901, p. 81, etc. etc.

(37) *Luc*, XII, 36-40. Γρηγορέω s'emploie dans la langue ecclésiastique pour ἐγρηγορέω, mot poétique qui signifie *veiller;* d'où le substantif Γρήγορεος *éveillé* et le nom propre Γρηγόριος *Grégoire.*

LA CROIX

CHEZ LES SCANDINAVES D'AMÉRIQUE

AU MOYEN AGE

PAR

Eug. BEAUVOIS

Les Scandinaves et les Gallgaëls d'Islande (*), qui visitèrent quelques contrées du Nouveau Monde à la fin du X[e] siècle de notre ère (**), qui s'établirent en Grœnland dès 985 (***), qui se convertirent au christianisme en l'an 1000 (IV), portèrent dans leurs pérégrinations et leurs nouveaux établissements les rites funéraires de leurs mères-patries évangélisées depuis plus ou moins longtemps, et notamment la coutume de mettre la croix sur les tombeaux. C'est ce que firent au commencement du XI[e] siècle les

(*) E. Beauvois, *Les premiers chrétiens des îles nordatlantiques* (dans LE MUSÉON, t. VIII, n[os] 3 et 4, Louvain, 1888), et *Les chrétiens d'Islande au temps de l'Odinisme, IX[e] et X[e] siècles* (dans LE MUSÉON, t. IX, n[os] 3 et 4, Louvain, 1889).

(**) E. Beauvois. *La découverte du Nouveau Monde par les Islandais et les premières traces du christianisme en Amérique avant l'an 1000* (dans le *Compte rendu du Congrès intern. des Américanistes*, 1[re] session, Nancy, 1875, in-8°, t. I).

(***) E. Beauvois, *La découverte du Grœnland par les Scandinaves au X[e] siècle* (dans LE MUSÉON, t. IX, n° 4, Louvain, 1892).

(IV) E. Beauvois, *Origines et fondation du plus ancien évêché du Nouveau Monde, le diocèse de Gardhs en Grœnland*. 986-1126 (dans MÉMOIRES DE LA SOC. D'HIST., etc., de l'arrondissement de Beaune, 1878).

survivants d'une embarcation norvégienne qui avaient fait naufrage sur la côte orientale du Grœnland : la croix de pierre qu'ils érigèrent aux *Finnsbuds* (Baraques de Finn) sur la sépulture de Finn, page du roi saint Olaf, et de leurs autres compagnons, subsistait encore au temps d'Ivar Bàrdarson, vers le milieu du XIVe siècle (*). Thorvald, fils d'Eirik Raudé, le premier colonisateur du Grœnland et frère de Leif, l'évangélisateur de ce pays, ayant été blessé à mort, en 1004, par un indigène du Vinland (États-Unis), ordonna à ses compagnons d'ériger une croix à sa tête et une autre à ses pieds; aussi la localité fut-elle appelée *Krossanes* (Promontoire des croix) (**).

Si l'on en retrouve si peu, en Grœnland, c'est que les unes, en métal, ont été enlevées par les envahisseurs Esquimaux, qui s'en faisaient des pointes de flèches ou de harpons (***), et que les autres, en bois, sont tombées en poussière, à moins qu'elles ne gisent sous les ruines des églises ou n'aient été enfouies dans les sépultures. Ce dernier cas s'est présenté pour trois croix de bois, hautes de 5 à 9 pouces, longues de 3 pouces et demi, trouvées à Ikigait (IV), localité située à l'ouest et près de Friedrichsthal (V).

(*) ANTIQUITATES AMERICANÆ *edidit Societas R. Antiquariorum Septentrionalium studio et opera* Caroli Christiani Rafn, Copenhague, in-fol., pp. 306-308, 459 et 460. — GRŒNLANDS HISTORISKE MINDESMÆRKER, publiés pour la même Société par Ch. Chr. Rafn et Finn Magnusen, 1838-1845, 3 vol. in-8°, t. II, p. 239; t. III, pp. 8, 253, 847).

(**) *Épisode des Grœnlandais*, dans ANTIQ. AMERIC., p. 46, et GRŒNLAND. HIST. MINDESM., t. I, p. 230; t. III, p. 900.

(***) C. Pingel, *Antiquariske Efterretninger fra Grœnland,* dans ANNALER FOR NORDISK OLDKYNDIGHED, 1839, p. 250. — V. Wilhelm Boye, *Beskrivelse af og Fortegnelse over de ved D. Bruun i Nordboruinerne fremgravede Oldsager,* dans MEDDELELSER OM GRŒNLAND, t. XVI, Copenh., 1896, p. 438.

(IV) C. Pingel, *Antiquariske Efterr. fra Grœnland,* dans ANNALER F. NORD. OLDK., 1842-1843, p. 232. — J.-J.-A. Worsaae, *Chorographie archéolog. du Grœnland,* dans GRŒNLANDS HIST. MINDESM., 1845, t. III, p. 801. — G.-F. Holm, *Beskivelse af Ruiner i Julianehaabs Distrikt, 1880,* dans MEDDELELSER OM GRŒNLAND, t. VI, Copenhague, 1883, in 8°. pp. 76, 143.

(V) Finnur Jónsson (*Grœnlands gamle Topografi efter Kilderne,* dans MEDDELELSER OM GRŒNLAND, t. XX, 1899, pp. 284, 299, 348 et carte II), l'identifie avec la résidence de Herjólf Bárdarson, un des premiers colonisateurs scandinaves du Grœnland qui y mena, en 986, le premier ecclésiastique cité dans les sources,

On y découvrit en outre, dans l'antique cimetière, une plus grande croix de bois, haute de 14 pouces, et dont la partie inférieure se termine en pointe (*), ce qui indique qu'elle était destinée à être plantée. On exhuma de plus, au même endroit, trois petites pierres tombales, mesurant respectivement 11, 13, 15 pouces de long, sur 8, 9, 10 de large, ornées chacune d'une croix gravée, qui s'élargit aux extrémités en forme de delta, de triangle ou de pointe de pique (**). Une autre, beaucoup moins simple, paraît avoir servi deux fois, car on y lit sur un des bords le mot *idus* (ides), presque effacé et paraissant être le dernier reste d'une première inscription et, au milieu, dans un médaillon oblong, une inscription plus récente en langue norraine, mais à majuscules latines plus maigres que *idus* : " *Her hvilir Hro ... Kolgrims* „, que l'on traduit ainsi, après l'avoir complétée " *Ici repose Hro(ald) Kolgrims(son).* „ Elle est gravée de chaque côté du pied d'une croix dont les extrémités concaves sont légèrement élargies. Une croix du même genre orne un fragment de pierre tombale recueilli dans le même cimetière (***). Dans le district de Julianehaab, où est situé Ikigait, subsistent au fond du golfe d'Igalikko les ruines d'une église de même nom qui, seule parmi celles que l'on a retrouvées, est en forme de croix (IV); pour cette raison et pour d'autres qui ont plus de poids, on infère que c'était la cathédrale du diocèse de Gards. Quoi qu'il en soit, on ne peut faire pour un monument de ce genre la même objection qui a été faite pour des antiquités transpor-

---

un moine originaire des Hébrides, vraisemblablement un papa Columbite (*Landnámabók*, Copenhague, 1843, in-8°, part. II, ch. 14; part. V, ch. 14, p. 106, 320. — *Flateyjarbók*, Christiania 1860, t. I, pp. 430 et 431. — Cfr. GRŒNLANDS HIST. MIND., t. I, p. 208. — ANT. AMERIC., pp. 18 et 19. — E. Beauvois, *Orig. et fond. du plus anc. évêché du Nouveau Monde*, p. 112).

(*) C. Pingel, dans ANNALER, 1842-1843, p. 335.

(**) IBID., pp. 332-335. Voy. les fig. 1, 2, 3 de la pl. X de GRŒNL. HIST. MINDESM., t. III.

(***) *Nordisk Tidsskrift for Oldkyndighed.* Copenhague, 1832, in-8°, t. I, fasc. I pp. 222 et 223; fig. dans GRŒNLANDS HIST. MINDESM., t. III, pl. IX, fig. 1; cfr. p. 801 du texte.

(IV) G.-F. Holm, *op. cit.*, dans le t. VI des MEDDELELSER, p. 111, avec la carte d'Igalikko, pl. XXVI. — D. Bruun, *op. cit.*, dans le t. XVI des MEDDELELSER, p. 324-329, avec plan de l'église, p. 327.

tables, en soutenant qu'elles sont de provenance exotique et qu'elles ne prouvent rien quant aux mœurs et aux croyances de la population indigène (*).

Les trouvailles les plus abondantes dont nous ayons à parler consistent en croix fort simples gravées, plus ou moins légèrement, sur des galets, de petites pierres ou des tessons de vases (**). Comme la plupart de ces objets sont percés d'un ou de plusieurs trous, surtout près de l'un des bords, on doit admettre qu'ils étaient destinés à être suspendus, soit au cou ou sur une autre partie du corps (en guise de médaille de dévotion), soit aux fils de métier à tisser, soit aux filets de pêche (en guise de cliquettes ou de lest).

Les croix gravées sur ces objets sont, comme les nôtres, de différentes formes; il y a les croix latines dont le pied est plus grand que les autres branches (***); les croix grecques ou à branches égales, pattées ou fleuronnées (IV), les croix à deux croisillons, dites patriarcales ou de Lorraine (V); les croix de Saint-André en forme de X (VI). Celles qui ne consistent pas en deux simples traits se coupant à angle droit ou obtus, sont généralement, comme sur les pierres tombales, élargies aux extrémités (VII); tel est le cas pour une croix gravée sur une pierre qui a dû servir de moule pour y couler du métal (VIII). On fondait donc des croix dans le pays même ; à la vérité on n'en a pas trouvé parce que le métal est plus périssable et plus recherché que la pierre ; mais c'est évidemment l'une d'elles qui a servi de modèle pour graver sur des galets des chrismes où l'anse du *rho* est à gauche de la haspe

---

(*) D. Bruun, *op. cit.*, dans le t. XVI des MEDDELELSER, pp. 433, 492. — Finnur Jónsson, *op. cit.*, dans le t. XX des MEDDELELSER, pp. 289 et 290.

(**) D. Bruun, *op. cit.*, t. XVI, pp. 428, 487. — V. Boye, *op. cit.*, dans le t. XVI des MEDDELELSER, p. 438.

(***) Holm, dans le t. VI des MEDDELELSER, p. 141. — V. Boye, dans le t. XVI, pp. 447, 456. — Cfr. pour les croix tombales GRŒNLANDS HIST. MIND., pl. IX, fig. 1 ; pl. X, fig. 1, 2, 3.

(IV) Holm, *loc. cit.*, p. 140. — V. Boye, *loc. cit.*, p. 447.

(V) V. Boye, *loc. cit.*, p. 443.

(VI) Holm, *loc. cit.*, pp. 140 et 141. — V Boye, *loc. cit.*, pp. 444, 456.

(VII) Holm, *loc. cit.*, pp. 140 et 141. — V. Boye, *loc. cit.*, pp. 447, 452, 456 et 457

(VIII) V. Boye, *loc. cit.*, p. 457.

au lieu d'être à droite (*). On peut citer d'autres monogrammes du Christ, où le *rho* n'est pas à rebours, mais a la forme de l'un des *r* runiques (**). Un tau, gravé sur un galet et pourvu d'un petit crochet à droite, paraît aussi former un chrisme (***).

Le nombre, la nature (croix, tau ou crucifix), la forme (diverses espèces de croix, sculptées, taillées, gravées, gravées, peintes), la matière (bois, métal), des objets cruciformes, provenant de l'Amérique précolombienne, tiennent d'ailleurs surtout au hasard des trouvailles, comme on peut s'en assurer en constatant qu'il n'a pas été découvert un seul crucifix parmi tant de monuments grœnlandais du moyen âge, tandis qu'il en a été signalé chez les Mayas du Yucatan, chez les Tzendals de Chiapas, chez les Culuas de l'État actuel de Vera-Cruz (IV).

Ces trouvailles fournissent un important ensemble de faits qui confirment les récits des sagas et corroborent les documents écrits : elles ne laissent aucun doute sur l'existence précolombienne d'une chrétienté en Grœnland et sur la piété plus ou moins éclairée des habitants qui prenaient peut-être la croix autant pour amulette que pour objet d'adoration. Leur portée est encore beaucoup plus grande : le petit nombre de croix retrouvées dans ce pays dont le climat n'est pas destructeur comme celui de la zone tropicale ; où le catholicisme s'est maintenu plus longtemps que partout ailleurs dans l'Amérique précolombienne ; dont les colons sont restés en relations suivies avec leur mère-patrie pendant quatre siècles ; où l'on fait des fouilles systématiques depuis quatre ou cinq générations — le petit nombre de ces reliques, disons-nous, suffit à expliquer la rareté des croix dans d'autres pays plus méridionaux où l'évangélisation a été étouffée par le prompt réveil de l'esprit païen. Si les croix sont encore moins communes dans la mission des Papas sur les rives du golfe et du fleuve Saint-Laurent et au Mexique, ce n'est pas une raison

---

(*) V. Boye, *loc. cit.*, pp. 160 et 161.

(**) *Ibid.*, pp. 447, 450, 456 et 457.

(***) Holm, *loc. cit.*, p. 140.

(IV) Voy. notre mém. sur *les Croix précolombiennes chez les Mayas du Yucatan et les contrées voisines* (dans REVUE DES QUESTIONS SCIENTIF., juillet 1902, 3e série, t. II, pp. 109 et 110, 112, 114, 118).

péremptoire d'affirmer que le crucifix n'y ait pas été adoré avant le XVI^e siècle. Il suffit de prouver que le christianisme a été prêché au Grœnland dès le moyen âge pour rendre vraisemblable sa propagation ultérieure dans le Nouveau Monde, car le trajet du Grœnland au Labrador et de là au Canada n'est pas plus long ni plus difficile que le passage des îles gaéliques en Islande et de là aux côtes occidentales du détroit de Davis. Il n'est donc pas permis d'interdire, comme on l'a voulu faire, dans le congrès des Américanistes (1883), toute discussion sur la présence et la signification des croix précolombiennes !

GLIOME OU SARCOME DE L'ŒIL?

PAR

le Docteur RUTTEN

Le gliome de l'œil est une des affections oculaires qui donnent le plus souvent lieu aux erreurs de diagnostic. Tous les oculistes sont d'accord là-dessus. Comme preuve, je ne cite que le fait suivant qui m'a été fourni par mon ami le professeur Van Duyse de Gand: sur trente-et-un cas reconnus avant l'opération de gliome à la clinique de l'Université de Berlin, le diagnostic a été erroné huit fois. D'un autre côté, le docteur G. Sourdille, de Nantes, publie dans la Clinique ophtalmologique du 25 octobre 1901 : " Si j'en crois les recherches histologiques que j'ai faites dans le laboratoire de notre École, sur dix yeux énucléés pour gliome se trouvent trois pseudo-gliomes ". Combien de fois ne lisons-nous pas des observations décrites sous le nom de " pseudo-gliomes " alors que nous savons tous que ces affections oculaires, qui présentent comme symptôme commun l'œil de chat amaurotique (*), ont leur place tout indiquée dans une des catégories suivantes qui, d'après leur fréquence, ne peuvent être que :

1° Le décollement de la rétine surtout après un traumatisme;

2° Le leuco-sarcome de la choroïde ou tubercule qui nécessite aussi une intervention chirurgicale des plus rapides;

3° L'effet d'une inflammation aiguë ou chronique, notamment dans les infections septicémiques générales : pyémie, variole, typhus (**) ou l'hyalite qui est toujours consécutive à l'uvéite;

(*) *Amaurotique* parce que l'œil est aveugle; *œil de chat* parce qu'il est lumineux comme l'œil de chat dans l'obscurité.

(**) Clinique ophtalmologique, nov., 1902, Paris; Dr Rutten, *Ophtalmie métastatique de l'œil gauche au cours d'une fièvre typhoïde.*

4° La persistance de la capsule vasculaire du cristallin et de l'artère hyaloïdienne;

5° Les résidus d'hémorragies;

6° Plus rarement les kystes de la rétine (Iwanoff).

Dans notre cas le diagnostic de tumeur intra-oculaire étant certain, on n'a pas eu recours à l'éclairage de contact de Rochon-Duvigneaud ni à la ponction exploratrice. Ces deux nouvelles méthodes d'investigations doivent beaucoup diminuer les difficultés de diagnostic du gliome et au moins limiter le nombre des erreurs commises jusque maintenant.

Observation. — Le petit V..., originaire de la province du Limbourg, âgé de dix ans, s'était aperçu en mai 1901 qu'il ne voyait plus de l'œil gauche. Le jeune homme consulta un oculiste qui vit du côté gauche un œil de chat amaurotique. Il informa le père de la nécessité d'une énucléation immédiate. Celui-ci ne suivit pas le conseil et employa des remèdes d'empiriques jusqu'à ce qu'en avril 1902, il remit son enfant à l'Institut ophtalmique de Liége.

A son entrée à l'établissement je constate, comme mon confrère, l'état particulier du fond de l'œil gauche, indiquant les symptômes d'une tumeur intra-oculaire. Cécité complète. Hypertension bien manifeste. Il y a hyperhémie des veines conjonctivales et sous-conjonctivales. Le globe est douloureux à la pression. Les autres caractères de l'œil étant ceux du tableau symptomatique du glaucome inflammatoire seront décrits dans l'examen anatomique du bulbe. L'œil droit est sain. Pas de traumatisme. L'influence de l'hérédité n'existe pas. L'état général mauvais. Actuellement le malade souffre de maux de tête passagers, particulièrement du côté de l'œil malade. Changement dans le caractère de l'enfant depuis quelque temps. Vomissements cérébraux sont constatés.

Le jour après son entrée je procède à l'énucléatien de l'œil malade et comme il est prescrit pour les tumeurs intra-oculaires, je coupe le nerf optique en arrière aussi loin qu'on peut l'atteindre. Les suites de l'opération furent normales et dix jours plus tard l'enfant, dont l'état général s'était amélioré notablement, quitte tout content l'Institut, porteur d'un œil artificiel.

Qu'il me soit permis de relater un petit incident qui a rapport à l'œil de verre et qui d'ailleurs a déjà été constaté par d'autres

oculistes. A son retour l'enfant s'était endormi dans la voiture du tram qui devait le ramener chez lui, quand tout à coup les voyageurs du compartiment furent frappés par un bruit de vitre cassée. Tout le monde chercha la cause de cette détonation mais on ne constata rien. Dans l'entretemps le petit brusquement réveillé porta la main à la tête et dit à son père : " L'œil de verre a sauté ". Et effectivement le père retira les deux morceaux qui heureusement n'avaient pas blessé le garçon. La cause doit être attribuée à un défaut dans la porcelaine produit par la cuisson. Dans la fabrication des yeux artificiels entrent deux sortes d'émail dont le degré de dilatation est différent.

Quoique le médecin de la famille n'ait jamais constaté le moindre indice de récidive sur place et qu'il fût impossible, au moment de l'extirpation de l'œil, d'observer aucune trace de pénétration des germes du mal dans l'économie, l'enfant mourut un mois après l'opération, en présentant les symptômes de méningite. A moins d'admettre une complication toujours possible de méningite tuberculeuse, il est probable que le néoplasme avait déjà pénétré dans le cerveau par voie d'embolie avant l'énucléation de l'œil.

Examen anatomique du bulbe

L'œil énucléé après durcissement dans l'alcool offre un diamètre antéro-postérieur de 22^{mm}, tandis que les diamètres horizontaux et verticaux mesurent 20^{mm}. Les coupes montrent que le tissu cornéen est transparent et normal, sauf au rebord scléro-cornéen qui est fortement allongé et aminci, comme c'est souvent le cas dans le glaucome infantile. L'iris est attaché encore au corps ciliaire; il est en synéchie large avec la *sclera-cornea,* étiré, et cela presque en totalité vers le côté temporal. Les tissus de l'iris et du corps ciliaire sont infiltrés de leucocytes. La chambre antérieure est très profonde et mesure 4^{mm}. L'humeur aqueuse est remplie de leucocytes qui sont fixés près des bords libres de l'iris et entre ceux-ci et la membrane de Descemet et spécialement dans la partie profonde de la chambre antérieure. Le cristallin n'offre rien d'anormal que sa position plus vers le centre que cela n'a lieu normalement. Le corps vitré est représenté par une masse gélatineuse infiltrée de leucocytes dans sa portion péri-

phérique. Sur les coupes elle n'occupe qu'environ 1/6 de son volume normal. Tout autour jusque vers la tumeur se trouvent des leucocytes. Le nerf optique est atrophié et infiltré sans excavation. Les gaines du nerf optique sont infiltrées. La rétine n'est représentée que par quelques faibles traces ; la choroïde dans sa partie distale est séparée par la tumeur en deux parties dont l'une est située au-devant de celle-ci et l'autre en arrière. La tumeur elle-même offre la disposition d'une calotte à diamètre antéro-postérieur de $2^{mm}\ {}^{1}/_{2}$ et de 13^{mm} du diamètre horizontal ; elle fait corps avec le nerf optique. Elle est constituée par de petites cellules arrondies sans pigment, disposées par places en cylindres. Ici la distinction entre gliome de la rétine et sarcome de la choroïde n'est pas facile. En faveur du sarcome plaident l'âge de l'enfant, le gliome étant rare après l'âge de 4 ans ; puis la séparation en deux parties de la choroïde, qui tend à faire admettre une génèse de la tumeur entre ces deux parties. Mais, d'autre part, si la tumeur s'est développée dans la rétine juste à la papille optique, elle peut s'être diffusée entre la choroïde. Le fait que la tumeur n'offre aucune ouverture correspondant à la papille optique tend vers la dernière hypothèse ; en tout cas, ce fait est certainement la cause de la non-excavation de la papille qu'elle a protégée contre la pression exagérée, cause de l'allongement anormal du bord scléro-cornéen. Comme dans le gliome, le second œil est souvent entrepris, ce qui n'est pas le cas ici, et comme en général l'accroissement du gliome est très rapide, tandis qu'ici l'œil de chat a existé au delà d'une année, nous penchons plutôt vers le diagnostic d'un sarcome, tout en avouant qu'il y a incertitude. Vers la partie moyenne de l'œil, la choroïde n'offre rien d'anormal et quelques restes de la rétine sont visibles. La sclérotique vers la partie postérieure est infiltrée de leucocytes, preuve d'une inflammation dans cette région.

DE LA PRÉSENCE DE LA BILE

DANS LE

LAIT DE CERTAINES NOURRICES

PAR

le docteur **FAIDHERBE**

Les variations des éléments divers qui composent normalement le lait de la femme ont été souvent étudiées dans leurs rapports avec la nutrition des jeunes enfants. Les auteurs se sont aussi fréquemment et longuement appesantis sur la présence dans le lait d'éléments anormaux, soit chimiques, soit organiques, qui peuvent vicier l'allaitement et troubler gravement par leurs effets la santé des nourrissons.

Il semble cependant que la plupart aient méconnu les accidents que pouvaient déterminer certains produits naturels ou n'y aient point prêté l'attention voulue. Il en est ainsi de la présence de la bile : deux auteurs semblent seuls l'avoir signalée, encore n'y ont-ils attaché qu'une médiocre importance et ne l'ont-ils remarquée que dans les cas où la mère était atteinte d'ictère apparent.

Le Dr Bonchut dit en effet dans un de ses ouvrages (*) : « Dans l'ictère, le lait renferme souvent quelques-uns des éléments de la bile et principalement sa matière colorante jaune, ce qui donne à ce liquide une teinte safranée qui se change en vert par l'addition

---

(*) E. Bonchut, *Hygiène de la Première Enfance*, 8e édition, Paris, 1885, p. 148.

d'une petite quantité d'acide nitrique. C'est une expérience que j'ai eu occasion de faire plusieurs fois et qui a été faite également par Gorup-Besanez (*). „

Quelles qu'aient été nos recherches dans les divers auteurs qui se sont occupés de la question de l'allaitement et des modifications du lait, nous n'avons pu trouver d'autre note sur la question. Aussi nous a-t-il paru intéressant de relater quelques observations que nous avons eu l'occasion de faire ces dernières années et qui semblent prouver que la bile peut exister dans le lait plus fréquemment qu'on ne le pense et qu'il peut être utile de l'y rechercher quelquefois.

Observation I. — M^me^ T... K..., âgée de 38 ans, a déjà nourri cinq enfants, tous bien portants. Elle nourrit son sixième enfant, âgé de 7 mois, quand, en août 1899, elle remarque que cet enfant jusqu'alors bien portant devient chagrin et agité, prend le sein avec moins d'avidité, présente quelques vomissements et semble maigrir un peu; en même temps, le teint de l'enfant change et devient fort pâle. Au bout de quatre ou cinq jours pendant lesquels elle remarque qu'elle-même a moins d'appétit et de force, elle est prise brusquement de cholérine aiguë avec vomissements répétés, selles profuses et fétides, algidité légère succédant à de forts accès de fièvres, crampes. Le même jour, les vomissements de l'enfant augmentent et il se produit quelques selles diarrhéïques peu abondantes, en même temps que son teint devient couleur de vieil ivoire.

Appelé dans la journée, nous ordonnons la diète à la mère à qui nous défendons d'allaiter son enfant pour le moment : nous lui prescrivons une potion avec chlorodine, salicylate de bismuth, benzonaphtol, et un purgatif; l'enfant est mis à l'eau de Vals. Les accidents furent rapidement enrayés et le quatrième jour la mère put rendre le sein à l'enfant sans inconvénients appréciables pour celui-ci.

Le point remarquable de notre observation, c'est que le lait, tiré par la mère pour dégager ses seins, était excessivement clair, presque aqueux et présenta au bout de quelques heures une teinte

---

(*) Gorup-Besanez, Archiven für Physiologische Heilkunde, 1849.

verdâtre fort nette qui augmenta considérablement d'intensité par l'addition d'acide nitrique. Ce phénomène particulier dura pendant les quatre jours de l'indisposition de la mère, mais s'affaiblissant progressivement.

Observation II. — Mme M..., 29 ans, femme petite, un peu délicate, toujours constipée et fortement dyspeptique, accouche en juin 1900 de son second enfant et veut le nourrir malgré nos observations. Dès le troisième jour, l'enfant présente de l'ictère hémaphéïque très net, sans aucun trouble apparent du reste. Nous ne pensions guère à prêter attention à ce phénomène vulgaire, malgré sa persistance, quand, le dixième jour après la naissance, nous constatons que l'ictère, au lieu de disparaître, devient plus foncé : le lendemain, le corps entier de l'enfant est verdâtre et la face a pris absolument la teinte du bronze vert. En même temps l'enfant est pris de vomissements, rejetant le lait caillé même trois ou quatre heures après la tétée : les selles sont rares et compactes.

Nous faisons donner à l'enfant quelques cuillers d'eau de Vals après chaque tétée et une cuiller à café d'un mélange :

Huile de ricin	5 grammes.
Huile d'amandes douces . . .	15 »

La situation reste la même pendant quarante-huit heures, et nous notons quelques légers mouvements fébriles, 38° maximum, tandis qu'apparaît une diarrhée lientérique.

Au bout de ce laps de temps, voyant qu'aucune amélioration ne se produit, nous pressons la mère de sevrer l'enfant, ce que nous obtenons assez difficilement du reste.

Le lait de la mère était assez gras et épais et sa composition ne devait guère s'écarter de la normale, car sa densité était de 1031,5 environ, mais par le repos il donnait au bout de quelques heures une coloration jaune foncé que l'acide nitrique transformait en coloration verte.

L'enfant, mis en nourrice, perdit en quelques jours sa teinte verte si spéciale, mais il resta très sensible de l'estomac et succomba en septembre à des accidents de gastro-entérite aiguë, compliqués de phénomènes méningitiques.

Observation III. — Mme L... B..., âgée de 26 ans, accouche le 5 février 1902 d'un garçon avant terme (7 mois et huit jours environ). Lors de ses grossesses précédentes, elle a accouché en février 1900, à sept mois, au cours d'une attaque de grippe, d'une fille qui a vécu seulement quarante-huit heures, et en février 1901 d'un garçon à terme, mort le 16 août de gastro-entérite infectieuse.

La mère qui a présenté longtemps de la chloro-anémie, mange bien et quoique mince semble assez résistante ; mais elle est ordinairement constipée, a une digestion assez paresseuse et, sans avoir jamais eu d'ictère, présente souvent un teint jaune mat : l'examen ne nous a d'ailleurs point révélé d'affection hépatique apparente. Jamais rien dans les urines, examinées plusieurs fois au cours des diverses grossesses.

L'enfant pèse 1780 grammes : on l'enveloppe de feuilles d'ouate et, quelques heures après sa naissance, on le place dans une couveuse ou il reste jusqu'au 27 février, en raison de sa faiblesse et de la rigueur de la température ; à partir de cette date, on le sort progressivement dans la journée, mais on l'y maintient encore pendant la nuit jusqu'au 13 mars. C'est à cette date seulement qu'il est possible d'abandonner complètement ce moyen de protection.

Le poids de l'enfant, allaité par la mère, passe progressivement de 1780 grammes à la naissance à

1760 grammes		le 10 février		6e jour	
1774	„	15	„	11	„
1782	„	16	„	12	„
1814	„	19	„	15	„
1900	„	21	„	17	„
2009	„	23	„	19	„
2010	„	25	„	21	„
2111	„	27	„	23	„
2108	„	le 1er mars		25	„

Malgré cette augmentation générale du poids qui, insuffisante pour un sujet normal, pouvait paraître satisfaisante chez un enfant, venu avant terme et mis en couveuse, la santé du nouveau-né laissait à désirer.

Les extrémités restaient froides, bleues, œdématiées et dures pendant une dizaine de jours, malgré les bains de vin chaud, les frictions excitantes et les massages prudents; la circulation se faisait mal et les battements du cœur étaient fort irréguliers. Chaque matin, la mère et la garde remarquaient que le teint de l'enfant était très jaune; il avait des vomissements fréquents, des alternatives de constipation et de diarrhée; des selles tantôt dures et sèches, tantôt fort molles, mêlées de grumeaux de lait non digéré, de matières glaireuses et de filaments jaune verdâtre. A plusieurs reprises, il fut pris d'accidents d'apparence tantôt syncopale, tantôt convulsive, qui n'étaient pas justifiés par un abaissement de la température et qui nous parurent devoir être rapportés à un réflexe gastrique.

Le lait de la mère fut tiré sur notre demande trois jours de suite afin qu'on pût comparer les échantillons des diverses journées, les analyser au besoin et voir s'il existait des différences de composition d'un jour à l'autre. Dès le second jour, le premier échantillon présentait une teinte verte qui alla s'accentuant jusqu'au quatrième jour : il en fut de même des autres spécimens tirés.

La composition du lait fut trouvée trop faible d'environ 1/10 en éléments normaux par rapport à la composition ordinaire du lait de femme, mais les expériences suivantes démontrèrent d'une manière certaine la présence de la bile dans le liquide examiné.

1° Dans un tube à essai, nous versâmes deux centimètres cubes d'acide sulfurique concentré et une pincée de nitrate de potasse pulvérisé : en versant ensuite doucement le lait sans mélanger les deux liquides, nous obtînmes dans leur zone de contact une très belle coloration verte.

2° A un volume de lait, nous avons ajouté quelques gouttes d'acide chlorhydrique pur, puis un volume d'un mélange d'éther et de chloroforme. Après agitation et décantation du mélange éthéro-chloroformique, nous le fîmes chauffer au bain-marie dans une capsule de porcelaine afin de le réduire à un petit volume; en ajoutant alors le réactif de Gmesin — acide azotique nitreux — nous obtînmes encore une magnifique coloration verte.

En présence du résultat de l'analyse, nous crûmes devoir faire supprimer l'allaitement maternel et confier l'enfant à une nourrice expérimentée et d'une santé parfaite.

Dès que la substitution eut été opérée, l'enfant gagna considérablement, comme le prouve le tableau suivant :

1er mars	25e jour	2108	grammes
3 „		2152	„
5 „		2208	„
9 „		2305	„
11 „	35e „	2367	„
13 „		2363	„
15 „		2491	„
18 „		2542	„
20 „		2630	„
22 „	46e „	2669	„
24 „		2765	„
26 „		2830	„
28 „		2926	„
30 „		2920	„
1er avril	56e „	2895	„
2 „		2894	„
3 „		3015	„
4 „		3072	„
5 „		3060	„
6 „		3145	„
7 „		3065	„
8 „	„	3175	„

Ces dernières oscillations de poids sont dues, partie à une irrégularité dans les conditions de la pesée, partie à un rhume qui fit souffrir l'enfant pendant plusieurs jours. Le 27 juin, l'enfant atteignait le poids de 4865 grammes bien qu'il eût contracté la rougeole au mois de mai : la maladie s'est du reste passée facilement sans donner lieu à aucune complication.

Ces trois observations, pour intéressantes qu'elles nous paraissent être, ne sont sans doute point suffisantes pour élucider complètement la question et établir une étude; nous ne voyons en elles qu'une occasion d'éveiller l'attention sur un point insuffisamment signalé jusqu'ici des difficultés multiples que rencontre le médecin dans la direction de l'allaitement maternel, et un sujet de recherches nouvelles dans le sens indiqué.

La découverte de la bile dans le lait a été pour nous une surprise dans les trois cas, rien en effet ne permettait d'en soupçonner la présence *à priori* et nous n'avions nullement songé, après nos deux premières observations, à nous occuper de la question; c'est la répétition du même fait une troisième fois qui nous a frappé et nous a amené à étudier la question et à en signaler l'intérêt.

Les conditions sont pourtant un peu différentes entre nos trois sujets, soit au point de vue de l'étiologie des accidents, soit au point de vue de leur importance. Dans le premier cas en effet, la mère a présenté des phénomènes gastro-entériques des plus nets, et il est facile de comprendre comment, au cours d'une cholérine aiguë, précédée d'ailleurs d'une période prémonitoire, inaperçue par elle, mais qu'un médecin n'eût point méconnue, le foie a pu être touché et sécréter une quantité plus grande de bile; il est cependant remarquable que les pigments biliaires se soient éliminés en aussi grande abondance par les sécrétions naturelles du corps, sans avoir produit un ictère appréciable du côté de la peau.

Chez les deux autres nourrices au contraire, les phénomènes gastro-entéro-hépatiques étaient absolument frustes; sans doute c'étaient des constipées et des dyspeptiques dont le fonctionnement du foie devait être troublé, mais rien chez elles ne décelait de manifestations hépatiques de nature à faire prévoir, ni à expliquer la présence de la bile dans le lait. Cependant le teint fréquemment jaunâtre de ces personnes permet de supposer qu'elles avaient habituellement une suractivité hépatique manifeste, bien qu'insuffisante pour déterminer chez elles des accidents sérieux ou même seulement des inconvénients notables.

Le fait remarquable, c'est que les pigments biliaires n'apparaissent point directement dans le lait et qu'ils ne peuvent ordinairement y être reconnus dès l'extraction du liquide que par l'analyse chimique : il faut en effet que l'air intervienne pour oxyder les pigments contenus dans le lait, avant que la coloration se montre, et celle-ci devient de plus en plus intense pendant les premiers jours.

On pourrait, il est vrai, nous objecter que cette coloration peut être produite par le bacille chromogène qui a justement la propriété de transformer la couleur du lait et de le faire verdir, mais

nous ne croyons pas que cette explication puisse être avancée ici, car les réactions chimiques par l'acide nitrique dans les premiers cas, par l'acide nitrique nitreux et l'acide nitrique naissant dans le troisième, ont été trop nettes et trop caractéristiques pour qu'on puisse contester l'existence réelle des pigments biliaires et ne pas leur attribuer la coloration.

Quelles relations existent entre la présence de la bile dans le lait des nourrices et l'état de santé de l'enfant ? Faut-il lui attribuer seule les troubles gastro-entériques des nourrissons dans les cas que nous avons observés? Question fort difficile à résoudre et que seules de nouvelles recherches permettront d'élucider complètement.

On a donné bien souvent de la bile ou des sels biliaires à des malades pour améliorer les accidents hépatiques et accessoirement les accidents gastriques dans certaines affections et notamment dans la lithiase biliaire, et de nombreux sujets s'en sont bien trouvés. Peut-on incriminer la bile dans le cas présent et prétendre qu'elle a été nuisible et a provoqué une action défavorable?

Il faut noter que l'estomac de l'enfant est fort sensible et qu'une cause morbide, si légère soit-elle, a prise sur lui et peut amener des troubles graves ; le mélange au lait d'un principe anormal et surtout d'un principe irritant et âcre, comme la bile, n'est-il pas suffisant pour léser cet organe si délicat et amener des accidents gastriques ? De plus, la bile qui passe ainsi dans le lait de la nourrice sous l'influence d'une affection chronique ou d'une maladie infectieuse, n'est sans doute plus de la bile normale et doit présenter par suite des propriétés offensantes. Enfin, dans ces cas, la bile est sans doute accompagnée dans le lait par d'autres produits irritants et morbides — toxines et ptomaïnes — élaborées dans le corps de la mère et susceptibles d'amener chez les enfants les troubles constatés.

Aussi admettrions-nous volontiers que la bile dans ces cas n'a joué qu'un rôle secondaire et que la première place dans la pathogénie des accidents doit être attribuée à ces autres composants occasionnels du lait dont la recherche est fort difficile et dont la constatation ne pourrait être faite que par une longue expérimentation sur les animaux.

Nous trouvons une preuve de ce que nous avançons dans notre

seconde observation, car les accidents d'ictère si spécial remarqués chez le second enfant dont nous avons parlé, ne peuvent s'expliquer que par une action énergique sur son foie de produits toxiques, apportés du dehors et ayant excité et perturbé violemment le fonctionnement de cet organe. Nous n'avons en effet constaté qu'une seule fois une coloration du même genre, et encore moins étendue et moins intense chez une femme d'une trentaine d'années qui fit de l'infection du foie au cours d'attaques répétées de coliques hépatiques.

En résumé, nous pouvons conclure en disant que :

1° Chez la nourrice, il peut arriver qu'en dehors même de tout ictère apparent, il existe dans le lait de la bile ou des pigments biliaires que l'analyse chimique décèle ;

2° La présence de la bile dans le lait, soit par elle-même, soit en raison des principes toxiques organiques qu'elle accompagne, peut être une cause de troubles variés et surtout de troubles gastro-hépatiques chez le nourrisson ;

3° On devra, en cas de troubles gastriques et d'insuffisance d'accroissement du poids que ne peut expliquer complètement la composition du lait, rechercher la présence de la bile dans le liquide, et, après l'y avoir constatée, faire supprimer l'allaitement maternel si la cause ne paraît point être une cause passagère et ne peut être facilement supprimée.

LES ESPÈCES

DU

GENRE « *HAEMANTHUS* L. »

(Sous-genre NERISSA *Salisb.*)

PAR

É. DE WILDEMAN

Docteur en sciences naturelles

Conservateur au Jardin botanique de l'État à Bruxelles

INTRODUCTION

Le genre *Haemanthus* a été créé en 1700 par le célèbre Pithon de Tournefort qui le décrivit à la page 657 de ses *Institutiones rei herbariae,* et figura l'unique espèce alors connue sous le vocable binominal de *Haemanthus africanus* (tab. 433). Linné reprit le nom de Tournefort, pour la première fois, dans son *Systema,* éd. I (1735), puis dans le *Genera plantarum,* éd. I (1737), p. 97, n. 276.

La première plante connue dans ce genre fut débaptisée par Linné, qui transforma *Haemanthus africanus* en *Haemanthus coccineus* L. (Sp. pl., p. 412), nom qui est encore en usage actuellement.

Le genre, tel qu'il est compris de nos jours, a subi dans le temps bien des transformations ; on a essayé de le démembrer et une dizaine de noms ont vu le jour, soit pour dénommer des genres séparés du type, soit pour indiquer des sections du genre. R. A. Salisbury fut un des derniers à morceler ce genre.

Dans son *Genera* (*), il admet dans la famille des *Amaryllideae,*

(*) *The Genera of plants,* Liriogamae, Londres, 1866, p. 130.

un ordre des *Haemantheae* et 5 genres : *Melicho* Salisb., *Diacles* Salisb., *Haemanthus* S. L. T. Herm., *Gyaxis* Salisb. et *Nerissa* Salisb.

Si l'on compare entre eux les caractères proposés par l'auteur pour différencier ces divers genres, on voit qu'ils sont assez faibles, mais qu'ils pourraient être employés pour différencier des sous-genres, comme l'a fait M. Baker dans sa monographie des *Amaryllideae* (*).

Mais avant de passer à l'examen de la différenciation des sous-genres que l'on peut établir dans le genre *Haemanthus,* il y a lieu, pensons-nous, d'attirer l'attention sur les caractères génériques.

M. Baker, dans le dernier travail d'ensemble paru sur ce genre *(loc. cit.),* donne des *Haemanthus* la description générique suivante, qu'il nous a paru utile de reproduire ici.

„ Périanthe dressé; tube subcylindrique; segments égaux, linéaires ou lancéolés, étalés ou ascendants. Etamines insérées à la gorge du tube du périanthe; filaments filiformes, souvent plus longs que les segments; anthères petites, oblongues, versatiles. Ovaire globuleux, tri-loculaire; ovules sessiles, solitaires ou par paires collatérales, attachés au centre du placenta; style filiforme; stigmate très courtement tricuspidé. Fruit globuleux, bacciforme. Graines souvent solitaires; testa pâle, membraneux. — Souche constituant un bulbe tuniqué. Feuilles larges, obtuses, minces ou charnues. Pédoncule épais, solide. Fleurs rouges ou blanches, en ombelles denses; valves de la spathe, dressées ou étalées, membraneuses. „

M. Pax, dans la revision des *Amaryllidacées,* publiée dans Engl. et Prantl *Natürl. Pflanzenfam.,* II, v. p. 97, donne une description assez sommaire du genre, de même M. Harms, dans Engler *Pflanzenwelt Ost. Afr.* p. 145, ne décrit le genre qu'en quelques mots, mais tous deux attirent l'attention sur la *souche bulbeuse.* Bentham et Hooker dans leur *Genera* signalent le même caractère.

Certes il est difficile de définir le mot bulbe, mais si l'on examine quelques souches d'*Haemanthus,* on verra que, au moins pour certaines espèces du sous-genre *Nerissa,* on ne peut considérer les

(*) *Handbook of the Amaryllideae including the Alstroemeriae and Agave* London, 1888.

souches comme des bulbes vrais et surtout comme des bulbes tuniqués. Chez certaines espèces, telles l'*H. Eetveldeanus* De Wild. et Th. Dur., la souche devient un véritable rhizome, nous en avons vu un en herbier qui mesurait 6-7 centim. de long sur 12 millim. de diamètre et chez l'*H. Cabrae* De Wild. et Th. Dur., nous en avons mesuré de 6 à 7 centim. de diamètre.

Dans l'*H. Arnoldianus* De Wild. et Th. Dur., la souche est réduite à un plateau sur lequel se trouvent disposées en plusieurs rangs concentriques les gaines des feuilles fanées et du centre duquel part la nouvelle pousse florale et foliaire, simulant ainsi un bulbe tuniqué.

On ne peut donc considérer ce caractère comme général et il y aurait lieu de rechercher chez les espèces des divers sous-genres d'*Haemanthus* à quel groupe morphologique se rattachent les organes souterrains.

Le caractère employé par MM. Baker et Pax pour séparer les *Amaryllideae* des *Agavoideae* et *Hypoxidioideae* ne tient donc pas, puisque nous possédons des *Haemanthus* privés de bulbe. On peut se rabattre sur la tige feuillue *(Agavoideae* et *Hypoxidioideae)* ou la branche florale privée de feuilles *(Amaryllioideae)* pour séparer ces divers groupes.

Un autre caractère donné par M. Baker et qui est légèrement inexact est celui des feuilles, ces dernières ne sont pas toujours obtuses, comme cela se remarque dans certaines espèces des sous-genres à feuilles grasses, mais au contraire assez acuminées.

Quant aux valves de la spathe, elles sont non seulement dressées ou étalées, mais dans ce dernier cas se réfléchissent totalement pendant la floraison.

M. Baker nous semble avoir fort bien délimité dans le genre 4 sous-genres, qui se rapportent à 4 des genres créés par Salisbury, Deux, *Nerissa* et *Gyaxis,* sont caractérisés par des feuilles membraneuses, les deux autres se reconnaîtront à leurs feuilles charnues épaisses, ce sont les sous-genres *Diacles* et *Melicho.* C'est sur la disposition des valves de la spathe que l'on se basera pour différencier *Nerissa* et *Gyaxis;* elles sont réfléchies au moment de la floraison chez les *Nerissa,* tandis qu'elles restent dressées chez les *Gyaxis.*

Tous les *Haemanthus* appartiennent à la flore de l'Afrique, le

genre renferme une cinquantaine d'espèces environ, dont le plus grand nombre est localisé dans le sud de l'Afrique, les sous-genres *Melicho* et *Diacles* sont uniquement représentés dans cette partie du Continent noir ; le sous-genre *Nerissa* n'est représenté dans le sud-africain (Cap de Bonne-Espérance), que par une seule espèce, l'*H. Katharinae* Baker ; le sous-genre *Gyaxis* possède trois espèces endémiques dans l'Afrique tropicale, les autres sont spéciales au sud de l'Afrique.

Jusque vers 1890, les *Nerissa* n'étaient guère répandus dans les cultures, on en trouvait parfois chez quelques amateurs et dans les grandes maisons horticoles, mais ils ne semblaient pas entrer dans le domaine public. A partir de cette époque seulement et grâce aux introductions de plantes de l'État Indépendant du Congo, on trouve plusieurs espèces de ce genre dans le commerce, et l'*Horticole coloniale* (rue Wiertz, à Bruxelles) a même introduit la fleur coupée dans le commerce.

La culture des *Haemanthus* n'est pas chose difficile, elle n'exige pas de serres à très haute température, une moyenne de 18 degrés est très suffisante pour obtenir de belles plantes ; pour conserver celles-ci, il est utile de ne pas les déplanter trop souvent et de les placer dans une terre légère. On peut prolonger la durée de floraison en plaçant les plantes fleuries dans des endroits où la température est un peu plus froide que celle de la serre où elles ont végété. Il faut bien observer le repos de la plante et pendant cette période ne pas lui donner trop d'eau, ce qui est d'ailleurs très souvent la cause de la mort de bien des plantes de nos serres.

Quant à la multiplication, elle peut se faire avec toutes les parties de la plante, chez certaines espèces du moins.

Le morcellement de la base renflée, des fragments de pétiole et de pédoncule peuvent donner, quand ils sont placés dans des conditions favorables, naissance à de nouvelles plantes et celles-ci peuvent également être obtenues de graines. Mais les graines ne se forment pas aisément en serre, la fécondation même artificielle ne réussit pas toujours.

On a essayé à l'*Horticole coloniale* l'hybridation des pieds d'*Haemanthus;* fécondés par des *Clivia* ils ont donné quelques fruits dont les graines ont pu être amenées à maturité ; elles ont germé et donné naissance à de jeunes plantes qui n'ont pas encore fleuri. Il sera intéressant de suivre ces produits.

ÉTUDE SYSTÉMATIQUE

HAEMANTHUS (*Tourn.*) *L.*

Plantes herbacées, à souche bulbeuse ou rhizomateuse. Feuilles peu nombreuses, larges, membraneuses ou charnues, aiguës ou obtuses. Hampe florale épaisse, non creuse, centrale ou latérale par rapport à la touffe de feuilles. Fleurs rouges ou blanches, en ombelles denses, entourées d'une spathe polyphylle, à lobes dressés ou étalés, membraneux, incolores ou colorés comme les fleurs. Pédicelles plus ou moins allongés. Périanthe dressé, à tube subcylindrique, à segments égaux, linéaires ou elliptiques, lancéolés, étalés ou ascendants. Étamines insérées à la gorge du tube du périanthe, à filaments filiformes, dépassant souvent les lobes du périanthe; anthères petites, oblongues, versatiles, pollen jaune, elliptique, à paroi externe granuleuse, à un seul sillon longitudinal. Ovaire globuleux, triloculaire; ovules sessiles solitaires ou par paires collatérales, attachés au centre du placenta. Style filiforme, à stigmate très courtement tricuspidé. Fruit globuleux, bacciforme. Graines souvent solitaires, à testa pâle, membraneux.

Sous-genre Nerissa (*Salisb.*) *Baker.* — Feuilles membraneuses; lobes de la spathe étalés, réfléchis; segments du périanthe étalés.

Hybrides Gyaxis × Nerissa. — Feuilles membraneuses, valves de la spathe étalées, réfléchies; segments du périanthe étalés-dressés.

Sous-genre Gyaxis (*Salisb.*) *Baker.* — Feuilles membraneuses; lobes de la spathe dressés; segments du périanthe dressés.

Sous-genre Melicho (*Salisb.*) *Baker.* — Feuilles épaisses, charnues; lobes de la spathe et segments du périanthe étalés.

Sous-genre Diacles (*Salisb.*) *Baker.* — Feuilles épaisses, charnues; lobes de la spathe et segments du périanthe dressés.

CLEF ANALYTIQUE DES ESPÈCES

Nerissa (*Salisb.*) Baker

Pédoncule latéral par rapport à la touffe de feuilles.
- Segments du périanthe 1-nervés.
  - Segments de 12-22 millim. de long.
    - Tube du périanthe de 8 millim. environ de long. Pédicelle de 25 à 31 millim. de long. — *H. filiflorus.*
    - Tube du périanthe de 9-10 millim. de long. Pédicelles de 12-20 millim. de long. — *H. Goetzei.*
  - Segments de 22-25 millim. de long.
    - Tube du périanthe de 6 millim. environ de long. Pédicelles de 37-50 millim. de long. — *H. zambesiacus.*
    - Tube du périanthe de 10-12 millim. de long. Pédicelles de 15-35 millim. de long. — *H. Arnoldianus.*
- Segments du périanthe 3-5 nervés.
  - Segments de 12 millim. environ de long.
    - Filaments staminaux atteignant 20 millim. environ de long. Pédicelles de 25 millim. environ de long; anthères de 1 millim. de long. — *H. micrantherus.*
    - Filaments staminaux de 18 millim. environ de long. Pédicelles de 12-18 millim. de long; anthères de 2 millim. de long. — *H. rupestris.*
  - Segments de 15-30 millim. environ de long.
    - Étamines aussi longues que les segments.
      - Pédicelles courts, de 12-18 millim. de long. — *H. Mannii.*
      - Pédicelles de moitié aussi longs que les fleurs, de 15 millim. environ. — *H. eurysiphon.*
    - Étamines plus longues que les segments.
      - Tube du périanthe du 6-12 millim. de long.
        - Ombelle de 7.5-15 centim. de diamètre. Pédicelles de 20-40 millim. de long. — *H. multiflorus.*
        - Ombelle de 15-20 centim. de diamètre. — *H. robustus.*
      - Tube du périanthe de 12-20 millim. de long, filaments de 25-45 millim. de long, ombelle de 10-37 centim. de large. — *H. Katharinae.*

Pédoncule central par rapport à la touffe de feuilles.
- Segments de 20-35 millim. de long.
  - Tube de 4-13 millim. de long.
    - Feuilles panachées. — *H. Germarianus.*
    - Feuilles non panachées.
      - Filaments staminaux de 22-33 millim. de long.

Pédicelles de 20-30 millim. de long, lobes de 3 millim. de large, feuilles de 2-3 millim. non distiques entourées de gaines, plus ou moins longuement pétiolés, à pétioles de 6-13 millim. de long. *H. Cabrae.*

Pédicelles de 15-25 millim. de long, lobes de 3-5 millim. de long, environ 6 feuilles sans gaine, distiques, courtement pétiolées, à pétiole de 6-8 centim. de long. *H. longipes.*

Pédicelles de 25-40 millim. de long, lobes de 6-7 millim. de large, feuilles longuement pétiolées à pétiole de 16-22 centim. de long. *H. Eetveldeanus.*

Filaments staminaux de 37-42 millim. de long.

Lobes de 22-25 millim. de long et de 2-3 millim. environ de large. *H. fascinator.*

Lobes de 32-33 millim. de long et de 5 millim. environ de large. *H. Laurentii.*

Tube de 16-20 millim. de long, lobes de 25-37 millim. de long. *H. Lindeni.*

Segments de 12-20 millim. de long.

Tube du périanthe de 3-5 millim. de long.

Segments de 15 millim. de long, étamines beaucoup plus longues que les segments, à filets staminaux de 20-22 millim. de long, feuilles de 11-12.5 cm. de large. *H. Kundianus.*

Segments de 10-13 millim. de long, étamines à filets de 13-18 millim. de long, feuilles de 6,5 centim. maximum de large. *H. Demeusei.*

Tube du périanthe de 6-15 millim. environ de long.

Pédicelles de 12-25 millim. de long.

Filaments staminaux aussi longs que les lobes, de 17 millim. environ de long, tube du périanthe de 8 millim. de long. *H. rotularis.*

Filaments staminaux plus longs que les lobes.

Filaments de 17-20 millim. environ de long, tube de 10-12 millim. de long, lobes de 13-14 millim. de long, feuilles longuement pétiolées, à environ 15 nervures rapprochées de chaque côté de la nervure médiane. *H. congolensis.*

Filaments de 20-30 millim. environ de long, tube de 6-9 millim. de long, lobes de 16-18 millim. de long et de 4-5 millim. de large, feuilles courtement pétiolées, *H. cinnabarinus.*

Pédicelles de 25-45 millim. de long.

Filaments staminaux de 22-30 millim. de long, pédicelles de 25-32 millim. de long, tube de 8 millim. de long. *H. angolensis.*

Filaments staminaux de 30-35 millim. de long, pédicelles de 25-30 millim. de long, tubes de 13-15 millim. de long. *H. diadema.*

Observation. — L'*H. grandifolius*, qui appartient à ce sous-genre, ne peut être classé par suite de l'absence de fleurs.

HAEMANTHUS FILIFLORUS *Hiern,* ex *Baker,* in Journ. of Bot. (1878), p. 194 et Amaryll. (1888), p. 63; *Baker,* ex *This.-Dyer* Fl. trop. Afr., VII, p. 387; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. fl. afr., V, p. 264.

H. multiflorus *Mart.,* var. **filiflorus** *Rendle,* Cat. Welw. afr. Pl. II (1899), p. 34.

Plante à base renflée de 37 à 50 millim. de diamètre. Feuilles naissant sur une tige spéciale de 30 centim. environ de long et portant jusqu'à 6 feuilles, à pétioles élargis, embrassants. Lame oblongue de 30 centim. de long et de 15-20 centim. de large, à 10-12 nervures de chaque côté de la nervure principale, les centrales distantes de 6 millim. environ. Pédoncule latéral de 30-45 centim. de long, maculé. Ombelle dense, de 12,5 à 15 centim. de diamètre, valves de la spathe de 5 centim. de long, réfractées, d'un rouge brun, oblongues. Pédicelles de 25 à 37 millim. de long. Périanthe rouge, à tube cylindrique, de 8 millim. environ de long. Filaments staminaux de 18-25 millim. de long, à anthères petites, oblongues, rouges, à grains de pollen jaunes. Ovaire vert surmonté d'un style de même longueur que les étamines.

Angola, 1857 et 1858 (Welwitsch).

Observations. — Cette plante, dont M. Rendle croit pouvoir faire une variété de l'*H. multiflorus* Mart., ne se trouve pas dans les cultures et n'a pas été rencontrée en dehors de l'Angola. Elle est voisine des *H. Goetzei* Harms, *zambesiacus* Baker et *Arnoldianus* De Wild. et Th. Dur. Les deux premières appartiennent à la flore de l'Afrique orientale, et l'*H. filiflorus* se différencie de l'*H. Arnoldianus*, récolté dans le Congo central et dans le Katanga, par le tube et les segments plus courts. Les caractères différentiels de ces diverses espèces sont exposés dans notre tableau analytique, nous ne reviendrons donc pas sur eux.

HAEMANTHUS GOETZEI *Harms,* in *Engl.,* Bot. Jahrb., XXX (1901), p. 276.

Plante à base épaisse, atteignant 50 centim. de haut. Feuilles se développant après les fleurs, inconnues. Pédoncule latéral, entouré à la base de gaines

colorées en violet plus ou moins foncé, dressé, épais, de 25-30 centim. de haut. Bractées obovales, oblongues ou oblancéolées, violacées, de 6-7 centim. de long. Ombelle dense, multiflore; fleurs d'un rouge cinabre à pédicelles plus longs que le tube du périanthe, de 12-20 millim. de long, à tube du périanthe de 4-10 millim. de long, à lobes uninervés de 15-22 millim. de long. Étamines à filets de 22 millim. environ de long, à anthères de 2 millim. environ de long, jaunes à l'état sec, paraissant avoir été violacées avant maturité.

Afrique orientale allemande : Montagnes de Kinga, 1899 (G. Goetze).

Observations. — Grâce à l'amabilité de M. le Prof. Harms, il nous a été possible d'étudier quelques fleurs de cette espèce, tout à fait remarquable par la grandeur des bractées accompagnant la hampe florale.

Par sa hampe florale latérale, ses segments uninervés, l'*H. Goetzei* est voisin des *H. filiflorus, zambesiacus* dont il diffère non seulement par le grand développement de ses bractées, mais aussi par la longueur des segments du périanthe, du tube et des pédicelles floraux. Il paraît avoir assez bien d'analogie avec la plante que nous avons dénommée *H. Arnoldianus* et qui existerait non seulement dans le Congo central, mais aussi dans la région du Katanga et sur les bords du Tanganyka où elle porte, d'après Dewèvre, le nom indigène : " Luvungu-vungu ".

Les caractères sont très semblables, les mensurations des organes sont pour les deux espèces :

	H. Goetzei	*H. Arnoldianus*
Segments	15-22 millim.	22-25 millim.
Tube	4-10 millim.	10-12 millim.
Pédicelle	12-20 millim.	15-35 millim.
Filets staminaux	22 millim. env.	22-30 millim.

Comme on le voit, d'après ces caractères, le *H. Goetzei* semblerait être une forme un peu réduite de l'*H. Arnoldianus*. Celui-ci a, comme nous l'avons établi antérieurement, beaucoup d'affinité avec l'*H. zambesiacus*. Aussi ne serions-nous nullement étonné de devoir arriver un jour, après l'étude de plus amples matériaux, à conclure que ces trois espèces ne sont que trois formes d'un même type très voisin de l'*H. filiflorus* que nous considérons comme véritable espèce et ne pouvons rapporter, comme le fait M. Rendle, à l'*H. multiflorus*. Le nombre de nervures des segments du périanthe paraît constituer un caractère assez important.

Haemanthus zambesiacus *Baker,* in *This.-Dyer* Fl. trop. Afr., VII (1889), p. 387.

Plante à base renflée de 50 millim. environ de diamètre. Feuilles de 20-23 centim. de long et de 7,5 centim. de large, obtuses, légèrement cuspidées, rétrécies graduellement à la base en pétioles engainants, formant une tige courte. Pédoncule épais, latéral, de plus de 30 centim. de long. Ombelle globuleuse de 15 centim. environ de large, à valves de la spathe étroites, lancéolées, réfractées, pédicelles rouges de 37 à 50 millim. de long; périanthe à tube cylindrique de 6 millim. de long, à segments linéaires, étalés, uninervés, de 25 millim. de long. Filaments staminaux un peu plus longs que les segments, aplatis vers la base.

Afrique orientale anglaise : Boruma (Zambèse) (Menyharth).

Observations. — L'*H. zambesiacus* est, d'après la description qui en a été fournie par M. Baker, voisin de l'*H. Arnoldianus* De Wild.; tous deux se différencient des *H. Goetzei* Harms, et *filiflorus* Hiern, par la longueur plus grande des segments libres du périanthe. Comme nous l'avons prévu dans la clef analytique, le *H. zambesiacus* et *Arnoldianus* se différencient à leur tour par la longueur du tube, plus court chez la première espèce, et par celle des pédicelles plus courts chez la seconde.

Cette espèce ne paraît pas se trouver dans les cultures.

Haemanthus Arnoldianus *De Wild.* et *Th. Dur.* in *Th. Dur.* et *De Wild.* Mat. fl. Congo X (1901) p. 24. (Bull. soc. roy. de Bot. de Belg. XL,1 [1901], p. 30).

Plante à base en forme de plateau épais, de 5-7 centim. de large, garni de la base des feuilles de la poussée précédente et du milieu duquel part la jeune pousse. Feuilles formées après les fleurs, au nombre de 5-6, oblongues, cuspidées courtement, atténuées en pétiole à la base, à lame de 5-6 centim. de large, non connues à l'état adulte, à nervures latérales au nombre de 11-12 de chaque côté de la nervure médiane, à nervures transversales, obliques, rapprochées. Pédoncule latéral, tacheté de rouge à la base, épais, de 29-75 centim. de long, ombelle multiflore, de 10-15 centim. de large, subglobuleuse, à 30-80 fleurs; bractées lancéolées, rosées, de 3-5 centim. de long; fleurs à pédicelle rose, de 15-35 millim. de long, à périanthe rosé, devenant violacé par la dessiccation, à tube cylindrique de 10-12 millim. de long, segments linéaires, subaigus, uninervés, étroits, de 22-25 millim. de long et 1 millim. environ de large. Ovaire vert, à style rouge, de même longueur environ que les étamines. Filaments staminaux rouges, de 30 millim. environ de long, à anthères brunâtres à l'état sec, pollen jaune.

Congo : Env. de Nyangwe (Alfr. Dewèvre); Katanga (Ct. Verdick).

Observations. — Lorsque nous avons décrit cette espèce, nous avons signalé ses affinités avec les *H. filiflorus* et *zambesianus,* nous avons fait remarquer à propos de l'*H. Goetzei* les caractères communs de cette dernière espèce et de notre *H. Arnoldianus.*

Nous n'insisterons point sur les différences et les ressemblances de ces espèces qui toutes deux ne se trouvent pas encore dans les cultures, les indications de notre tableau analytique suffiront pour distinguer les deux plantes.

Haemanthus micrantherus *Pax* in *Engl.* Bot. Jahrb. XV (1893), p. 140; *Baker* in *This.-Dyer*, Fl. trop. Afr., VII, p. 388; *Th. Dur.* et *Schinz*, Consp. Fl. Afr., V, p. 265.

Bulbe de 4 centim. de long et de 2 centim. environ de large, feuilles adultes inconnues. Pédoncule grêle, latéral, de 20 centim. de long. Ombelle de 7,5 centim. environ de diamètre, à bractées lancéolées, réfléchies, caduques, colorées en rose. Pédicelles grêles de 25 millim. environ de long. Tube du périanthe de 6-8 mill. de long; segments linéaires, de 12 mill. environ de long et de 1 mill. de large, aigus; filaments staminaux aussi longs ou plus longs que les segments du périanthe, atteignant 20 mill. de long. Anthères de 1 mill. de long.

Afrique orientale allemande : Ugalla (R. Bohm, 1881).

Observations. — Les données de la " Flore d'Afrique tropicale " ne cadrent nullement avec celles de la description originale de M. le Prof. Pax. M. Baker différencie les *H. micrantherus* et *rupestris* comme suit :

Filaments staminaux de 12 millim. de long...	*H. micrantherus.*
Filaments staminaux de 18 millim. de long...	*H. rupestris.*

Or, M. Pax dit (*loc. cit.*) que les étamines mesurent 2 centim. de long, c'est donc là un caractère sur lequel on ne pourra se baser pour différencier les deux espèces. Dans la clef analytique nous avons attiré surtout l'attention sur la longueur de l'anthère, caractère qui avait frappé l'auteur puisque c'est de lui qu'il a déduit le nom spécifique. L'*H. micrantherus* ne paraît pas avoir été introduit dans la culture.

Haemanthus rupestris *Baker* in Gard. Chron. (1877), I, p. 656; Amaryll., p. 64 et in *This.-Dyer*, Fl. trop. Afr., VII, p. 388; *Th. Dur.* et *Schinz*, Consp. Fl. Afr., V, p. 267.

Bulbe petit, globuleux, de 25 millim. environ de diamètre. Feuilles au nombre de deux au sommet d'une tige spéciale courte, à pétiole de 3,7 à 5 centim. de long et de 10 centim. environ de large, arrondi à la base, à 8-9 nervures de chaque côté de la nervure principale, à nervures transversales très obliques. Hampe florale naissant latéralement par rapport à la tige feuillée, de 7,5 à 22 centim. de long. Ombelle dense, globuleuse, de 7,5 centim. environ de diamètre. Valves de la spathe au nombre de 4-5, linéaires-oblongues, rougeâtres, réfléchies, de 2,5 à 3,5 centim. de long. Fleurs à pédicelle grêle de 12 à 18 millim. de long. Périanthe rouge, à tube de 6 mill. environ de long, à segments linéaires deux fois aussi longs que le tube, de 12 millim. environ de long. Filaments rouges, plus longs que les segments, de 18 millim. environ de long; anthères oblongues, de 2 millim. environ de long.

Guinée : Dans les environs de Nupe, parmi les rochers (1859) (Barter).

Observations. — En décrivant cette plante en 1877 dans le " Gardener's Chronicle ", M. J. C. Baker la considérait comme voisine de l'*H. multiflorus* Martyn. Elle appartient certes au même groupe, mais s'écarte assez nettement de cette espèce par la grandeur des lobes du périanthe qui ne mesurent que 12 millim. environ, alors qu'ils en mesurent 18 à 25 dans l'*H. multiflorus*. L'espèce qui paraît être la plus voisine est l'*H. micrantherus* Pax, du Mozambique ; parmi les caractères différentiels, M. Baker cite la longueur des filaments staminaux, qui communiquerait aux deux plantes un aspect particulier, mais les chiffres donnés par l'auteur anglais ne concordent pas avec ceux fournis par M. Pax.

Un des meilleurs caractères est probablement la longueur de l'anthère, double chez l'*H. rupestris* de ce qu'elle est chez l'*H. micrantherus.*

Nous ne pensons pas que cette plante se trouve dans les cultures.

HAEMANTHUS MANNII *Baker* in Bot. Mag. (1878), t. 6364; Amaryll., p. 63 et in *This.-Dyer* Fl. trop. Afr. VII, p. 388; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. Fl. Afr. V, p. 265.

Bulbe globuleux, de 37 à 50 millimètres de diamètre, entouré de nombreuses racines. Feuilles au nombre de 4-6 disposées sur une tige courte, spéciale, se développant parfois après les fleurs, courtement pétiolées, oblongues, aiguës, de 15 centim. environ de long et de 5 à 6,5 centim. de large, à environ 10 nervures de chaque côté de la nervure médiane, nervures transversales rapprochées, très obliques. Pédoncule de 20 à 30 centim. de long, cylindrique, violacé, avec taches verdâtres. Ombelle de 7,5 à 12,5 centim. de diamètre; valves de la

spathe, lancéolées, réfléchies, de 37 millim. environ de long. Pédicelles de 12 à 18 millim. de long. Périanthe rougeâtre, saumoné, à tube cylindrique de 8-12 millim. de long, à segments lancéolés, de 18 millim. environ de long. Filaments staminaux aussi longs ou, à la fin de la floraison, un peu plus longs que les segments. Anthères petites, oblongues, de 2 millim. environ de long, jaunes. Style entier, dépassant à peine les étamines.

Sierra-Leone 1861 (Mann).

Observations. — Cette espèce récoltée déjà en 1861 par Mann, n'a été introduite dans les cultures qu'en 1877. C'est à M. Carder, un des collecteurs de M. Bull, que l'on doit l'introduction de cette belle espèce. Elle se rapproche de l'*H. multiflorus* dont elle se distingue par la longueur des étamines par rapport aux segments. Quant aux *H. Mannii* et *eurysiphon*, ils paraissent des plus voisins à en juger d'après la description de la dernière espèce, qui, il est vrai, est de l'Afrique orientale (Kilimandjaro) et non de l'Afrique occidentale.

HAEMANTHUS EURYSIPHON *Harms* in *Engl.* Bot. Jahrb. XIX, Beibl. 47 (1894), p. 27; *Baker* in *This.-Dyer*, Fl. trop. Afr. VII, p. 388.

Bulbe globuleux. Feuilles courtement acuminées, se développant après la hampe florale. Pédoncule latéral par rapport aux feuilles, cylindrique, de 6 millim. environ de diamètre. Fleurs au nombre de 30-35 en ombelle, à bractées oblongues ou oblongues lancéolées, acuminées ou aiguës. Fleurs à pédicelle de moins de 25 millim. de long. Tube du périanthe de 12 millim. environ de long, de 2,5 millim. environ de diamètre; segments linéaires-lancéolés, de 18 millim. environ de long. Étamines ne dépassant pas les segments du périanthe.

Kilimandjaro : Marangu (Volkens).

Observations. — L'*H. eurysiphon* paraît très voisin de l'*H. Mannii* Baker, quand on compare la description de ce dernier avec la diagnose assez simplifiée du premier.

M. Baker se base pour différencier les deux espèces sur la longueur des pédicelles; il dit :

Pédicelles courts...	*H. Mannii.*
Pédicelles de moitié aussi longs que les fleurs...	*H. eurysiphon.*

Mais quand on essaye de traduire ces données en chiffres, on voit que dans la première espèce la longueur du pédicelle varie de 12-18 millim. et qu'il est de 15 millim. environ dans la seconde.

Ce caractère paraît donc bien faible. Nous n'avons pas vu cette espèce, qui n'est d'ailleurs pas dans les cultures, et n'existe que dans l'Herbier du Jardin botanique de Berlin.

HAEMANTHUS MULTIFLORUS *Martyn* Monogr. c. icon. et ex *Willd.*, Sp. Pl. II (1800) p. 25; Bot. Mag., t. 961 et 1995; *Andr.* Bot. Rep. t. 318; *Redouté* Liliac., t. 204; *Lodd.* Bot. Cab., t. 912 et 1948; Flore des serres (1845), p. 285, t. 52; *P. C. Van Geel* Sert. bot. III (1831), pl. 43; *Baker* Amaryll., p. 63; *A. Rich.* Tent. Fl. Abyss. II, p. 312; *Kunth* Enum., V. p. 587; *Engl.* Hochgebirgsfl. trop. Afr., p. 169; *Schweinf.*, in Bull. Herb. Boiss. II, App. II, p. 80; *Baker* in *This.-Dyer* Fl. trop. Afr. VI, p. 389; *Th. Dur.* et *Schinz* Consp. Fl. Afr. V. p. 265 (*).

H. abyssinicus *Herb.* Amaryll. (1837), p. 232; *Baker* in Trans. Linn. soc. sér. 2 II (1887), p. 351.

H. arabicus *Roem.* Syn. Amaryll. (1847), p. 48.

H. delagoensis *Herb.* Amaryll. (1837), p. 233.

H. tenuiflorus var. **delagoensis** *Hook.* in Bot. Mag. sub tab. 3870 (1841); *Kunth* Enum. pl. V (1850), p. 588.

H. tenuiflorus *Herb.* var. **mossambicensis** *Hooker* in Bot. Mag. t. 3870 (1841).

H. coccineus *Forsk.* (non *L.*) Fl. Aegypt. Arab. (1775), p. 75.

H. Kalbreyeri *Baker* in Gard. Chron. ser. 2, X (1878), p. 202; Flore des serres, t. 2377; Illustr. Hort. XXVI (1878), p. 120, t. 354.

Bulbe globuleux de 5-7,5 centim. de diamètre. Feuilles au nombre de 3 ou 4, développées sur une tige spéciale, oblongues-aiguës, de 15 à 30 centim. de long et de 7,5-10 centim. de large, courtement pétiolées, à nervures latérales au nombre de 6-8 de chaque côté de la nervure médiane, les centrales distantes de 6 8 millim., à nervures obliques, rapprochées. Pédoncule latéral par rapport aux feuilles, souvent tacheté à la base. Ombelle dense, globuleuse, de 7,5-15 centim. de diamètre, à pédicelles de 20-40 millim. de long, à valves de la spathe au nombre de 6-8, lancéolées, réfléchies, vertes, de 32-50 millim. de

---

(*) Cette plante a également été signalée dans : Th. Dur. et Schinz, *Études Fl. Congo* I, p. 261, mais uniquement sur des indications verbales de M. F. Demeuse, la détermination de cette plante est donc sujette à caution. C'est la raison pour laquelle nous ne donnons pas cette citation.

long. Périanthe d'un rouge sang à tube cylindrique de 6-12 millim. de long, à segments linéaires, trinervés, de 15-25 millim. de long. Filaments staminaux plus longs que les segments du périanthe de 25-31 millim. de long; anthères oblongues de 2-3 millim. de long. Fruit bacciforme rouge écarlate.

Afrique occidentale. — Guinée supérieure : Los Islands, Sierra-Leone, Lagos, Niger, Cameroun, Fernando-Po.

Afrique orientale. — Erythrée, Kordofan, Nil Blanc, Bongo, Ruwenzori, Région du Kilimanjaro, Tanganyka (est), Zambèze, Nyassaland, Manganja Hills, Matabeleland, Delagoa-Bay.

Observations. — C'est la plus ancienne des espèces connues. Elle aurait été introduite en Europe déjà en 1603; elle existait à Paris au Jardin du Roi en 1783 et a été figurée par Vallet dans son Iconographie sous le nom de *Satyrium* e *Guinea* t. 33.

Elle a été souvent figurée depuis cette époque sous des noms divers. Elle a été introduite en Angleterre en 1792 par la Compagnie de Sierra-Leone, chez MM. Lee et Kennedy à Hammersmith. En 1803 elle fleurissait dans la collection de M. J. Vere, Kensington Gore, et servait de modèle à la belle planche publiée par Andrew dans son " Botanist Repository „. En 1845 on la voyait fleurir à Gand dans les serres de L. Van Houtte qui l'avait reçue directement de Guinée.

Sous le nom de *H. Kalbreyeri*, elle fut introduite vers 1878 à Londres chez MM. Veitch et au Muséum de Kew. La plante avait été trouvée dans l'île de Los (Guinée) par M. Kalbreyer, un des collecteurs de MM. Veitch. C'est en 1878 que la plante fleurit pour la première fois et des pieds fleuris furent présentés le 23 avril à la Société d'Horticulture de Londres.

M. Baker qui avait cru d'abord pouvoir différencier ces deux espèces a été amené à les réunir plus tard, la plante paraissant des plus variables.

On n'a que peu de données sur les usages indigènes de cette plante. Richard, dans la Flore d'Abyssinie, rapporte que les Abyssins la désignent sous le nom de " Fleur de lion „ et portent les bulbes de cet *Haemanthus,* attachés sur leurs vêtements, en guise d'amulette, car ils lui attribuent des propriétés merveilleuses.

Dans la classification primitive de M. Baker, l'*H. multiflorus* était placé à côté de l'*H. Mannii,* mais depuis, la découverte de

l'*H. eurysiphon* le fait écarter un peu de cette espèce. En opposition avec les *H. Mannii* et *eurysiphon* caractérisés par des étamines plus courtes que les segments, on peut placer les *H. multiflorus, robustus* et *Katharinae* à étamines plus longues que les segments. Ce caractère permet donc de différencier facilement les deux plantes. Quant à la dernière, *H. Katharinae,* son tube du périanthe allongé, de plus de 12 millim. de long, la sépare nettement. On reconnaîtra l'*H. robustus,* espèce encore mal connue, par son pédoncule robuste et son inflorescence plus développée; peut-être cette plante n'appartient-elle pas au groupe à hampe florale latérale.

On a indiqué une variété à fleurs doubles, que nous connaissons simplement par la mention qui en a été faite par M. P. Hariot dans le *Dictionnaire d'Horticulture* de M. D. Bois (p. 642).

HAEMANTHUS ROBUSTUS *Pax,* in *Encyl.,* Bot. Jahrb., XV (1893), p. 140; *Baker,* in *This.-Dyer* Fl. trop. afr., VII, p. 389.

Bulbe et feuilles inconnus. Pédoncule cylindrique, robuste. Spathe et valves réfléchies. Ombelle multiflore, de 15-20 centim. de diamètre; fleurs à pédicelles allongés, plus longs que les fleurs, de 6 centim. environ de long. Tube du périanthe court, de 7 millim. environ de long; segments linéaires-lancéolés, aigus, étalés, réfléchis, de 22 millim. environ de long et de 2-3 millim. de large. Filaments staminaux filiformes, plus longs que les segments, de 25 millim. environ de long, à anthères ovales, jaunes, de 3 millim. environ de long. Ovaire de 2 à 3 millim. de diamètre, à style filiforme, dépassant les filaments staminaux.

Afrique orientale : Gonda (Böhm, 1882).

Observations. — Les affinités de cette espèce sont difficiles à établir puisque l'on n'en possède pas les feuilles et que l'on ne sait comment elles naissent par rapport à la hampe florale. D'après M. le Dr F. Pax, l'*H. robustus* se rapproche de l'*H. cinnabarinus;* ce serait donc une espèce à pédoncule central. D'après M. Baker, elle est voisine, au contraire, de l'*H. multiflorus,* c'est-à-dire qu'elle appartient au groupe des *Haemanthus* à pédoncule latéral. Nous l'avons laissé à cette dernière place avec doute, car M. Baker n'a pas vu l'échantillon et la plante ne semble plus avoir été revue depuis 1882. Elle n'existe pas d'ailleurs dans les cultures. Elle porte, dans la région de Gonda, le nom indigène „ Kapessa mojo „.

HAEMANTHUS KATHARINAE *Baker*, in Gard. Chron., VII (1877), p. 655; *Hook.* f., Bot. Mag., t. 6778; *Baker,* Amaryll., p. 64 et in *This.-Dyer* Fl. Cap. VI, p. 231; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. Fl. afr., V, p. 265; *Wittmack,* in Gartenflora, 1900, p. 116, fig. 19*b* et 20*b*.

Plante à bulbe globuleux de 5 à 10 centim. de diamètre. Tige feuillée courte, à 3-6 feuilles se développant en même temps que les fleurs, oblongues, membraneuses, d'un vert foncé, de 22 à 35 centim. de long et de 10 à 15 centim. de large, rétrécies à la base en un pétiole canaliculé, maculé, de 5-12 centim. de long, à 8-11 nervures de chaque côté de la nervure médiane, les centrales distantes de 6-8 millim. Pédoncule latéral par rapport à la tige feuillée, tacheté de brun à la base, de 25-30 centim. mais atteignant parfois 75 centim. environ de long et de 12 à 30 millim. de diamètre à la base; ombelle dense, globuleuse, de 10 à 37 centim. de large. Valves de la spathe au nombre de 5 à 6, lancéolées, très minces, réfléchies, fugaces, de 25 à 60 millim. de long; fleurs à pédicelles de 25 à 50 millim. de long; périanthe rouge, à tube cylindrique de 12 à 20 millim. de long, à segments lancéolés, étalés, de 18 à 30 millim. de long et de 5 millim. de large; filaments staminaux, rouges, dressés, de 25 à 45 millim. de long, à anthères jaunes, de 2 millim. environ de long; ovaire vert, globuleux, de 3 à 4 millim. de diamètre, style dressé dépassant de 5 centim. environ la gorge de la corolle. Baie rouge, de la grosseur d'une petite cerise, de 12 millim. environ de diamètre, plus ou moins triangulaire et en général à 3 graines.

Afrique du Sud : Natal (Wood, Saunders, Sanderson); Transvaal (Galpin).

Observations. — Cette espèce, découverte en 1869 au Natal par M. Sanderson, a été introduite dans les cultures en 1877 par M. Keit, qui était à cette époque directeur du Jardin botanique de Natal. Les plantes envoyées à Londres avaient été récoltées par M^me^ Katherine Saunders, à qui elles ont été dédiées. C'est la seule espèce du genre *Haemanthus,* sous-genre *Nerissa,* qui se rencontre aussi au Sud de l'Afrique. Elle paraît être une des espèces les plus facilement cultivables; sous l'action de la culture dans nos serres, elle s'est fortement développée; dans la nature la plante était plus réduite et il est curieux de mettre en regard les mensurations obtenues sur les plantes d'introduction récente et sur celles qui ont passé par les serres.

	H. Katharinae *Type*	*H. Katharinae* *Cultivé*
Feuilles	3-4.	3-6.
Pétioles	50-75 millim.	5-12 centim.
Limbe, long.	30 centim.	22-35 centim.

	H. Katharinae *Type*	*H. Katharinae* *Cultivé*
Limbe, larg.	10-12.5 centim.	10-15 centim.
Scape, long.	30 centim.	35 centim.
Scape, larg.	12 millim.	12-25 millim.
Ombelle	15-17.5 centim.	10-37 centim.
Périanthe : tube	15 millim.	12-20 millim.
segments	18-21 millim.	18-30 millim.
Style	31 millim.	50 millim.

Ces différences obtenues font voir qu'il faut être des plus prudents lorsque l'on veut donner à certains caractères une valeur prépondérante ; elles montrent qu'il est assez probable que beaucoup d'espèces créées à ce jour ne sont que des formes horticoles sur lesquelles il y a néanmoins lieu d'attirer l'attention, car on est encore loin de pouvoir se rendre compte de l'étendue de la variabilité des espèces dans ce genre qui paraît très polymorphe. C'est en attirant fortement l'attention sur les diverses modifications des caractères floraux que l'on parviendra peut-être à saisir les vrais caractères différentiels des espèces.

Tel qu'il se présente, même avec les variations amenées par la culture, l'*H. Katharinae* se différencie facilement des *H. filiflorus, zambesiacus* et *Arnoldianus* par ses segments 3-5 nervés. Il se différencie des *H. micrantherus* et *rupestris* par ses segments plus allongés, des *H. Mannii* et *eurysiphon* par ses étamines plus longues que les segments, et enfin des *H. multiflorus* et *robustus* par le tube du périanthe plus allongé.

HAEMANTHUS HYBRIDUS *Wittmack,* in Gartenflora (1900), p. 113, pl. 1472, fig. 19*c* et 20*c* (*H. puniceus* ♀ et *H. Katharinae* ♂) et Gartenwelt, 1899.

Tubercule assez grand, vert, ponctué de brun. Feuilles naissant en même temps que les fleurs, au nombre de 4 à 6, ondulées, brillantes, d'un beau vert, atteignant 35 centim. de long et 12 centim. de large, courtement aiguës, à 8-10 nervures de chaque côté de la nervure médiane ; nervures secondaires obliques, assez peu marquées, gaines maculées. Hampe florale atteignant jusque 1 mètre de haut et mesurant jusque 5 centim. de diamètre à la base, maculée de brun pourpre, surtout à la base. Inflorescence subglobuleuse de 25 centim. environ de diamètre. Valves de la spathe au nombre de 6, vertes, allongées, obtuses, atteignant 7 centim. de long et 2 centim. de large, étalées, réfléchies. Fleur à bractéole linéaire, incolore, environ aussi longue que le

pédicelle vert, de 4 centim. de long et de 3 millim. environ de diamètre. Ovaire infère, globuleux, triangulaire; périanthe rouge, à tube de 12-15 millim. de long et de 3 millim. d'épaisseur, à segments lancéolés, étalés-dressés, recourbés au sommet, de 3 centim. environ de long et de 3-5 millim. de large. Étamines à filets une fois et demie aussi longs que les lobes du périanthe, de 4 centim. de long; anthères de 2 millim. environ de long, jaunes. Style de 7,5 centim. de long. Fruits ovoïdes, d'un rouge écarlate foncé, biséminés.

Hybride obtenu par M. S. Nicolaï, de Coswig, près Dresden, et ayant fleuri la première fois en 1899.

Observations. — Cette remarquable plante, issue de parents appartenant à deux sections différentes du genre, rappelle par son port l'*H. Katharinae* (*); elle n'a guère conservé de la mère que la forte scape et la maculature de la gaine des feuilles et celle de la base de la hampe florale. Quant à la fleur, par la longueur du tube et des lobes du périanthe, elle rappelle également celle du père; par la disposition des lobes étalés-dressés elle tient le milieu entre les deux parents; en effet, chez l'*H. Katharinae* ils sont franchement étalés, chez l'*H. puniceus* ils sont dressés.

Cette plante, par sa vigueur, mérite donc d'attirer l'attention des horticulteurs; il est très probable que l'hybridation des différentes espèces amènera la création de plantes nouvelles de grande valeur pour l'horticulture.

Dans le tableau que nous résumons ci-dessous, M. Wittmack a fait ressortir les caractères intermédiaires de l'hybride *Haemanthus hybridus* “ König Albert ”.

	Haemanthus puniceus ♀	*Haemanthus Katharinae* ♂	*Haemanthus hybridus.*
Bulbe.	A épiderme jaunâtre, charnu; bractées vertes ponctuées de brun.	Gros, large, atteignant 10 cent., non ponctué.	D'un beau vert; ponctué de brun noir.

(*) L'*H. puniceus* L. (cf. Baker, in Fl. Cap., VI, p. 231) appartient à la section *Gyaxis* caractérisée par les valves de la spathe et les lobes du périanthe toujours dressés, comme nous l'avons dit plus haut.

	Haemanthus puniceus ♀	*Haemanthus Katharinae* ♂	*Haemanthus hybridus*
Feuilles au moment de la floraison	2-8, en rosette, petites, ondulées, d'un vert brillant.	6, grandes, peu ondulées, d'un vert mat.	4-6, grandes, ondulées, d'un vert brillant.
Hampe.	28 cent. de haut, ponctuée de pourpre jusque vers le milieu.	75 cent. de haut, non ponctuée.	Atteignant 1 m. de haut, ponctuée jusque vers le milieu.
Ombelle.	Petite, très dense.	Grande, très lâche.	Grande, assez dense.
Valves de la spathe.	Grandes, lancéolées, vertes, dressées.	Grandes, lancéolées, membraneuses, réfléchies.	Grandes, lancéolées, vertes, étalées, puis réfléchies.
Fleurs (y compris le pédicelle et le style).	7 centim.	11 centim.	12 centim.
Pédicelle.	2 centim.	4 centim.	3.5 centim.
Ovaire.	Globuleux-triangulaire.	Ovoïde, à peine triangulaire.	Globuleux-triangulaire.
Tube du périgone.	7 millim. de long.	20 millim.	15 millim.
Lobes du périgone.	20-25 millim. de long et 0,5 mill. de large, dressés.	30 millim. de long et 4 millim. de large, étalés.	30 millim. de long et 3,5 millim. de large, étalés-dressés.

Les *H. Katharinae* et *puniceus* habitent en partie les mêmes régions; il pourrait donc se faire que l'on rencontre dans la nature des plantes rappelant celle que nous venons de signaler. L'*H. Katharinae* est, comme nous l'avons dit, la seule espèce du sous-genre *Nerissa* que l'on rencontre dans le domaine de la Flore du Cap; par contre, trois espèces du sous-genre *Gyaxis* existent dans l'Afrique tropicale, mais elles ne se trouvent pas encore en culture.

HAEMANTHUS GERMARIANUS *J. Br.* et *K. Schumann* in Mitth. Deutsch. Schutzgeb. II (1889), p. 145; *Baker* in *This.-Dyer*, Fl. trop. Afr., VI, p. 390; *Harms* in Notizbl. Königl. Bot. Gart. und Mus. Berlin, I, p. 292.

Plante à bulbe globuleux, de 2-2.5 centim. de diamètre, à racines fortes se développant sur le pourtour. Feuilles au nombre de 7 environ paraissant en même temps que les fleurs et naissant du bulbe, longuement pétiolées, à gaine membraneuse de 3 centim. environ de long et de 6 centim. environ de large, à pétiole canaliculé de 10 centim. environ de long, à tube oblong, atténué, assez épais, tacheté de pourpre, de 20-25 centimètres de long et atteignant 10 centim. de large. Pédoncule allongé, non maculé, central, de 20 centim. environ de long, ombelle multiflore de 10 centim. environ de diamètre, globuleuse; fleurs rouge-pourpre, à pédicelles allongés de 2.5-5 centim. de long, à ovaire de 4 millim. environ de long; tube cylindrique, court, de 5 millim. environ de long, segments 5-nervés de 25 millim. environ de long et de 5 mill. environ de large; étamines plus longues que les lobes du périgone.

Kameroun : Entre Gross-Batanga et Boambwi, janvier 1888 (J. Braun).

Observations. — Cette espèce, qui se rencontre dans cette région en mélange avec l'*H. Kundianus* J. Br. et K. Schum., se reconnaît très facilement d'après M. J. Braun, grâce à la panachure de ses feuilles et à la couleur rouge-pourpre de ses fleurs.

Elle ne paraît pas avoir encore été introduite dans les cultures.

HAEMANTHUS CABRAE *De Wild.* et *Th. Dur.* Contrib. fl, Congo, I, p. 56 (Annales du Musée du Congo Bot., sér. 2, 1 [1899], p. 56); fig. 1.

Plante à tige renflée à la base, à rhizome épais, atteignant 5 centim. de diamètre, cylindrique, noirâtre extérieurement, blanc à l'intérieur, sur lequel peuvent naître plusieurs touffes de feuilles, munies de bractées scarieuses engainantes, parfois rougeâtres. Feuilles non distiques, au nombre de 2 à 3, d'un vert jaunâtre, longuement pétiolées, à pétioles semi-cylindriques, de 10-13 centim. de long, légèrement élargis à la base; lame ovale-elliptique atténuée à la base, aiguë au sommet, de 10-16 centim. de long et de 3,5-6 centim. de large, à environ 9-13 nervures de chaque côté de la nervure médiane. Pédoncule central, de 25 centim. environ de long, ombelle multiflore, globuleuse, de 11 centim. environ de large, bractées caduques. Fleurs pédicellées, à pédicelle de 20-30 millim. de long, à périanthe rose ; à tube cylindrique, de 7-9 millim. de long, à segments linéaires-elliptiques, aigus, 3-5 nervés, de 20-25 millim. environ de long et de 3 millim. de large. Filaments staminaux roses, de 25-33 millim. environ de long, à anthères brunâtres de 2 millim. environ de long.

Congo : Au sud de Boma-Vunde, 1896 (Capt. Cabra), paraissant assez répandu dans le Mayumbe.

Observations. — Nous avions fait la première description sur deux exemplaires desséchés de cette plante qui n'existait pas dans

les cultures. Dans ces derniers temps elle a été introduite en grand nombre au Jardin colonial de Laeken (Bruxelles), et nous en avons reçu plusieurs pieds fleuris grâce à l'amabilité de M. Kindt, chef des cultures.

Fig. 1. — Deux tiges d'*H. Cabrae* poussées sur la même souche; on remarque très nettement les gaines entourant la base des pétioles.

D'après les données de notre tableau analytique, cet *Haemanthus* est à rapprocher des *H. rotularis* Baker, *congolensis* De Wild. et *cinnabarinus* Decne, par suite de la longueur des pédicelles floraux.

Haemanthus longipes *Engl.* Bot. Jahrb. VII (1886), p. 332; *Harms* in Notizbl. Königl. Bot. Gart. und Mus. Berlin, I, p. 290. pl. fig. A. C.; *Baker* in *This.-Dyer* Fl. trop. Afr. VII, p. 391.

Feuilles distiques, à lame de 20-30 centim. de long et 6-8 centim. de large, oblongue, aiguë ou courtement acuminée au sommet, atténuée à la base en pétiole, verte sur les deux faces, plane, à bords ondulés, à nervure médiane épaisse, nettement proéminente sur la face inférieure; pétiole épais, ailé, convexe, plan ou légèrement déprimé sur la face supérieure, nettement convexe sur la face inférieure, de 6-8 centim. de long. Pédoncule dressé, légèrement comprimé, central, vert ou rougeâtre vers le sommet, de 20-26 centim. de long et de 6 millim. environ de diamètre. Ombelle multiflore, à bractées membraneuses, lancéolées. Fleurs d'un rouge cinabre, à pédicelles de 15-25 millim., à ovaire vert, de 2-3 mill. de long, à tube de 5-6 millim. de long, à segments oblongs ou lancéolés. de 2-2,4 centim. de long et de 3-5 millim. de large, aigus. Filaments staminaux de 23-30 millim. de long.

Kameroun : Mungo, Johann Albrechtshöhe (Buccholz, Preuss, Staudt, Lembach).

Observations. — C'est en 1874 que la plante a été récoltée pour la première fois par Buchholz. Elle a fleuri en juin 1897 au Jardin botanique de Berlin sur des exemplaires envoyés du Kameroun par Lehmbach.

L'*H. longipes* est caractérisé par ses segments d'au moins 20 millim. de long, son tube court et ses feuilles à pétiole relativement court n'atteignant pas 10 centim. de long et fortement ailé. Il paraît très voisin de l'*H. Germarianus* Br. et K. Schum., dont les feuilles plus longuement pétiolées sont panachées. Il a, comme le montre notre tableau, des affinités avec les *H. Eetveldeanus*, *fascinator*, *Laurentii*, *diadema* et *Lindeni*. Les caractères exposés plus haut suffisent pour différencier ces espèces.

Haemanthus Eetveldeanus *De Wild.* et *Th. Dur.* Contrib. fl. Congo, I, p. 56 (Ann. Musée Congo Botanique, série II [1899], p. 56).

Haemanthus mirabilis *Linden* in Catalogue spécial illustré des plantes nouvelles du Congo et d'autres pays pour 1901 (L' " Horticole coloniale ", p. 27).

Haemanthus imperialis *Hort.* ex Gardn. Chron., janv. (1902).

Plante à base compacte formant une sorte de rhizome d'un brun-verdâtre extérieurement, garni de nombreuses racines. Feuilles au nombre de 2 à 4, d'un vert assez foncé, plus ou moins luisantes sur les deux faces, pétiolées, à pétiole semi-cylindrique, de 16-22 centim. de long, courtement ailé, dilaté à la base, à lame ovale-elliptique, arrondie et atténuée à la base et au sommet, de 16-37 centim. de long et de 7-8 centim. de large, à 11-13 nervures de chaque côté de la nervure médiane; pédoncule central par rapport aux feuilles, de 34 centim. de long. Ombelle globuleuse, multiflore, de 12-15 centim. de large. Bractées oblongues ou linéaires de 11 centim. environ de long. Fleurs pédicellées à pédicelle de 25-40 millim. de long, à périanthe rouge-orangé, à tube cylindrique de 7-12 millim. de long, à segments ovales-elliptiques, subaigus au sommet, velus à l'extrémité, à 5-7 nervures, de 22-28 millim. environ et de 6-7 millim. de large (parfois 12 millim. de large). Filaments staminaux de même couleur que le périanthe, de 22-30 millim. de long, à anthères brunâtres, de 2-2,5 millim. environ de long, à pollen jaune. Style dépassant à la fin les étamines.

Congo : environs d'Elungu, novembre 1896 (Alfr. Dewèvre), et au nord de l'Équateur (Région de l'Aruwimi et des Stanley-Falls) (Ém. Duchesne).

Observations. — Cette jolie plante, rencontrée pour la première fois par Dewèvre, a été introduite dans les cultures par M. Ém. Duchesne qui l'a rapportée en nombreux pieds pour l' “ Horticole coloniale „, où elle se trouve actuellement en culture.

Cette plante est appelée à un grand succès, car elle joint à l'élégance des *Haemanthus* ordinaires une grandeur de fleur peu commune. C'est aussi ce qui avait amené M. L. Linden, à cette époque directeur de l' “ Horticole coloniale „, à donner à la plante le nom d'*H. mirabilis*, mais antérieurement à cette publication, nous avions décrit un *Haemanthus Eetveldeanus*, dédié à M. le baron van Eetvelde, Secrétaire d'État de l'État Indépendant du Congo, qui est en tout comparable à la plante cultivée.

L'*H. mirabilis* a été figuré dans le *Gardeners' Chronicle* du 28 mai 1901, mais le dessin qui en a été publié ne répond pas complètement à la réalité, c'est ainsi que le dessinateur a représenté les lobes du périanthe comme arrondis à l'extrémité, alors qu'ils sont plutôt aigus.

L'*H. Eetveldeanus* est une des belles espèces du genre. Elle est voisine des *H. fascinator* Linden, et *Laurentii* De Wild., mais s'en différencie par ses filets staminaux plus courts et surtout par les lobes du périanthe plus élargis. Elle s'écarte de l'*H. longipes* par ses pétioles allongés et faiblement ailés.

L' " Horticole coloniale „ de Bruxelles a présenté à l'Exposition horticole de Londres, sous le nom de *H. imperialis*, une forme remarquable de cette espèce. Dans cette plante les segments du périanthe sont encore plus grands que ceux de la forme dénommée *H. mirabilis*, ils mesurent environ 12 millim. de large et 24 millim. de long. La plante a obtenu à cette exposition un certificat de première classe.

HAEMANTHUS FASCINATOR *Linden* in Catalogue spécial illustré des plantes nouvelles du Congo et d'autres pays pour 1901 (L' " Horticole coloniale „), p. 27, c. fig.; *De Wild* in Journ. de la Soc. nat. Hort. de France, sér. IV, 3 (1902), p. 288; fig. 2.

Plante à base bulbeuse. Feuilles au nombre de 6-9, à pétiole de 15-17 centim. de long, semi-cylindrique, élargi, engainant à la base, à ailes relevées de 2-3 mill. de large dans la partie médiane; limbe ovale subaigu, arrondi à la base, de 21-22 centim. de long et de 10 centim. de large, mat sur les deux faces, à nervure médiane colorée en violet sur le dos; nervures latérales au nombre de 13 à 16 de chaque côté de la nervure médiane. Pédoncule central par rapport aux feuilles, de 30 centim. environ et de 8 millim. de large, ombelle atteignant 20 centim. de diamètre, multiflore; valves de la spathe oblongues-linéaires, de 5-6 centim. de long. Fleurs d'un rouge éclatant à pédicelles grêles de 30-40 millim. de long. ovaire vert de 3-4 millim. de diamètre, tube cylindrique court de 7-10 millim. de long, lobes lancéolés, linéaires, de 22-25 millim. de long, aigus, munis d'une petite touffe de poils au sommet de 3 millim. environ de large. Filaments staminaux de 37-42 millim. de long, à anthères de 2 millim. environ de long. Style grêle beaucoup plus long que les filaments staminaux.

Congo : Région de l'Aruwimi et des Stanley-Falls (É. Duchesne, 1899).

Observations. — Cette espèce récoltée au Congo a attiré vivement l'attention du monde horticole lors de son apparition et de sa mise en vente par l' " Horticole coloniale „ de Bruxelles.

L'*H. fascinator* appartient au même groupe que les *H. Germarianus*, *longipes*, *Eetveldeanus* et *Laurentii* et est voisin des *H. diadema* et *Lindeni* dont il diffère par le tube du périanthe plus court. On le différenciera des *H. longipes* et *Eetveldeanus* par ses filaments staminaux allongés, de 37-42 millim. de long, et de l'*H. Laurentii* par ses lobes de 22-25 millim. de long seulement et de 2-3 millim. de large.

Les *H. fascinator*, *mirabilis* et *diadema* ont été primés au

" Meeting „ de la Société royale d'Horticulture de Londres du 26 mars 1901 et les journaux horticoles anglais, entre autres le

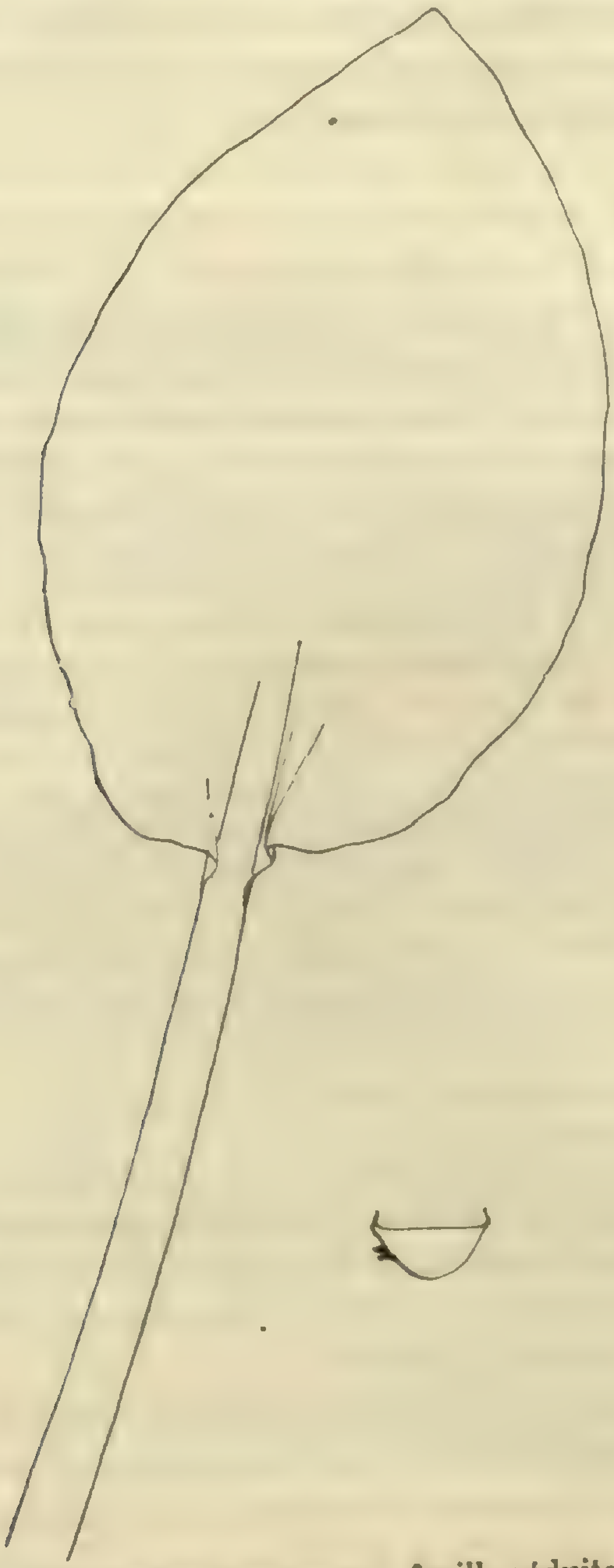

Fig. 2. — *Haemanthus fascinator ;* feuille réduite au tiers et coupe transversale du pétiole grandeur naturelle.

Gardener's Chronicle, dans son numéro du 25 mai, ont attiré l'attention des amateurs sur eux. M. le Dr M. Masters estime que vu

les conditions générales dans lesquelles croissent ces plantes au Congo, c'est-à-dire sous l'ombre constante de la forêt équatoriale, dans un sol léger formé de sable et de détritus végétaux, il sera aisé de les conserver dans des serres tempérées, et qu'elles sont appelées à un grand avenir horticole.

HAEMANTHUS LAURENTII *De Wild.* in Journ. de la Soc. nat. Hort. de France, série IV, 3 (1902), p. 289.

Plante à base assez épaisse, à racines fortes, se développant sur le pourtour du plateau; à deux-trois feuilles d'un vert pâle, peu brillantes, longuement pétiolées, à pétiole de 10-17 centim. environ de long, semi-circulaire en coupe, plane supérieurement à rebords plus ou moins ailés, d'environ 1 millim. de large, arrondi sur le dos, de 6-8 millim. de large dans la partie médiane, élargi et embrassant à la base, à lame foliaire ovale-elliptique, de 16-20 centim. de long et de 7,5-11 centim. de large, à environ 10 nervures de chaque côté de la nervure médiane, plus ou moins arrondie à la base, plus ou moins acuminée au sommet, à acumen obtus. Pédoncule central, de 17 centim. environ de long; ombelle multiflore de 17 centim. environ de large, globuleuse; fleurs à pédicelles rosés, de 37-40 millim. de long, à ovaire verdâtre, à périanthe saumoné, pâlisssant après la fécondation; tube cylindrique, court, de 9-10 millim. de long; segments étalés, ovales-lancéolés, 5-nervés, de 32-33 millim. de long et de 5,5 millim. environ de large, munis au sommet d'une touffe de poils recourbés, pourpres; filaments staminaux de même couleur que les lobes, plus longs qu'eux, de 40-42 millim. de long, dressés dans le jeune âge, à anthères de 3 millim. environ de long, violacées, à pollen jaune; style dépassant en général les étamines, de 42 millim. environ de long à partir de la gorge à la corolle.

Congo : Région du Pool, 1893 (É. Laurent).

Observations. — Cette plante, dont on possède au Jardin Botanique de l'État, à Bruxelles, deux pieds assez grêles, a été rapportée du Congo en 1893 par M. le Prof. É. Laurent, de l'Institut agricole de Gembloux, à qui nous devons l'introduction de quelques plantes intéressantes.

Elle est voisine de l'*H. Lindeni* N. E. Br., comme on peut le voir en consultant notre tableau analytique, mais elle en diffère en tout premier lieu par la longueur du tube du périanthe; ce tube atteint en effet de 16 à 20 millim. de long dans l'*H. Lindeni,* alors qu'il atteint à peine 10 millim. dans la plante qui nous a été rapportée par M. Laurent.

On peut se demander si les données relatives à la longueur du tube sont constantes et peuvent permettre la différenciation d'es-

pèces; nous croyons pouvoir répondre que ces caractères nous paraissent plus constants que ceux tirés des feuilles, car dans de grands lots d'*Haemanthus* de même espèce, nous avons remarqué que les mensurations du tube et des segments du périanthe variaient dans des limites peu étendues. Il resterait cependant encore des expériences à faire à ce sujet. Mais telles que les plantes se présentent à nous, il ne peut être question de réunir deux plantes telles que les *H. Lindeni* et *Laurentii* dont les fleurs présentent au premier aspect une dissemblance aussi grande; c'est pour cette raison que nous avons tenu à séparer spécifiquement ces deux plantes, plus tard peut-être serons-nous amené à considérer l'une des espèces comme variété de l'autre, mais dans ce cas la plupart des espèces du genre n'auraient guère de valeur.

L'*H. Laurentii* est également voisin de l'*H. fascinator* dont les lobes du périanthe sont plus courts et moins larges, comme on peut le voir en comparant la description et les données de notre tableau analytique.

HAEMANTHUS LINDENI *N. E. Brown* in Gard. Chron., VII (1890), p. 436, fig. 85; Illustr. Hort. (1890), t. 112; *Baker* in *This.-Dyer,* Fl. trop. Afr., VII, p. 391 ; *Th. Dur.* et *Schinz,* Étud. Fl. Congo, I, p. 261 et Consp. Fl. Afr., V, p. 264.

Rhizome épais, compact. Feuilles au nombre de 6 à 9 naissant directement de la base, à pétiole grêle, semi-cylindrique, à bords ailés, à ailes courtes, souvent à stries pourpres sur le dos, aussi long que la lame foliaire; celle-ci oblongue, aiguë, arrondie à la base de 18-30 centim. de long et de 5-10 centim. de large, à 9-10 nervures de chaque côté de la nervure médiane, colorée en rouge sur la face inférieure; à nervures secondaires transversales, fines et obliques. Pédoncule central, épais, de 30 à 45 centim. de long. Ombelle dense, très multiflore, de 15-20 centim. de diamètre; pédicelles de 37 millim. de long, bractées linéaires de 37 à 50 millim. de long. Périanthe d'un rouge saumoné, à tube de 16-20 millim. de long, à segments aigus, linéaires, lancéolés, de 25 à 37 millim. de long, 5-nervés, de 4 millim. de large. Filaments staminaux de la même couleur que le périanthe, de 31 à 37 millim. de long, à anthères de 2 millim. de long, violacées, à pollen jaune. Style dépassant les étamines.

Congo, 1887 (Aug. Linden).

Observations. — En décrivant cette espèce dédiée au collecteur, M. N.-E. Brown, du " Kew Herbarium ", disait qu'elle était des plus voisine de l'*H. angolensis,* dont elle se différenciait par des fleurs plus grandes et par des feuilles de forme spéciale.

D'après le tableau que nous avons donné en tête de cette étude, l'*H. Lindeni* formerait avec le *H. longipes*, *Germarianus* J. Br. et K. Schum., *Eetveldeanus* De Wild. et Th. Dur., *fascinator* Linden, *Laurentii* De Wild. et *diadema* Linden, un groupe caractérisé par la longueur des segments du périanthe; il serait très voisin de *H. diadema* comme fleurs, mais en diffère fortement par le port et la forme des feuilles. Mais la forme si caractéristique des feuilles telle qu'elle a été figurée dans l'*Illustration* et le *Gardeners Chronicle* (*loc. cit.*), ne paraît pas se retrouver sur tous les échantillons, toutes les feuilles ne sont pas aussi arrondies à la base, mais toutes celles que nous avons vues ont la nervure médiane colorée en rouge sur la face inférieure.

Introduite en 1887, la plante n'a fleuri qu'en 1890; depuis cette époque on peut voir chaque année dans les serres de l' " Horticole coloniale „, à Bruxelles et à Linthout, un grand nombre de pieds fleuris de cette plante qui a été répandue dans la culture par M. L. Linden.

Haemanthus Kundianus *Joh. Braun* et *K. Schumann* in Mitth. Deutsch. Schutzgebieten, II (1889), p. 186; *Baker* in *This.-Dyer,* Fl. trop. Afr., VI, p. 389; *Harms* in Notizbl. Königl. Bot. Garten und Mus. Berlin, I, p. 292.

Plante à bulbe globuleux, à racines fortes. Feuilles longuement pétiolées, à pétiole de 22 centim. environ de long; ombelle multiflore; fleurs à pédicelle de 1,5-2 centim. de long, à ovaire de 3 millim. environ de long: tube cylindrique, de 5 millim. environ de long, segments de 15 millim. de long; étamines plus longues que les lobes du périanthe, de 20 à 22 millim. de long.

Kameroun : Entre Gross-Batanga et Boambwi, janvier 1888 (J. Braun).

Observations. — L'*H. Kundianus* que nous ne connaissons que par la description, forme avec l'espèce suivante un petit groupe caractérisé surtout par la brièveté du tube du périgone. Parmi les espèces d'*Haemanthus* (Nerissa) à pédoncule central, 4 seulement, les *H. longipes*, *H. Germarianus*, *H. Kundianus* et *Demeusei* possèdent des fleurs à tube court (4-6 millim.), mais tandis que dans les deux premières espèces les lobes du périgone mesurent au moins 20 millim. de long, ils ne dépassent pas 15 millim. dans les deux dernières. La plante ne paraît pas se rencontrer dans les cultures.

Haemanthus Demeusei *De Wild.* in Journ. de la Soc. nat. Hort. de France, sér. IV, 3 (1902), p. 291.

Plante à organes souterrains inconnus. Feuilles assez longuement pétiolées, à pétioles de 5-7 centim. de long, à lame foliaire ovale-elliptique, de 12-18 centim. de long et de 5-6,5 centim. de large, à 10 nervures de chaque côté de la nervure médiane, arrondie, cunéiforme à la base, très courtement acuminée au sommet. Pédoncule central (?) de 12-16 centim. de long; ombelle multiflore de 6-9 centim. de large, globuleuse; fleurs rouges, à pédicelles de 17-20 millim. de long, à périanthe à tube de 3-5 millim. de long, à segments de 10-13 millim. de long et de 3 millim. environ de large, 3-5-nervés, munis au sommet d'une touffe de poils; filaments staminaux de 13-18 millim. de long, à anthères de 2 millim. environ de long; style dépassant en général les étamines.

Congo : Lac Léopold II, juin 1892 (F. Demeuse).

Observations. — Nous n'avons point vu cette plante en vie, l'Herbier du Jardin botanique de Bruxelles en contient 3 hampes florales et 4 feuilles.

Elle paraît avoir, comme on peut s'en convaincre d'après notre tableau analytique, certains rapports avec l'*H. Kundianus* Johs. Br. et K. Schum., que nous ne connaissons il est vrai que par la description originale parue dans les “ Mittheilungen von Forschungreisenden und Gelehrten aus den Deutschen Schutzgebieten, II, p. 146 „ et par les notes publiées sur cette espèce par M. le Dr Harms (*).

Mais, comme on peut le voir, les fleurs de l'*H. Kundianus* sont plus grandes que celles de notre *H. Demeusei*. En outre, la feuille de la première de ces deux espèces est longuement pétiolée, les pétioles atteignent 22 centim. de long et la lame mesure 12 centim. environ de large, ce qui est beaucoup plus que ce que l'on voit dans la plante du Lac Léopold II. Les autres caractères différentiels se trouvent, comme nous l'avons dit plus haut, dans les longueurs relatives des divers organes de la fleur; nous les avons donnés dans la description et ne croyons pas qu'il soit utile de revenir ici sur eux.

(*) In Notizbl. d. Königl. Bot. Garten und Mus., Berlin, I, p. 272. Nous nous empressons de remercier M. le Prof. K. Schumann de l'amabilité qu'il a eue de nous communiquer la description originale de cette espèce.

Cette plante possède la propriété de pouvoir se reproduire de toutes les parties de ses organes végétatifs, nous avons trouvé sur les pétioles, sur la nervure principale des feuilles, sur la hampe florale des bourgeonnements qui auraient pu sans aucun doute reproduire la plante. Ce n'est d'ailleurs pas la seule espèce du genre *Haemanthus* qui présente cette particularité, l'*H. Lindeni* la possède à un haut degré et il est des plus facile de multiplier la plante de morceaux de pétioles.

HAEMANTHUS ROTULARIS *Baker* in Gard. Chron. (1877), I, p. 656 et Amaryll. p. 65 et in *This.-Dyer,* Fl. trop. ap. VI, p. 390; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. Fl. Afr. V, p. 266.

Bulbe globuleux, de 25 millim. environ de diamètre. Feuilles naissant directement du bulbe, en même temps que les fleurs. Feuilles minces, oblongues, aiguës, de 20-23 centim. de long et de 7,5-9 centim. de large, à 10-12 nervures de chaque côté de la nervure médiane, rétrécies en un pétiole canaliculé de 10-12 centim. Pédoncule grêle de 15 centim. environ de long, ombelle globuleuse dense, de 7,5-10 centim. de diamètre, valves de la spathe au nombre de 8 environ, lancéolées, membraneuses, de 3,2 à 5 centim. de long; pédicelles de 12 à 18 millim. de long. Ovaire de 2 millim. environ de long. Périanthe rougeâtre, à tube de 8 millim. environ de long, à segments linéaires, 5-nervés, deux fois aussi longs que le tube, de 16 millim. environ de long. Étamines à filaments de 16 millim. environ de long à anthères de 2 millim. environ. Style dépassant la gorge de la corolle de 18 à 21 millim.

Guinée supérieure : Lagos, forêts de Yoruba 1859 (Barter).

Observations. — En décrivant cette espèce découverte par Barter pendant l'expédition du Niger en 1859, Baker attire l'attention sur ses affinités avec l'*H. cinnabarinus* et la classe en effet dans le voisinage immédiat de celui-ci. Mais la longueur des filets des étamines, plus longs que les lobes dans l'*H. cinnabarinus* et de la même longueur dans l'*H. rotularis* différencient ces deux espèces entre lesquelles il y a d'ailleurs d'autres différences comme on peut s'en convaincre d'après le tableau analytique que nous avons donné en tête.

L'espèce ne paraît pas se rencontrer dans les cultures.

HAEMANTHUS CONGOLENSIS *De Wild.* in Journ. de la Soc. nat. Hort. de France, sér. IV, 3 (1902), p. 292.

Plante à parties souterraines inconnues. Feuilles au nombre de 4, longuement pétiolées, à pétiole de 10-13 centim. de long, élargi à la base, à lame foliaire ovale-elliptique, de 20 centim. environ de long sur 8 centim. environ de large, plus ou moins arrondie à la base et plus ou moins acuminée au sommet, à acumen obtus, à 15 nervures de chaque côté de la nervure médiane. Pédoncule central, de 25 centim. environ de long; ombelle multiflore de 7,5 centim. environ de diamètre, globuleuse; fleurs à pédicelles grêles, de 16 millim. environ de long, à périanthe à tube cylindrique, allongé, de 10-12 millim. de long, segments lancéolés, 4-6 nervés, de 13 millim. environ de long et de 2 millim. environ de large, munis au sommet d'une touffe de poils recourbés; filaments staminaux de 17-20 millim. de long, plus longs que les lobes, à anthères de 2 millim. environ de long.

Congo : Lusambo, décembre 1895 (Ém. Laurent).

Observations. — Nous ne possédons qu'un échantillon d'herbier de cette plante. Si l'on examine les caractères que nous venons d'exposer l'on s'aperçoit bien vite que la plante en question a avec l'*H. cinnabarinus* Dcne, de très nombreux points de ressemblance.

Mais avant de discuter les analogies et les dissemblances de ces deux espèces, il faut faire remarquer que la plante décrite par M. Baker, in This.-Dyer Fl. trop. Afr., VII, p. 390, n'est pas du tout celle décrite et figurée par Decaisne dans la Flore des Serres, t. 1195, et figurée ensuite dans Bot. Mag., t. 5214. En effet, M. Baker décrit un *H. cinnabarinus* dont les feuilles seraient rétrécies à la base en un pétiole aussi long que la lame, c'est-à-dire, de 15 à 22 centim. de long. Or, M. Decaisne, après M. Hooker et enfin M. Harms, in Notizbl. Königl. bot. Gart. und Mus. Berlin, I, p. 290, pl. fig. D, nous montrent des feuilles courtement pétiolées, dont la base du limbe se transforme en un pétiole étroitement ailé.

Il ne serait donc pas impossible que M. Baker ait vu des échantillons qui devraient se rapporter à l'espèce nouvelle.

Il sera en tous cas facile de différencier les deux plantes par les feuilles sessiles ou presque sessiles d'une part, et longuement pétiolées d'autre part; en outre la longueur du tube du périanthe, plus considérable chez l'*H. congolensis* et atteignant même parfois le double de celle du tube de l'*H. cinnabarinus,* enfin la longueur des lobes et celle des filaments.

Il y a aussi lieu de faire remarquer le grand nombre de nervures latérales.

N'ayant point vu la plante vivante, nous ne pouvons attirer l'attention sur les caractères tirés de la coloration des feuilles, et des pédoncules.

Haemanthus cinnabarinus *Decaisne,* in Flore des Serres (1875), t. 1195; *Hook.* in Bot. Mag., t. 5314; Floral Mag. n. s., t. 245; *Baker,* Amaryll. p. 64 in *This.-Dyer,* Fl. trop. Afr., VI, p. 390 p. p.; *Harms,* in Notizbl. Königl. Gart. und Mus. Berlin, I, p. 290, pl. fig. D-F; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. fl. Afr., V, p. 263.

Bulbe globuleux 4-5 centim. de diamètre, à racines nombreuses, à stipe entouré de bractées ou squames courtes colorées. Feuilles spiralées, courtement pétiolées, à pétioles de 3 centim. de long, au nombre de 3 à 4, oblongues, aiguës ou courtement acuminées, de 15-20 centim. de long et de 5-6 centim. de large, ondulées, membraneuses, canaliculées au milieu, à nervure médiane proéminente sur la face inférieure et colorée en rougeâtre ainsi que le reste de cette face. Pédoncule central, dressé, subcylindrique, plus ou moins coloré en rouge-bleuâtre, de 22-23 centim. de long. Ombelle multiflore de 10-15 centim. de diamètre, à bractées linéaires, étalées puis réfléchies. Fleurs à pédicelle coloré, de 15 à 20 millim. de long, à ovaire vert, à tube du périgone de 7 millim. environ de long, à lobes de 16-18 millim. de long, épaissis vers l'extrémité, de 4-5 millim. de large. Filaments staminaux filiformes, renflés dans le tiers supérieur, de 2-2, 3 centim. de long, à anthères violacées, à pollen jaune.

Gabon (1855) et Kameroun (J. Braun et Mann).

M. Baker la signale également à la Côte-d'Or et au Lagos.

Observations. — La plante, telle qu'elle est décrite dans le “ Flora of trop. Afr. „ (loc. cit.), ne cadre pas du tout avec celle figurée originellement dans la “ Flore des Serres „, postérieurement dans le “ Bot. Mag. „ et enfin dans le “ Notizblatt „ du Jardin botanique de Berlin. En effet, ces trois dessins représentent des feuilles sessiles ou presque sessiles, et M. Baker les décrit comme possédant un pétiole de 15 à 22 centim. de long.

M. Harms émet bien quelque doute sur le rapprochement de la plante de Braun qu'il a étudiée, avec celle figurée par Decaisne, mais conclut qu'il n'y a cependant pas des caractères suffisants pour justifier une séparation spécifique.

M. Baker considérait l'*H. cinnabarinus* comme voisin de l'*H. angolensis;* il a, en effet, avec cette espèce assez d'affinités, mais il s'en différencie par des pédicelles plus courts. Pour les caractères floraux, il semble avoir beaucoup de ressemblance avec l'*H.*

Cabrae, mais chez ce dernier les feuilles sont longuement pétiolées, comme on peut le voir d'après les données de notre description.

Quant à l'*H. longipes* de la même région, il se différencie non seulement, comme l'a fait remarquer M. Harms, par la disposition des feuilles, mais encore par la longueur des segments, ceux-ci sont plus allongés dans l'*H. longipes* que dans les *H. cinnabarinus* et espèces voisines.

Cette plante a été introduite dans les cultures en 1855, elle avait été envoyée à L. Van Houtte père, en novembre de cette même année.

A propos de la culture, L. Van Houtte a fait quelques remarques judicieuses que l'on oublie très souvent. Donner le moins d'eau possible pendant la période de repos.

„ Les *Haemanthus* se multiplient, dit-il, de graines ou par les bulbilles qu'ils forment aux côtés de la mère. „

„ Pour réussir à leur faire porter des graines, il faut les laisser au soleil pendant qu'ils sont en fleurs et féconder celles-ci vers le milieu du jour. „ Et plus loin : „ Si les baies grossissent bien, si les pédicelles sont bien portants, on aura l'espoir d'atteindre le but ; si au contraire les pédicelles se flétrissent, on renoncera aux graines et l'on coupera le pédoncule. „

Il recommande aussi d'enlever avec soin les rejetons qui se forment à la base du bulbe mère et lui enlèvent de la force, l'empêchant de fleurir. En général dans les serres, les *Haemanthus* du groupe *Nerissa* n'ont pas grande tendance à former des rejetons de la base, mais ils restent souvent chétifs et malingres par suite de l'arrosage, mal compris, auquel ils sont soumis ; c'est à l'eau que l'on doit certainement attribuer la disparition de la plupart de ces plantes des serres de nos jardins botaniques. Il ne faut leur donner de l'eau que pendant la végétation et encore il n'en faut pas trop.

Haemanthus angolensis *Welw.* ex *Baker* in Journ. of Bot. (1878), p. 194, Amaryll. p. 65 et in *This.-Dyer,* Fl. trop. Afr. VII, p. 390; *Rendle* in Catal. Welw. Afr. Pl. II, p. 34: *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. Fl. Afr. V, p. 263.

Plante à bulbe globuleux, de 25 millim. environ de diamètre. Feuilles au nombre de 3 à 4, naissant directement sur le bulbe, à pétiole de 15-17,5 centim.

de long, élargi à la base, tacheté de pourpre; lame foliaire oblongue, cuspidée, de 15 à 30 centim. de long et de 10 centim. de large, arrondie à la base, à 8-9 nervures latérales de chaque côté de la nervure médiane, nervures secondaires, rapprochées, obliques. Pédoncule de 30 centim. environ de long, naissant au centre de la touffe de feuilles qui apparaît après lui. Ombelle dense, multiflore, de 10-12,5 centim. de diamètre. Pédicelles de 25 à 32 millim. de long, valves de la spathe caduques. Périanthe rougeâtre, à tube de 8 millim. environ de long, à segments linéaires, 3-5 nervés de 18 millim. Filaments staminaux de 25 millim. environ de long, à anthères oblongues de 2 millim. environ de long.

Angola : Golungo Alto, 1855 (Welwitsch).

Observations. — Cette plante ne paraît avoir été rencontrée jusqu'à ce jour que par Welwitsch, ce que nous avons de l'État Indépendant du Congo ne semble pas pouvoir être rapporté à cette espèce. D'après la clef analytique que nous avons essayé d'établir, l'*H. angolensis* serait voisin de l'*H. Eetveldeanus*, récolté par Dewèvre, dans les environs d'Elungu en 1896, et qui a été trouvé également par M. Duchesne dans l'Aruwimi et mis en vente sous le nom de *H. mirabilis*, Linden.

Mais dans l'*H. Eetveldeanus*, les pédicelles floraux sont plus allongés et les segments du périanthe mesurent 6-7 millim. de large; chez l'*H. angolensis*, ils sont décrits comme linéaires.

La plante ne paraît pas se trouver jusqu'à ce jour dans les cultures, elle ne semble pas d'ailleurs, au dire de Welwitsch, être très abondante dans l'Angola où on la rencontre dans les endroits ombragés ou sur le bord des fleuves.

HAEMANTHUS DIADEMA *Linden*, in Catalogue spécial illustré des plantes nouvelles du Congo et d'autres pays pour 1901 (l'Horticole coloniale), p. 27; Revue de l'Horticulture belge et étrangère XXVIII (1902), p. 13, c. fig. col.; *De Wild.*, in Journ. de la Soc. nat. Hort. de France, sér. IV, 3 (1902), p. 294; fig. 3.

Plante à base bulbeuse. Feuilles à pétiole de 15 centim. environ de long, élargi à la base, violacé sur le dos, en gouttière, non ailé sur le bord, à bords assez tranchants de 14 millim. environ de long, elliptique dans la partie médiane, se rétrécissant vers la base, aigu au sommet, atteignant 39 centim. de long et 12 centim. de large, luisant sur les deux faces, à nervure médiane verte ou légèrement colorée sur le dos, nervures latérales au nombre de 12-13 de chaque côté de la nervure médiane. Pédoncule central par rapport aux feuilles, de 20-25 centim. de long et de 8-9 millim. d'épaisseur; ombelle atteignant 18 millim. de diamètre, multiflore, à valves de la spathe oblongues-linéaires,

de 5-7 centim. de long, réfléchies. Fleurs d'un rose saumon, à pédicelles grêles de 25-30 millim. de long, à ovaire vert, de 2 millim. environ de large, tube sub-

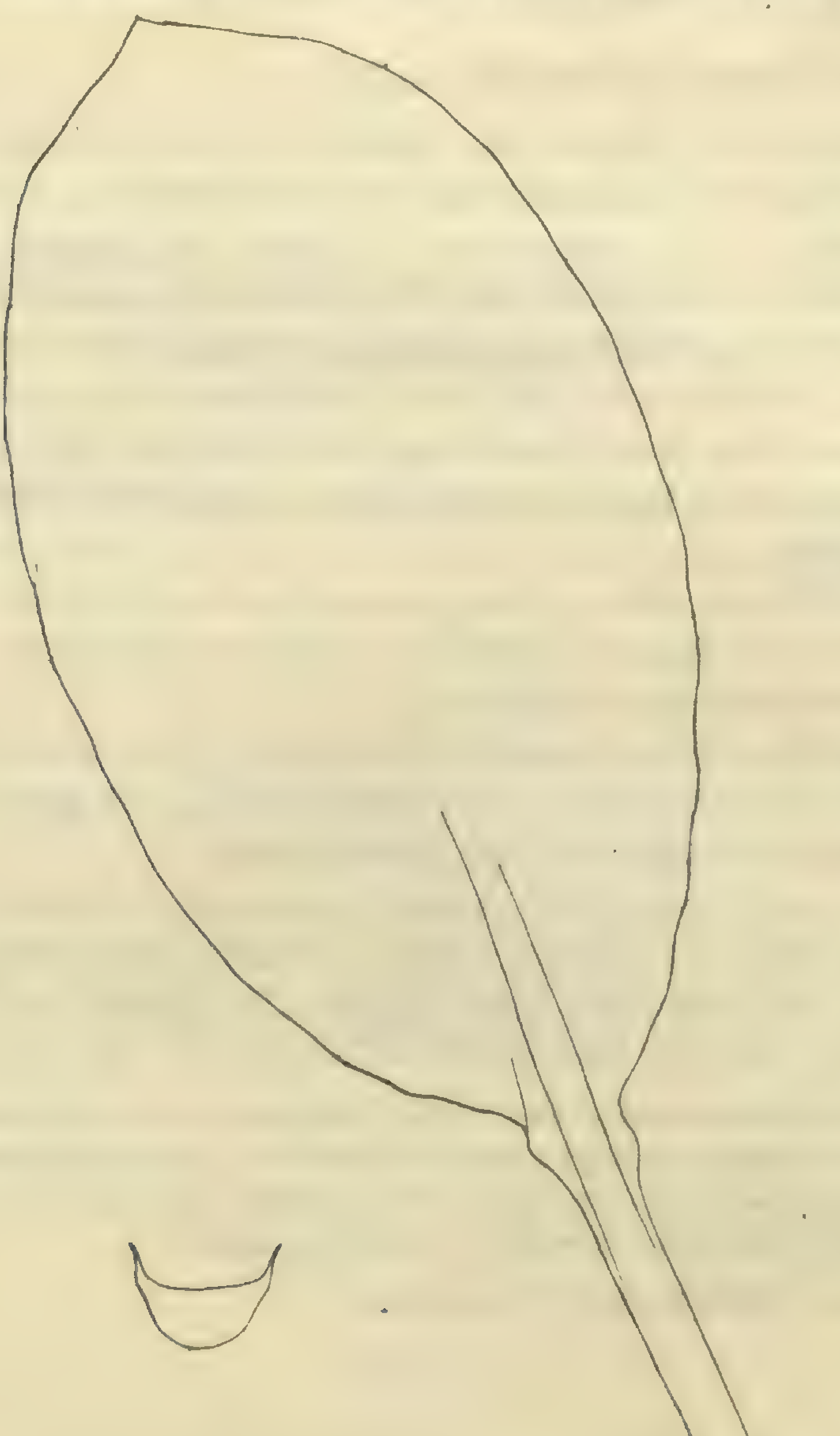

Fig. 3. — *Haemanthus diadema;* feuille réduite au tiers et coupe transversale du pétiole grandeur naturelle.

cylindrique de 13-15 millim. de long, lobes elliptiques-lancéolés, de 17-19 millim. de long, aigus, munis d'une touffe de poils au sommet, de 2.5-3 millim. de

large. Filaments staminaux de 30-35 millim. de long, à anthères violacées, à grains de pollen jaunes, de 2 millim. environ de long. Style ne dépassant guère les étamines.

Congo : Région du Kasai (Éd. Luja).

Observations. — D'après les données de notre tableau analytique, tirées pour la plupart des caractères floraux, l'*H. diadema* est voisin de l'*H. angolensis;* il paraît également voisin de l'*H. Lindeni,* mais outre les différences très sensibles que l'on observe entre les feuilles de ces deux espèces, forme du limbe et du pétiole, il existe dans les fleurs des différences notables; celles de l'*Haemanthus* étant beaucoup plus grandes, les proportions entre le tube et le limbe sont en outre assez différentes chez ces deux espèces.

Vues d'ailleurs côte à côte, comme nous avons pu les voir en pleine floraison dans les serres de Linthout (Horticole coloniale), elles se montrent très différentes.

L'apparition de cette plante a fait grand bruit dans les milieux horticoles; par ses beaux bouquets de fleurs, elle attire vivement l'attention et est appelée à un grand succès.

Haemanthus grandifolius *Balf. f.,* Diagn. Plant. nov. Scot., III, p. 23, et in Trans. Bot. Soc. Edimb., XII (1882), p. 96; *Baker,* Amaryll., p. 64; *Th. Dur.* et *Schinz,* Consp. Fl. Afr. V, p. 264.

Feuilles membraneuses, ovales, vertes, atteignant de 30 à 38 centim. de long et de 20 à 23 centim. de large ; nervures latérales principales distantes de 6 à 12 millim., présentant entre elles 2-6 nervures plus fines. Pétiole de 25 a 32 millim. de long. Inflorescence et fleurs inconnues.

Socotra, 1880 (Dr J. B. Balfour).

TABLEAU DES CARACTÈRES DES DIVERSES ESPÈCES

du genre HAEMANTHUS (Sous-genre *Nerissa* Salisb.)

PÉDONCULE LATÉRAL PAR RAPPORT AUX FEUILLES

	LOBES DU PÉRIANTHE 1-NERVIÉS				LOBES DU PÉRIANTHE 3-5-NERVIÉS						
	H. filiflorus.	*H. Goetzei.*	*H. zambesiacus.*	*H. Arnoldianus.*	*H. micrantherus.*	*H. rupestris.*	*H. Mannii.*	*H. eurysiphon.*	*H. multiflorus.*	*H. robustus.*	*H. Katharinae.*
Pétioles						3.7-5 cm.					5-12 cm.
Feuille, longueur	30 cm.		20-23 cm.			15 cm.	15 cm.		15-30 cm.		22-35 cm.
» largeur	15-20 cm.		7,5 cm.	5-6 cm.		10 cm.	5-6,5 cm.		7,5-10 cm.		10-15 cm.
Nervures par demi-feuille	10-12			11-12		8-9	10		6-8		8-11
Pédoncule floral	30-45 cm.	25-30 cm.	30 cm.	29-75 cm.	20 cm.	7,5-22 cm.	20-30 cm.				25-75 cm.
Ombelle	12,5-15 cm.		15 cm.	10-15 cm.	7,5 cm.	7,5 cm.	7,5-12,5 cm.		7,5-15 cm.	15-20 cm.	10-37 cm.
Pédicelle	25-37 mm.	12-20 mm.	37-50 mm.	15-35 cm.	25 mm.	12-18 mm.	12-18 mm.	25 mm.	20-40 mm.	6 cm.	25-50 mm.
Tube	8 mm.	4-10 mm.	6 mm.	10-12 mm.	6-8 mm.	6 mm.	8-12 mm.	12 mm.	6-12 mm.	7 mm.	12-20 mm.
Segment (nervures)	1	1	1	1	3-5	3-5	3-5	3-5	3-5	3-5	3-5
» longueur	12-15 mm.	15-22 mm.	25 mm.	22-25 mm.	12 mm.	12 mm.	18 mm.	18 mm.	15-25 mm.	22 mm	18-30 mm.
» largeur				1 mm.	1 mm.					2-3 mm.	
Filets staminaux	18-25 mm.	22 mm.	25 mm.	30 mm.	20 mm.	18 mm.	18 mm.		25-31 mm.	25 mm.	25-45 mm.
Anthères		2 mm.			1 mm.	2 mm.	2 mm.		2-3 mm.	3 mm.	2 mm.

TABLEAU DES CARACTÈRES DES DIVERSES ESPÈCES

du genre HAEMANTHUS (Sous-genre *Nerissa* Salisb.)

PÉDONCULE CENTRAL PAR RAPPORT AUX FEUILLES														
	SEGMENTS DU PÉRIANTHE DE 20-35 MILLIMÈTRES DE LONG							SEGMENTS DU PÉRIANTHE DE 12-19 MILLIMÈTRES DE LONG						
	H. Germarianus.	*H. Cabrae.*	*H. longipes.*	*H. Eetveldeanus.*	*H. fascinator.*	*H. Laurentii.*	*H. Lindeni.*	*H. Kundianus.*	*H. Demeusei.*	*H. rotularis.*	*H. congolensis.*	*H. cinnabarinus.*	*H. angolensis.*	*H. diadema.*
Pétioles	10 cm.	10-13 cm.	6-8 cm.	16-22 cm.	15-17 cm.	10-17 cm.		22 cm.	5-7 cm.	10-12 cm.	10-13 cm.	3 cm.	15-17,5 cm.	15 cm.
Feuille, longueur	20-25 cm.	10-16 cm.	20-30 cm.	16-37 cm.	21-22 cm.	16-20 cm.	18-30 cm.		12-18 cm.	20-23 cm.	20 cm.	15-20 cm.	15-30 cm.	39 cm.
„ largeur	10 cm.	3,5-6 cm.	6-8 cm.	7-8 cm.	10 cm.	7,5-11 cm.	5-10 cm.		5-6,5 cm.	7,5-9 cm.	8 cm.	5-6 cm.	10 cm.	12 cm.
Nervures par demi feuille		9-13		11-13	13-16		9-10		10	10-12	15		8-9	12-13
Pédoncule floral	20 cm.	25 cm.	20-26 cm.	34 cm.	30 cm.	17 cm.	30-45 cm.	25 cm.	12-16 cm.	15 cm.	25 cm.	22-23 cm.	30 cm.	20 25 cm.
Ombelle	10 cm.	11 cm.		12-15 cm.	20 cm.	17 cm.	15-20 cm.		6-9 cm.	7,5-10 cm.	7,5 cm.	10-15 cm.	10-12,5 cm.	18 cm.
Pédicelle	2,5-5 cm.	20-30 mm.	15-25 mm.	25-40 mm.	30-40 mm.	37-40 mm.	37 mm.	15-20 mm.	17-20 mm.	12-18 mm.	16 mm.	15-20 cm.	25-32 mm.	25-30 mm.
Tube	5 mm.	7-9 mm.	5-6 mm.	7-12 mm.	7-10 mm.	9-10 mm.	16-20 mm.	5 mm,	3-5 mm.	8 mm.	10-12 mm.	7 mm.	8 mm.	13-15 mm.
Segment (nerv.)														
„ longueur	25 mm.	20-25 mm.	20-24 mm.	22-28 mm.	22-25 mm.	32-33 mm.	25-37 mm.	15 mm.	10-13 mm.	16 mm.	13 mm.	16-18 mm.	18 mm.	17-19 mm.
„ largeur	5 mm.	3 mm.	3-5 mm.	6-7 mm.	3 mm.	5,5 mm.	4 mm.		3 mm.		2 mm.	4-5 mm.		2,5-3 mm.
Filets staminaux		25-33 mm.	23-30 mm.	22-30 mm.	37-42 mm.	40-42 mm.	31-37 mm.	20-22 mm.	13-18 mm.	16 mm.	17-20 mm.	20-23 mm.	25 mm.	30-35 mm.
Anthères		2 mm.		2-2,5 mm.	2 mm.	3 mm.	2 mm.		2 mm.	2 mm.	2 mm.		2 mm	2 mm.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS DE LA FORME

$X^2 + cY^2 = Z^3$

PAR

le R. P. PEPIN, S. J.

---

1. Dans un mémoire publié en 1892 (*) sur l'équation proposée, j'ai montré comment l'étude des formules qui servent à résoudre cette équation en nombres entiers, premiers entre eux, conduit à un grand nombre de théorèmes semblables à ceux par lesquels Fermat étonnait son correspondant, le chevalier Digby, relativement à la possibilité de former des cubes en ajoutant des carrés à certains nombres donnés. Bon nombre de théorèmes de ce genre font l'objet de deux notes que j'ai publiées dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences, du 13 juillet 1894 et du 10 juin 1895.

Ces théorèmes sont soumis à une restriction : le cube en question doit être impair. Toutefois, l'énoncé de cette restriction est inutile quand c est de l'une des formes $8l + (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, car dans ces cas les nombres X, Y, Z ne peuvent pas être premiers entre eux sans que Z soit impair. Mais lorsque c est de l'une des formes $8l$, $8l + 7$, l'énoncé de cette restriction devient nécessaire, parce que dans ces deux cas le cube peut être pair sans que X et Y le soient. Or, la résolution de l'équation proposée s'effectue par des formules différentes suivant que Z est pair ou impair. C'est ce que nous verrons en prenant $c = 47$.

(*) Mémoires de l'Académie Pontificale des Nouveaux Lyncéens, t. VIII.

Les déterminants qui ne présentent pas cette difficulté en présentent souvent d'autres qui leur sont propres. Les deux cas où $c = 35$ et $c = 499$ nous en fourniront quelques exemples.

I. $x^2 + 47y^2 = z^3$

2. Le déterminant -47 présente 10 classes de formes quadratiques, savoir 5 dans l'ordre proprement primitif et 5 dans l'ordre improprement primitif. Les 5 classes du premier ordre sont :

$$H = (7, 3, 8), \quad H^2 = (3, -1, 16), \quad H^3 = (3, 1, 16),$$
$$H^4 = (7, -3, 8), \quad H^5 = (1, 0, 47).$$

Les classes du second ordre s'en déduisent en les composant avec la classe $G = (2, 1, 24)$. On trouve ainsi $(4, \pm 1, 12)$, $(6, \pm 1, 8)$, $(2, 1, 24)$.

Nous verrons plus loin que la considération de l'ordre improprement primitif est inutile dans la recherche des solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux ; c'est pourquoi nous nous bornons à l'ordre proprement primitif.

Théorème I. — *Une forme proprement primitive du déterminant* -47 *ne peut représenter proprement aucun nombre pair sans qu'il soit multiple de* 8.

Démonstration. — Puisque les 5 classes $(7, \pm 3, 8)$, $(3, \pm 1, 16)$, $(1, 0, 47)$ renferment tout l'ordre proprement primitif, un nombre $2^i A$ représenté proprement par une forme de cet ordre le sera aussi par l'une des trois formes :

$$(1, 0, 47), \quad (3, 1, 16), \quad (7, 3, 8),$$

on aura :

$$2^i A = am^2 + 2bmn + cn^2, \quad a = 1, 3, 7 \quad \text{et} \quad b = 0, 1, 3.$$
$$2^i Aa = (am + bn)^2 + 47n^2.$$

Si n est pair, $am + bn$ est impair, puisque l'on suppose m, n premiers entre eux. Le second membre de l'équation étant impair, on a $i = 0$. Si donc A étant impair, i est différent de 0, le nombre n

sera impair ainsi que $am + bn$; le second membre sera multiple de 8 et par conséquent $2^i A$ sera aussi multiple de 8. C.Q.F.D.

Corollaire. — Les formes proprement primitives du déterminant — 47 ne peuvent représenter proprement que des nombres impairs et des multiples de 8.

3. Considérons d'abord celles des solutions de l'équation proposée dans lesquelles le cube est impair. Posons $z = A$. Toutes les représentations de A^3 par les formes du déterminant -47 correspondent aux diverses valeurs de $\sqrt{-47}$ (mod. A^3), c'est-à-dire aux diverses solutions de la congruence $x^2 \equiv -47$ (mod. A^3). On regarde comme équivalentes les représentations qui correspondent à une même valeur de $\sqrt{-47}$ (mod. A^3). Or, les diverses valeurs de $\sqrt{-47}$ (mod. A^3) sont congrues suivant le module A aux diverses valeurs de $\sqrt{-47}$ (mod. A). Il résulte de là que le nombre des représentations non équivalentes de A^3 par les formes du déterminant -47 est le même que celui des représentations de A, et qu'elles leur correspondent une à une par les formules de triplications. Soit en effet $A = am^2 + 2bmn + cn^2$; soit de plus $(P, Q, R)\ (X, Y)^2$ la résultante de la triplication de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$. X et Y seront deux formes cubiques homogènes de x, y qui réduiront à une identité la formule

$$PX^2 + 2QXY + RY^2 = (ax^2 + 2bxy + cy^2)^3.$$

Si l'on désigne par M, N ce que deviennent X, Y, quand on y fait $x = m$, $y = n$,

$$PM^2 + 2QMN + RN^2 = (am^2 + 2bmn + cn^2)^3 = A^3.$$

Cette représentation de A^3 par la forme (P, Q, R) appartient à la valeur

$$-\frac{PM + QN}{N} \text{ de } \sqrt{-47} \text{ (mod. } A^3),$$

et l'on a

$$-\frac{PM + QN}{N} \equiv -\frac{am + bn}{n} \text{ (mod. A).}$$

Si l'on veut que la représentation (M, N) de A^3 appartienne à la classe principale, il faut que la triplication de la classe (a, b, c) à laquelle appartient la représentation (m, n) de A ait pour résultante la classe principale. Par conséquent, toutes les valeurs impaires de z propres à vérifier l'équation proposée sont représentées par celles des classes du déterminant — 47 dont la triplication donne la classe principale.

Or, le nombre 5 des classes de l'ordre proprement primitif étant premier avec 3, la seule classe dont la triplication ait pour résultante la classe principale est cette classe principale elle-même. Toutes les valeurs impaires de z utiles pour notre problème sont exprimées par la formule

$$z = f^2 + 47\,g^2,$$

où l'on désigne par f, g deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair. On aura

$$x^2 + 47\,y^2 = (f^2 + 47\,g^2)^3,$$

$$x + \sqrt{-47}\,y = (f + g\sqrt{-47})^3.$$

En égalant entre elles les parties rationnelles et les coefficients de $\sqrt{-47}$ dans la dernière formule, on trouve

$$x = f\,(f^2 - 141\,g^2), \qquad y = g\,(3\,f^2 - 47\,g^2).$$

Théorème II. — *Toutes celles des solutions de l'équation*

(1) $$x^2 + 47\,y^2 = z^3$$

en nombres particuliers entre eux, dans lesquelles le cube est impair, se déduisent des formules

(2) $$z = f^2 + 47\,g^2, \quad x = f\,(f^2 - 141\,g^2) \quad y = g\,(3\,f^2 - 47\,g^2)$$

en égalant f, g, de toutes les manières possibles, à deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair.

Si l'on demande quels sont les cubes impairs, qui deviennent des carrés lorsqu'on leur retranche 47 unités, on trouve la réponse

à cette question en faisant $y = \pm 1$ dans les formules précédentes. On doit alors résoudre l'équation

$$g\,(3f^2 - 47\,g^2) = \pm 1.$$

Il faut d'abord que g soit égal à ± 1. Le nombre f est alors déterminé par la formule $3f^2 = 47 \pm 1$. On doit prendre le signe supérieur et $f^2 = \frac{48}{3} = 16$;

$$g = 1, \qquad f = 4, \qquad z = 63. \qquad x = 500.$$

Le cube de 63 *est le seul cube impair qui devienne égal à un carré lorsqu'on lui retranche* 47 *unités.*

On peut énoncer ce théorème de la manière suivante :

Théorème III. — *Parmi tous les carrés pairs, le carré de* 500 *est le seul qui devienne un cube lorsqu'on lui ajoute* 47.

Lorsqu'on demande un carré qui devienne un cube par l'addition de 47, les formules (2) ne suffisent pas pour donner toutes les solutions; car elles supposent le cube impair. Il est donc nécessaire d'établir d'autres formules pour obtenir les solutions dans lesquelles le cube est un nombre pair. Les formules (2) fournissent dans ce cas des résultats qu'il nous suffit d'indiquer.

Pour qu'un nombre pair soit représenté proprement par la forme (1, 0, 47), il faut que les deux nombres f, g soient impairs. Le nombre z est alors multiple de 8 et les formules (2) donnent pour x, y des valeurs de la forme $8\,l + 4$. Posant $z = 8\,u$, on déduit de l'équation (1) l'identité

$$\left(\frac{f\,(f^2 - 141\,g^2)}{4}\right)^2 + 47\left(\frac{g\,(3f^2 - 47\,g^2)}{4}\right)^2 = 4\,(2\,u)^3,$$

d'où l'on conclut

$$A^2 + 47\,B^2 = 4\,(2\,u)^3$$

en désignant par A, B deux nombres impairs

$$A = \frac{f\,(f^2 - 141\,g^2)}{4}, \qquad B = \frac{g\,(3f^2 - 47\,g^2)}{4}.$$

4. Quand l'équation proposée doit être résolue en nombres premiers entre eux, de telle manière que le cube soit pair, les formules qui expriment les solutions sont différentes, suivant le degré de la plus haute puissance de 2 qui divise la racine du cube. Posons en effet $z = 2^i u$ en désignant par i un exposant positif, et par u un nombre impair. L'équation à résoudre devient

$$\text{(E)} \qquad x^2 + 47\,y^2 = 2^{3i}.\,u^3.$$

Les nombres impairs u et u^3 ne peuvent être représentés que par des formes proprement primitives. Le nombre 2^{3i} peut être représenté par des formes de chacun des deux ordres primitifs. Mais comme la composition d'une forme improprement primitive avec une forme proprement primitive ne peut donner pour résultante qu'une forme improprement primitive, on ne doit utiliser que les représentations de 2^{3i} par les formes proprement primitives. On composera ces représentations avec celles de u^3, et l'on aura celles du produit $2^{3i}u^3$.

Cette composition des représentations s'effectue par la composition des formes réduites qui représentent les classes auxquelles appartiennent ces représentations. Toutes celles des représentations d'un nombre N par les formes proprement primitives du déterminant -47 qui appartiennent à une même valeur de $\sqrt{-47}$ (mod. N), sont dites équivalentes, parce que ces représentations sont données par des formes proprement équivalentes. Or, soit v la valeur de $\sqrt{-47}$ (mod. $2^{3i}\,u^3$) à laquelle appartient une représentation du produit $2^{3i}\,u^3$, soit

$$v \equiv \alpha \text{ (mod. } 2^{3i}), \qquad v \equiv b \text{ (mod. } u^3),$$

et

$$am^2 + 2\,bmn + cn^2 = 2^{3i}, \quad a'm'^2 + 2\,b'm'n' + c'n'^2 = u^3,$$

deux représentations de 2^{3i} et de u^3 appartenant respectivement aux deux valeurs α, b de $\sqrt{-47}$. On aura

$$\frac{am + bn}{n} \equiv -\alpha \text{ (mod. } 2^{3i}), \quad \frac{a'm' + bn'}{n'} \equiv -b \text{ (mod. } u^3).$$

La composition des deux formes (a, b, c), (a', b', c') donnera pour résultante une forme de la classe à laquelle appartient celle des

représentations de $2^{3i}u^3$ qui correspondent à la valeur v de $\sqrt{-47}$ (mod. $2^{3i}u^3$). Si l'on veut que cette classe soit la classe principale, il est nécessaire que la classe (a', b', c') soit opposée à la classe (a, b, c); on pourra par conséquent la représenter par la forme $(a, -b, c)$. La transformation de (a', b', c') en $(a, -b, c)$ fera connaître la représentation (p, q) de u^3 par $(a, -b, c)$ en fonction linéaire de la représentation (m', n'). On aura, pour la même valeur de u :

(3) $$ap^2 - 2bpq + cq^2 = u^3,$$

$$X^2 + 47Y^2 = (ap^2 - 2bpq + cq^2)(am^2 + 2bmn + cn^2)$$

(4) $$X = amp - b(mq - pn) - cqn, \qquad Y = mq + np.$$

Comme deux formes opposées représentent les mêmes nombres, nous ne prendrons dans ces formules que la valeur positive de b et les valeurs de m, n qui vérifient la condition

$$am^2 + 2bmn + cn^2 = 2^{3i}.$$

Les valeurs de a, b, c, m, n sont donc invariables pour une même valeur de i. Les nombres impairs u^3 qui vérifient l'équation

$$X^2 + 47Y^2 = 2^{3i}u^3$$

en nombres premiers entre eux sont tous exprimés par l'équation (3), et les valeurs correspondantes de X, Y, par les formules (4). Il nous reste à exprimer les nombres p, q en fonction des nombres f, g qui forment la représentation de u. Pour cela il faut trouver la classe dont la triplication a pour résultante la classe $(a, -b, c)$, et effectuer sa triplication.

5. Soit d'abord $i = 1$. Les représentations de 8 par les formes du déterminant -47 correspondent aux racines de la congruence

$$x^2 + 47 \equiv 0 \text{ (mod. 8)},$$

lesquelles sont au nombre de 4, savoir $\pm 1, \pm 3$. Toutes les représentations de 8 par les formes du déterminant -47 appartiennent conséquemment aux quatre classes représentées par les quatre formes $(8, \pm 1, 6)$, $(8, \pm 3, 7)$. On doit omettre les deux premières

classes, parce qu'elles sont improprement primitives. On aura donc $(a, b, c) = (8, 3, 7)$. Toutes les représentations de u propres à vérifier l'équation

$$x^2 + 47\,y^2 = 8.\,u^3$$

sont données par la classe dont la triplication donne la classe $(8, -3, 7)$, c'est-à-dire par la classe $(3, 1, 16)$. Pour effectuer la triplication, posons

$$u = 3f^2 + 2fg + 6g^2, \quad 3u = (3f + g)^2 + 47\,u^2, \quad 3f + g = h.$$

$$3u = (h + \sqrt{-47}\,g)\,(h - \sqrt{-47}\,g), \quad 27\,u^3 = \mathrm{M}^2 + 47\,\mathrm{N}^2.$$

$$\mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{-47} = (h + g\sqrt{-47})^3 = h\,(h^2 - 141\,g^2) + \sqrt{-47}\,g\,(3\,h^2 - 47\,g^2).$$

Remplaçant h par $3f + g$ et effectuant les calculs, on trouve

$$\mathrm{M} = 27\,f^3 + 27\,f^2g - 414\,fg^2 - 140\,g^3,$$
$$\mathrm{N} = -27\,f^2g - 18\,fg^2 + 44\,g^3.$$

On vérifie effectivement que ces expressions rendent identique la formule

$$\mathrm{M}^2 + 47\,\mathrm{N}^2 = 27\,(3f^2 + 2fg + 16\,g^2)^3.$$

Or, on a

$$27 = 8.\,2^2 + 6.\,2\,(-1) + 7.\,1^2.$$

Posant

$$u^3 = 8\,p^2 - 6\,pq + 7.\,q^2,$$

et faisant dans les formules (4) $a = 8$, $b = 3$, $c = 7$, $m = 2$, $n = -1$, on trouve par la formule (3)

$$\mathrm{X}^2 + 47\,\mathrm{Y}^2 = 27.\,u^3 = 27\,(8\,p^2 - 6\,pq + 7\,q^2)$$

$$\mathrm{X} = 16\,p - 3\,(2\,q + p) + 7\,q, \qquad \mathrm{Y} = 2\,q - p.$$

On exprimera p, q en fonction de f, g en prenant $\mathrm{X} = \mathrm{M}$, $\mathrm{Y} = \pm\,\mathrm{N}$ et en résolvant les deux équations par rapport à p et à q.

On trouve

$$M = 13p - q, \quad \pm N = 2q - p; \quad 2M \mp N = 27p.$$

Pour que p soit entier, on doit prendre les signes supérieurs ; on trouve

$$p = 2f^3 + 3f^2g - 30fg^2 - 12g^3,$$
$$q = f^3 - 12f^2g - 24fg^2 + 16g^3.$$

Théorème IV. — *Toutes les solutions de l'équation*

(5) $$8p^2 - 6pq + 7q^2 = u^3$$

en nombres entiers, premiers entre eux, lorsque le cube doit être impair, sont exprimées par les formules suivantes

$$p = 2f^3 + 3f^2g - 30fg^2 - 12g^3,$$
$$q = f^3 - 12f^2g - 24fg^2 + 16g^3,$$
$$u = 3f^2 + 2fg + 16g^2.$$

En multipliant par 8 l'équation (3) on a

$$(8p - 3q)^2 + 47q^2 + 8u^3.$$

Posant

$$X = 8p - 3q, \qquad Y = q,$$

on conclut du théorème IV que :

Théorème V. — *Toutes celles des solutions de l'équation*

(6) $$X^2 + 47Y^2 = 8u^3$$

dans lesquelles u est impair, sont exprimées par les formules

(6') $$X = 13f^2 + 60f^2g - 168fg^2 - 144g^3,$$
$$Y = f^3 - 12f^2g - 24fg^2 + 16g^3,$$
$$u = 3f^2 + 2fg + 16g^2.$$

6. Soit $i = 2$, $z = 4u$. Pour que le produit $4^3.u^3$ soit représenté par la forme principale, il faut que les facteurs 4^3, u^3 soient

représentés par deux classes opposées. Or, les représentations de 4^3 par les formes du déterminant -47 correspondent aux solutions $x \equiv \pm 9$, $x \equiv \pm 23$ de la congruence

$$x^2 + 47 \equiv 0 \pmod{4^3}.$$

On doit rejeter les deux solutions $x = \pm 9$ parce qu'elles correspondent à deux classes improprement primitives $(64, \pm 9, 2)$. Toutes les représentations de 64 utiles pour notre problème appartiennent donc aux deux classes $(64, \pm 23, 9)$. Les formes réduites correspondantes sont $(8, \pm 3, 7)$ on a

$$64 = 8m^2 + 6mn + 7n^2,$$

en prenant $m = 3$, $n = -2$. Pour que le produit $64.u^3$ soit représenté par la forme principale, il faut que u^3 soit représenté par la forme $(8, -3, 7)$ comme dans le cas précédent. Par conséquent toutes les valeurs impaires de u qui vérifient l'équation

$$X^2 + 47Y^2 = 64.u^3$$

sont exprimées par la formule

$$3f^2 + 2fg + 16g^2 = u,$$

et toutes les représentations (p, q) de u^3 par la forme $(8, -3, 7)$ sont exprimées par les formules

$$p = 2f^3 + 3f^2g - 30fg^2 - 12g^3,$$
$$q = f^3 - 12f^2g - 24fg^2 + 16g^3.$$

Les expressions de X et de Y en fonction de p, q se déduisent des formules (4) en y faisant $a = 8$, $b = 3$, $c = 7$, $m = 3$, $n = -2$; on trouve

$$X = 18p + 5q, \qquad Y = 3q - 2p.$$

Enfin substituant dans ces formules les expressions de p et de q en f et g, on a

$$X = 41f^3 - 6f^2g - 660fg^2 - 136g^3,$$
$$Y = -f^3 - 42f^2g - 12fg^2 + 72g^3.$$

THÉORÈME VI. — *Toutes les solutions de l'équation*

$$X^2 + 47\,Y^2 = 64\,u^3$$

en nombres impairs, premiers entre eux, sont exprimées par les formules

$$X = 41\,f^3 - 6\,f^2g - 660\,fg^2 - 136\,g^3,$$
$$Y = -\,f^3 - 42\,f^2g - 12\,fg^2 + 72\,g^3,$$
$$u = 3\,f^2 + 2\,fg + 16\,g^2.$$

En prenant $f = 1$, $g = 0$, on trouve

$$41^2 + 47 = (12)^3.$$

7. Soit $i = 3$, $z = 8\,u$. Les valeurs de $\sqrt{-47}$ (mod. 8^3) sont ± 55, ± 201. Les deux premières correspondent à des formes improprement primitives; on doit les exclure. Les deux autres, ± 201, déterminent les deux classes (8^3, ± 201, 79).

Les formes réduites qui représentent ces deux classes sont (3, $\pm$ 1, 16). On a

$$3.\,8^2 - 2.\,5.\,8 + 16.\,5^2 = 512 = 8^3.$$

Le facteur 8^3 étant représenté par la forme (3, — 1, 16), pour que le produit $8^3\,u^3$ soit représenté par la forme principale, il faut que u^3 soit représenté par la forme (3, 1, 16), et conséquemment sa racine u, par une classe dont la triplication donne la classe (3, 1, 16), savoir par la classe (7, 3, 8), de sorte qu'on aura

$$3\,F^2 + 2\,FG + 16\,G^2 = (7\,f^2 + 6\,fg + 8\,g^2)^3$$

F, G désignant deux fonctions homogènes du troisième degré des deux nombres indéterminés f, g.

On pourrait obtenir les fonctions F, G par une méthode semblable à celle que nous avons employée pour effectuer la triplication de la forme (3, 1, 16). Néanmoins nous suivrons une autre méthode fondée sur l'emploi des formules qui servent à la composition des formes quadratiques primitives d'un même déterminant, parce que ces formules nous seront utiles dans la suite de ce mémoire.

8. Désignant par $(a, b, c,)$, (a', b', c') deux formes proprement primitives du déterminant $b^2 - ac = D$, par (A, B, C) une résultante de leur composition et par X, Y les fonctions bilinéaires des indéterminées x, y; x', y' de ces deux formes, qui rendent la forme (A, B, C) identique avec le produit (a, b, c) (a', b', c'); on obtient A, B, C, X et Y au moyen des formules suivantes :

$$(\Omega)$$

$$X = pxx' + p'xy' + p''x'y + p'''yy'$$

$$Y = q'xy' + q''x'y + q'''yy',$$

$$pq' = a, \qquad pq'' = a' \qquad pq''' = b + b',$$

$$b - b' = q'p'' - q''p' \qquad q'''p'' - q''p''' = c,$$

$$A = \frac{aa}{p^2}, \qquad B = b - \frac{a}{p}p'', \qquad C = \frac{B^2 - D}{A}.$$

Dans ces formules p désigne le plus grand commun diviseur des trois nombres a, a', $b + b'$. Ce nombre une fois déterminé, on obtient immédiatement les trois coefficients q', q'', q'''. Les coefficients p', p'', p''' s'obtiennent par les deux équations de la quatrième ligne.

Pour effectuer la triplication de la forme (7, 3, 8), nous en ferons d'abord la duplication, puis nous composerons cette résultante avec la forme (7, 3, 8). Pour la duplication nous avons $a = a' = 7$, $b = b' = 3$, $c = 8$, $D = -47$. Les nombres 7 et $b + b' = 6$ étant premiers entre eux on a $p = 1$;

$$q' = q'' = 7, \qquad q''' = 6, \qquad p' = p'',$$

$$6\,p'' - 7\,p''' = 8, \qquad p'' = -1, \qquad p''' = -2,$$

$$A = 49, \qquad B = 10, \qquad C = 3.$$

Posant alors $x = x'$, $y = y'$, on a

$$X = x^2 - 2\,xy - 2\,y^2, \qquad Y = 14\,xy + 6\,y^2.$$

$$49\,X^2 + 20\,XY + 3\,Y^2 = (7\,x^2 + 6\,xy + 8\,y^2)^2.$$

9. Pour composer les deux formes (49, 10, 3), (7, 3, 8), nous prendrons dans les formules (Ω)

$$a = 49, \quad a' = 7, \quad b = 10, \quad b' = 3, \quad c = 3.$$

On aura

$$pq' = 49, \quad pq'' = 7, \quad pq''' = 13, \quad p = 1,$$
$$q' = 49, \quad q'' = 7, \quad q''' = 13.$$

Les nombres p', p'', p''' seront déterminés par les deux équations

$$7 = 49\,p' - 7\,p'', \qquad 13\,p'' - 7\,p''' = 3.$$

On les vérifie en prenant

$$p'' = -3, \quad p''' = -6, \quad p' = -22.$$
$$A = 49.7 = 343, \quad B = 10 + 3.49 = 157, \quad C = 72.$$

On conclut de là que les deux expressions

$$X = xx' - 22\,xy' - 3\,x'y - 6\,yy',$$
$$Y = 49\,xy' + 7\,x'y + 13\,yy',$$

réduisent à une identité la formule

$$343\,X^2 + 314\,XY + 72\,Y^2 = (49x^2 + 20xy + 3y^2)(7x'^2 + 6x'y' + 8y'^2).$$

Pour obtenir la triplication de la forme $7f^2 + 6fg + 8g^2$, il faut prendre dans les formules précédentes $x' = f$, $y' = g$, et remplacer x, y par les expressions qui correspondent à la duplication, savoir

$$x = f^2 - 2\,fg - 2\,g^2, \qquad y = 14\,fg + 6\,g^2,$$

lesquelles vérifient la formule

$$49\,x^2 + 20\,xy + 3\,y^2 = (7\,f^2 + 6\,fg + 8\,g^2)^2.$$

La formule précédente deviendra

$$343\,X^2 + 314\,XY + 72\,Y^2 = (7\,f^2 + 6\,fg + 8\,g^2)^3,$$

et on la réduira à une identité en prenant

$$X = f^3 - 66f^2g - 60fg^2 + 8g^3,$$
$$Y = 147f^2g + 126fg^2 - 20g^3.$$

Il reste à déterminer les fonctions F, G qui vérifient identiquement la formule

$$3F^2 + 2FG + 16G^2 = (7f^2 + 6fg + 8g^2)^3.$$

10. La forme (343, 157, 72) est équivalente à la forme (3, 1, 16) en laquelle elle se change par la substitution

$$X = F - 4G, \qquad Y = -2F + 9G.$$

On déduit de là

$$F = 9X + 4Y, \qquad G = 2X + Y;$$

par conséquent, on a

$$F = 9f^3 - 6f^2g - 36fg^2 - 8g^3.$$
$$G = 2f^3 + 15f^2g + 6fg^2 - 4g^3.$$

On obtient ensuite l'expression générale des solutions de l'équation

$$(7) \qquad X^2 + 47Y^2 = 8^3.u^3.$$

en composant les deux formes opposées

$$u^3 = 3F^2 + 2FG + 16G^2,$$
$$8^3 = 3x'^2 + 2x'y' + 16y'^2,$$

en remplaçant dans la résultante F, G par les expressions précédentes, et en faisant $x' = 8$, $y' = 5$.

Prenant $a = a' = 3$, $b = 1$, $b' = -1$, $c = 16$ dans les formules (Ω), on trouve $p = 3$, $q' = 1$, $q'' = 1$, $q''' = 0$; $A = 1$, $B = 1 - p''$, $p'' - p' = 2$, $p''' = -16$.

Nous prendrons $p'' = 1$ et conséquemment $p' = -1$; la résultante sera la forme (1, 0, 47). Par conséquent, en prenant

$$X = 3xx' - xy' + x'y - 16yy', \qquad Y = xy' + x'y,$$

on vérifie identiquement la formule

$$X^2 + 47\,Y^2 = (3\,x^2 + 2\,xy + 16\,y^2)\,(3\,x'^2 - 2\,x'y' + 16\,y'^2).$$

Substituons $x' = 8$, $y' = 5$, $x = F$, $y = G$ nous aurons

$$X = 19\,F - 72\,G, \qquad Y = 5\,F + 8\,G.$$
$$X^2 + 47\,Y^2 = 512\,(3\,F^2 + 2\,FG + 16\,G^2).$$

Enfin, si l'on substitue les expressions précédentes de F et de G et qu'on ait égard à la formule

$$3\,F^2 + 2\,FG + 16\,G^2 = (7\,f^2 + 6\,fg + 8\,g^2)^3,$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème VII. — *Toutes les solutions en nombres impairs, premiers entre eux, de l'équation*

$$(7) \qquad X^2 + 47\,Y^2 = 512.\,u^3$$

sont exprimées par les formules suivantes :

$$X = 27\,f^3 - 1194\,f^2g - 1116\,fg^2 + 136\,g^3,$$
$$Y = 61\,f^3 + 90\,f^2g - 132\,fg^2 - 72\,g^3,$$
$$u = 7\,f^2 + 6\,fg + 8\,g^2.$$

11. Le cas où $z = 2^4u$ présente une particularité digne de remarque. Comme 8 est représenté proprement par la forme $H = (7, 3, 8)$, on pourrait croire que sa quatrième puissance doit être représentée par la forme H^4. Il n'en est rien. Toutes les représentations de 8^4 par les formes du déterminant -47 correspondent aux solutions de la congruence

$$x^2 + 47 \equiv 0 \pmod{8^4},$$

lesquelles sont $x = \pm\, 457$, $x = \pm\, 1591$. On doit rejeter les deux dernières, parce qu'elles correspondent à des formes improprement primitives. Les deux autres correspondent à deux classes opposées représentées par les deux formes $(8^4, \pm\, 457, 51)$. Ces

deux formes sont équivalentes à la forme principale. On trouve effectivement

$$17^2 + 47.9^2 = 4096 = 8^4.$$

Nous avons vu (nº **2**) que les nombres impairs dont les cubes sont représentés par la forme principale (1, 0, 47) sont eux-mêmes représentés par cette forme, et que toutes les solutions en nombres premiers entre eux de l'équation $x^2 + 47\,y^2 = z^3$, dans laquelle z doit être impair, sont exprimées par les formules

$$z = f^2 + 47\,g^2, \quad x = f\,(f^2 - 141\,g^2), \quad y = g\,(3\,f^2 - 47\,g^2).$$

Or, on a identiquement

$$(xx' \pm 47\,yy')^2 + 47\,(xy' \mp x'y)^2 = (x^2 + 47\,g^2)\,(x'^2 + 47\,y'^2).$$

Si l'on substitue dans cette identité les expressions de x, y en fonctions de f, g et que l'on pose $x' = 17$, $y' = 9$, on obtient ce théorème.

Théorème VIII. — *Toutes les solutions de l'équation*

$$\text{(8)} \qquad X^2 + 47\,Y^2 = 4096\,u^3$$

en nombres impairs et premiers entre eux sont exprimées par les formules

$$X = 17\,f\,(f^2 - 141\,g^2) \pm 47.9\,g\,(3\,f^2 - 47\,g^2),$$
$$Y = 17\,g\,(3\,f^2 - 47\,g^2) \mp 9\,f\,(f^2 - 141\,g^2)$$
$$u = f^2 + 47\,g^2.$$

12. Nous avons trouvé que les représentations propres de 8^4 appartiennent à la classe principale, contrairement à l'induction relative à la représentation de ce nombre par la classe $H^4 = (7, -3, 8)$. Il ne sera pas inutile de démontrer directement l'impossibilité de représenter *proprement* 8^4 par la classe H^4.

Supposons à cet effet que l'on ait en nombres premiers entre eux m, n, l'égalité

$$7\,m^2 + 6\,mn + 8\,n^2 = 4096,$$

et conséquemment

$$(7m + 3n)^2 + 47n^2 = 7.4096 = 28672.$$

La première équation exige que m soit pair, et conséquemment n impair.

On aurait donc en nombres impairs l'équation

$$x^2 + 47y^2 = 28672 = \text{A}.$$

Comme A est de la forme $47l + 2$, le nombre x doit vérifier la congruence

$$x^2 \equiv 2 \pmod{47}.$$

Par conséquent

$$x \equiv \pm 7 \pmod{47}.$$

D'ailleurs x doit être impair; il est donc renfermé dans les formules $94l + 7$, $94l + 87$. Parmi les nombres compris dans ces formules, les seuls qui soient inférieurs à la limite de x, savoir $\sqrt{\text{A}} < 170$, sont les trois nombres 7, 87, 101. On doit exclure 7, parce que A étant multiple de 7, il faudrait que y le fût également, ce qui est impossible puisque x et y doivent être premiers entre eux.

La solution $x = 101$ est exclue par le module 11. On a en effet

$$101 \equiv 2, \qquad \text{A} \equiv 6 \pmod{11},$$

de sorte que l'équation proposée, réduite en congruence, deviendrait

$$4 + 47y^2 \equiv 6, \qquad 3y^2 \equiv 2 \pmod{11},$$

ce qui est impossible, 3 étant résidu de 11, tandis que 2 est non-résidu. Il ne reste qu'une seule valeur possible, $x = 87$. Or, cette solution est inadmissible, car on en déduirait

$$y^2 = \frac{28672 - 87.87}{47} = 449,$$

ce qui est impossible en nombres rationnels, puisque 449 n'est pas un carré. L'équation supposée est donc impossible. C. Q. F. D.

13. Bien des choses resteraient à dire pour compléter l'étude de l'équation indéterminée $x^2 + 47\,y^2 = z^3$. Ce qui précède suffit pour notre but, qui était de donner la marche à suivre pour obtenir les formules qui expriment toutes les solutions de l'équation proposée. Nous avons trouvé que le problème se résout bien aisément lorsqu'on se borne à demander les cubes impairs qui peuvent être représentés proprement par la forme principale (1, 0, 47). Mais si l'on cesse d'exiger que le cube soit impair, le problème se complique, parce qu'il faut distinguer la puissance de 2 qui divise la racine du cube. La même difficulté se présente pour toutes les équations renfermées dans la formule

$$x^2 + (8\,l + 7)\,y^2 = z^3 \tag{9}$$

lorsque le cube peut être pair ou impair. Quand z est pair, les formules qui expriment les solutions dans lesquelles la plus haute puissance de 2 qui divise ce nombre est la même, dépendent des solutions de la congruence

$$x^2 + 8\,l + 7 \equiv 0 \pmod{2^{3i}},$$

comme nous l'avons vu dans le cas où $c = 47$.

Même avec la restriction que le cube soit impair, le problème de trouver les carrés qui deviennent des cubes lorsqu'on leur ajoute $8\,l + 7$, ne reçoit une solution complète que dans les cas où le nombre des classes quadratiques du déterminant $-(8\,l + 7)$ est premier avec 3, comme cela a lieu dans le cas proposé $8\,l + 7 = 47$. Dans ce cas, toutes les solutions de l'équation proposée dans lesquelles z est impair sont exprimées par les formules

$$\begin{aligned} z &= f^2 + (8\,l + 7)\,g^2, \\ x &= f\,(f^2 - [24\,l + 21]\,g^2), \\ y &= g\,(3\,f^2 - [8\,l + 7]\,g^2), \end{aligned} \tag{10}$$

dans lesquelles f et g représentent deux nombres premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair. L'un des deux carrés x^2, y^2 est nécessairement pair.

Si l'on demande de trouver les carrés qui deviennent des cubes

impairs par l'addition de $8l+7$, on obtient une réponse complète en cherchant les solutions dans lesquelles y^2 se réduit à 1, c'est-à-dire en résolvant l'équation

$$g\,(3f^2 - [8l+7]\,g^2) = \pm 1.$$

On doit prendre $g = 1$, de sorte que la formule $f^2 = \dfrac{(8l+7)\pm 1}{3}$ doit donner pour f une valeur rationnelle entière. Le signe du second membre est déterminé par la condition de donner à f^2 une valeur entière.

Si cette valeur de f^2 est un carré, le problème proposé admet une solution et une seule, il existe un carré et un seul, qui devient un cube impair par l'addition de $8l+7$, la racine de ce carré est exprimée par la formule

$$x = f\,(f^2 - [24\,l + 21]).$$

Si, au contraire, la valeur obtenue pour f^2 n'est pas un carré, le problème est impossible. Prenons par exemple

$$l = 4, \qquad 8l + 7 = 39;$$

on trouve

$$f^2 = \frac{8l + 7 \pm 1}{3} = \frac{39 \pm 1}{3}.$$

Cette valeur étant fractionnaire, l'équation $x^2 + 39\,y^2 = z^3$ n'admet pas de solution dans laquelle x étant pair, y se réduirait à l'unité. Comme le nombre des classes quadratiques du déterminant -39 est égal à 4, nombre premier avec 3, nous avons ce théorème :

Théorème IX. — *Si l'on ajoute* 39 *à chacun des carrés pairs* 4, 16, 36, 64, ... *à l'infini, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

Prenons encore

$$l = 6, \qquad 8l + 7 = 55.$$

Le nombre des classes quadratiques du déterminant -55 est 4, comme pour -39. Par conséquent toutes celles des solutions de l'équation (9) en nombres premiers entre eux, pour $l = 6$, sont

exprimées par les formules (10). Si l'on demande de former un cube impair en ajoutant 55 à un carré, la réponse s'obtient en résolvant l'équation $g(3f^2 - 55g^2) = \pm 1$. On trouve

$$g = 1, \qquad f^2 = \frac{55 \pm 1}{3} = 18.$$

Ce nombre n'étant pas un carré, on a ce théorème :

Théorème X. — *Si l'on ajoute* 55 *à chacun des carrés pairs* 4, 16, 36, 64, ..., etc., *aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

On parvient à une conclusion semblable pour chacun des nombres 71, 79, 95, 103, 119; car si l'on désigne par c l'un de ces nombres, la formule $f^2 = \frac{c \pm 1}{3}$ ne donne pour f que des valeurs irrationnelles. Donc

Théorème XI. — *Il est impossible d'obtenir un cube impair en ajoutant un carré à l'un des nombres* 71, 79, 95, 103, 119.

Toute autre serait la conclusion si l'on demandait de former un cube pair en ajoutant quelque carré au nombre c. Dans ce cas, il faudrait chercher les solutions des congruences $x^2 + c \pm 0$ (mod. 2^{3i}) pour obtenir les représentations de 2^{3i} par les formes proprement primitives du déterminant $-c$. On obtiendrait pour chaque valeur de i des formules générales pour exprimer toutes celles des solutions de l'équation (9) qui correspondent à l'hypothèse $z = 2^i u$, le nombre u étant impair.

14. Pour tous les nombres c de la forme $8l + 7$, l'équation proposée (1) ne peut être complètement résolue sans que l'on tienne compte des cas où, les deux carrés étant impairs, le cube serait un nombre pair. Dans ces cas, les formules qui expriment les racines x, y des deux carrés sont des fonctions irréductibles du troisième degré, de sorte que l'on ne peut pas obtenir avec certitude toutes celles des solutions de l'équation proposée dans lesquelles l'un des carrés reçoit une valeur déterminée. Par exemple, nous avons trouvé (n° **5**, th. IV) que toutes les solutions de l'équation

$$X^2 + 47\,Y^2 = 8\,u^3$$

sont exprimées par les formules (6′). En prenant $f = 1$, $g = 0$, on trouve $X = 13$, $Y = 1$, $u = 3$;

$$13^2 + 47 = 8.3^3 = (6)^3.$$

Le nombre 6 est-il le seul des nombres impairement pairs dont le cube soit égal à la somme d'un carré ajouté à 47? Pour répondre à cette question, il faudrait trouver les solutions en nombres entiers de l'équation

$$f^3 - 12f^2g - 24fg^2 + 16g^3 = \pm 1.$$

C'est un problème que l'état actuel de la science ne permet pas de résoudre complètement.

On doit faire une observation semblable relativement à la solution

$$41^2 + 47 = 12^3.$$

On ne peut pas affirmer que 12 soit le seul des nombres $8l + 4$ dont le cube soit égal à la somme d'un carré ajouté à 47.

Les deux solutions que je viens de citer m'ont été signalées par M. Brocard.

Je dois au même savant de nombreux résultats de calculs relatifs au problème de trouver les cubes que l'on peut obtenir en ajoutant un carré à un nombre donné $8l + 7$. Ces résultats ont été l'objet d'une communication faite à la *Société des Lettres et Sciences* de Bar-le-Duc (6 mars 1895). On y trouve des valeurs de $c = 8l + 7$ pour lesquelles M. Brocard a trouvé 5, 6 et même 7 cubes formés en ajoutant c à des carrés. Mais dans tous ces exemples il n'y a jamais plus d'un cube impair pour la même valeur de c.

Pour $c = 431$ on trouve 7 cubes qui satisfont à la question, savoir ceux des nombres 8, 11, 20, 30, 36, 138, 150; mais un seul est impair. De même pour $c = 503$, M. Brocard a trouvé sept cubes formés par l'addition de ce nombre à des carrés. Ces cubes sont ceux des nombres 8, 12, 18, 23, 44, 134, 294. Ces résultats confirment la remarque faite dans le numéro précédent, relativement à l'équation

$$x^2 + 8l + 7 = z^3,$$

savoir qu'elle n'admet jamais plus d'une solution en nombres positifs x pair et z impair, lorsque le nombre des classes du déterminant $-(8l+7)$ est premier avec 3. Si au contraire le nombre des classes du déterminant $-(8l+7)$ est multiple de 3, le problème proposé ne peut être complètement résolu, même avec la restriction que le cube est impair.

Soit par exemple $c = 87$. Dans mon second mémoire sur les formes cubiques (n° 78) (*), j'ai remarqué que l'équation

$$7^3 = t^2 + 87\,a^2$$

est vérifiée en prenant $t = 16$, $a = 1$. Ainsi le cube de 7 s'obtient en ajoutant 87 au carré de 16. Le nombre 7 est-il le seul nombre impair dont le cube soit égal à la somme d'un carré augmenté de 87? Pour répondre à cette question, il faudrait trouver toutes les solutions en nombres entiers de l'équation

$$f^3 + 9f^2g + 6fg^2 - 4g^3 = \pm 1$$

qui correspond à la triplication de la forme quadratique $(7, \pm 2, 13)$, dont la résultante est la classe principale $(1, 0, 87)$.

Nous en avons dit assez au sujet de l'équation

$$x^2 + (8l+7)\,y^2 = z^3$$

pour montrer qu'elle présente aux géomètres un sujet digne de leurs méditations. Nous donnerons dans le paragraphe suivant un exemple des particularités que présente l'étude de l'équation

$$x^2 + c\,y^2 = z^3$$

lorsque c est de la forme $8l+3$.

II. $x^2 + 35\,y^2 = z^3$

15. Le premier membre de l'équation proposée est de la forme $8l+4$, quand les deux nombres x, y sont impairs. Comme cette forme ne convient pas à un cube, la résolution de l'équation pro-

(*) Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Session 1ª del Dicembre 1883.

posée, en nombres premiers entre eux, exige que l'un des deux nombres x, y soit pair, et l'autre impair. Par conséquent le cube sera toujours impair.

Toutes les valeurs de z propres à satisfaire à notre problème doivent être représentées par les classes dont la triplication donne la classe principale. Or le déterminant -35 présente six classes quadratiques, que l'on peut ranger dans la période suivante :

$$H = (3, 1, 12), \quad H^2 = (4, -1, 36), \quad H^3 = (5, 0, 7),$$
$$H^4 = (4, 1, 9), \quad H^5 = (3, -1, 12), \quad H^6 = (1, 0, 35).$$

Nous ne parlons pas de l'ordre improprement primitif, parce qu'aucune forme de cet ordre ne peut représenter un nombre impair. Pour que le cube de z soit représenté par la classe principale, il faut que z appartienne au genre principal, représenté par les trois formes $(1, 0, 35)$, $(4, \pm 1, 9)$. D'ailleurs cette condition est suffisante; car la triplication de ces trois formes donne pour résultante la classe principale.

Supposons d'abord

$$z = f^2 + 35\,g^2.$$

Celles des solutions de l'équation dans lesquelles z présente cette forme sont exprimées par les formules.

$$(2) \qquad z = f^2 + 35\,g^2, \qquad x = f\,(f^2 - 105\,g^2),$$
$$y = g\,(3\,f^2 - 35\,g^2).$$

L'expression générale des autres solutions s'obtient par la triplication de la forme $(4, 1, 9)$.

16. Lorsque c est de la forme $8\,l + 3$, comme $c = 35$, la triplication de la forme $\left(4, 1, \frac{1^2 + c}{4}\right)$ s'obtient aisément de la manière suivante.

Posons

$$z = 4\,f^2 + 2\,fg + \frac{1 + c}{4}\,g^2, \quad 4\,z = h^2 + cg^2, \quad h = 4\,f + g.$$

$$8\,X + \sqrt{-c}.\,8\,Y = (h + \sqrt{-c}g)^3 = h\,(h^2 - 3\,cg^2)$$
$$+ \sqrt{-c}.\,g\,(3\,h^2 - cg^2).$$

On aura

$$8X = h(16f^2 + 8fg + g^2 - 3cg^2),$$
$$8Y = 8g(6f^2 + 3fg - lg^2).$$
$$X = (4f + g)(2f^2 + fg - [3l + 1]g^2),$$
$$Y = g(6f^2 + 3fg - lg^2).$$
$$X^2 + (8l + 3)Y^2 = (4f^2 + 2fg + [2l + 1]g^2)^3.$$

Dans le cas actuel $l = 4$; la triplication de la forme (4, 1, 9) est donnée par les formules

(3) $$z = 4f^2 + 2fg + 9g^2,$$
$$x = (4f + g)(2f^2 + fg - 13g^2),$$
$$y = g(6f^2 + 3fg - 4g^2).$$

(1) $$x^2 + 35y^2 = z^3.$$

Théorème I. — *Toutes les solutions de l'équation* (1) *en nombres entiers et premiers entre eux sont exprimées par les formules* (2) et (3).

Les deux groupes de formules (2) et (3) expriment toutes les solutions de l'équation proposée en nombres premiers entre eux. Si l'on demande quels sont les carrés qui deviennent des cubes par l'addition de 35, il faut faire $y = 1$ dans les formules précédentes. Pour cela, dans les formules (2), il faut vérifier l'équation

$$g(3f^2 - 35g^2) = \pm 1.$$

On aura

$$g = 1, \qquad f^2 = \frac{35 \pm 1}{3} = 12;$$

ce qui est impossible. Si donc le problème admet une solution, on la déduira des formules (3) en posant

$$g(6f^2 + 3fg - 4g^2) = \pm 1.$$
$$g = 1, \qquad 6f^2 + 3f - 4 = \pm 1.$$

Le module 3 exige le signe inférieur dans la dernière équation qui devient

$$2f^2 + f = 1.$$

On en déduit

$$f = -1, \qquad f = \frac{1}{2}.$$

La première solution convient seule à notre problème. Les valeurs correspondantes de x et de z sont 36 et 11. Donc

THÉORÈME II. — *Dans la suite indéfinie des carrés, il n'y en a qu'un seul qui devienne un cube par l'addition de* 35, *savoir le carré de* 36, *lequel devient le cube de* 11 *par cette addition.*

17. Comme les expressions de x et de y dans les formules (2) et (3) se décomposent en facteurs rationnels, les questions dans lesquelles on demande que x ou y reçoive une valeur donnée peuvent être complètement résolues. Proposons-nous, par exemple, de trouver un carré tel qu'il devienne un cube par l'addition de 140. Il faut pour cela que g soit égal à 2. Cela est impossible dans le système (2). Car si l'on pose

$$g(3f^2 - 35g^2) = \pm 2,$$

il faut que g soit égal à ± 1 ou à ± 2. Dans le premier cas, on aurait

$$3f^2 - 35 = \pm 2, \qquad f^2 = 11.$$

Dans le second cas, on aurait

$$3f^2 - 35.4 = \pm 1, \qquad f^2 = \frac{141}{3} = 47.$$

La valeur de f n'étant pas rationnelle, le système (2) ne donne aucune solution. Dans le système (3) on doit résoudre l'équation

$$g(6f^2 + 3fg - 49^2) = \pm 2,$$

dont l'impossibilité est manifeste, car le premier membre ne peut être pair sans être multiple de 4. Donc

Théorème III. — *Dans la suite indéfinie des carrés il n'y en a aucun qui devienne un cube quand on lui ajoute* 140.

Peut-on obtenir un cube en ajoutant 25 au produit d'un carré multiplié par 35? Pour répondre à cette question, il faut voir si dans l'un des systèmes (2), (3) l'hypothèse $x = \pm 5$ est possible ou non. Dans le système (2) on aurait l'équation

$$f(f^2 - 105g^2) = \pm 5,$$

dont l'impossibilité est manifeste. Dans le système (3) on a

$$(4f + g)(2f^2 + fg - 13g^2) = \pm 5.$$

On ne peut faire que l'une des deux hypothèses suivantes :

$$1^\circ \quad 4f + g = \pm 5, \qquad 2f^2 + fg - 13g^2 = \pm 1;$$
$$2^\circ \quad 4f + g = \pm 1, \qquad 2f^2 + fg - 13g^2 = \pm 5.$$

En éliminant g entre les deux équations de chaque système, on obtient dans les deux cas une équation du second degré en f dont les racines ne sont pas entières. Donc

Théorème IV. — *Il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant* 25 *au produit d'un carré multiplié par* 35.

18. On obtient un grand nombre de théorèmes semblables aux précédents, en résolvant le problème suivant :

Problème. — *Trouver ceux des nombres premiers, inférieurs à* 1000, *qui, étant pris comme valeurs de y, permettent de résoudre l'équation*

$$x^2 + 35y^2 = z^3$$

en nombres entiers, premiers entre eux.

Désignons par a l'un des nombres demandés. Ce nombre devra vérifier l'une des deux équations

$$g(3f^2 - 35g^2) = \pm a, \qquad g(6f^2 + 3fg - 4g^2) = \pm a.$$

Chacune de ces équations peut se décomposer en deux autres,

de deux manières différentes, ce qui donne les quatre systèmes suivants :

1°	$g = a,$	$3f^2 - 35a^2 = \pm 1,$
2°	$g = 1,$	$3f^2 - 35 = \pm a,$
3°	$g = a,$	$6f^2 + 3af - 4a^2 = \pm 1,$
4°	$g = 1,$	$6f^2 + 3f - 4 = \pm a.$

Le premier système est impossible, parce que 3 est non-résidu quadratique de 5. Dans le second système nous obtenons les valeurs cherchées de a en égalant f^2 aux carrés pairs inférieurs à 400, en calculant les valeurs correspondantes de $3f^2 - 35$, et en égalant a à celles de ces valeurs, qui sont des nombres premiers, savoir

$$13,\quad 23,\quad 73,\quad 397,\quad 543,\quad 733,\quad 937.$$

Dans le système 3°, le signe supérieur est exclu par le module 3. Multipliant par 8 et posant

$$4f + a^2 = n,$$

on a

$$3n^2 - 35a^2 = -8. \tag{4}$$

Comme 8 est $< \sqrt{105}$, les solutions de cette équation s'obtiennent en réduisant $\frac{\sqrt{105}}{3}$ en fraction continue et en égalant $\frac{n}{a}$ aux fractions convergentes qui correspondent aux quotients complets, dont les dénominateurs sont égaux à 8.

Quotients complets	$\frac{\sqrt{105}}{3}$,	$\frac{\sqrt{105}+9}{8}$,	$\frac{\sqrt{105}+7}{7}$,	$\frac{\sqrt{105}+7}{8}$,	$\frac{\sqrt{105}+9}{3}$.
Quotients entiers	3,	2,	2,	2,	6,
Fractions convergentes	$\frac{1}{0}$,	$\frac{3}{1}$,	$\frac{7}{2}$,	$\frac{17}{5}$,	$\frac{41}{12}$, ...

La période commence au second quotient et se compose de quatre termes qui se reproduisent indéfiniment. La première période fournit deux solutions de l'équation (4), savoir

$$n = 3, \quad a = 1, \quad n = 17, \quad a = 5.$$

Les autres solutions s'en déduisent au moyen des solutions de l'équation de Pell

$$t^2 - 105\,u^2 = 1.$$

Les solutions de l'équation (4) seront partagées en deux groupes, au moyen des formules

$$n\sqrt{3} + a\sqrt{35} = (3\sqrt{3} + \sqrt{35})\,(41 + 4\sqrt{105})^m$$

$$n\sqrt{3} + a\sqrt{35} = (17\sqrt{3} + 5\sqrt{35})\,(41 + 4\sqrt{105})^m.$$

On reconnaît aisément qu'à partir de $m = 2$, le coefficient de $\sqrt{35}$ est > 1000. Il suffit donc de considérer les deux valeurs $m = 0$, $m = 1$ pour obtenir les solutions cherchées, savoir

$$\pm\, n = 3, \quad a = 1; \qquad n = 263, \quad a = 77;$$

$$n = 17, \quad a = 5; \qquad n = 1397, \quad a = 409.$$

La première solution donne

$$g = 1, \quad f = -1, \quad x = 36, \quad z = 11;$$

on en déduit le théorème I du nº **16**. La seconde solution ne convient pas à notre problème, qui suppose a premier. Les deux dernières solutions, $a = 5$ et $a = 409$ répondent seules à la question posée.

19. Dans le quatrième système on obtient les nombres qui répondent à notre problème en donnant à f dans la formule

$$a = 6f^2 \pm 3f - 4;$$

Les valeurs impaires, 3, 7, 9, ... jusqu'à ce qu'on parvienne à des valeurs supérieures à 1000, et en rejetant ceux des nombres obtenus qui ne sont ni premiers ni puissances de nombres premiers. On trouve ainsi

$$f = 3, \quad a = 41, 59; \qquad f = 5, \quad a = 131, 161;$$

$$f = 7, \quad a = 311, 269; \qquad f = 9, \quad a = 509;$$

$$f = 11, \quad a = 689.$$

Les nombres qui remplissent les conditions du problème énoncé dans le numéro précédent sont, rapportés à leurs systèmes respectifs,

2°	13, 23, 73, 397, 543, 733, 937;
3°	5, 409;
4°	41, 59, 131, 269, 311, 509, 971.

En calculant les valeurs correspondantes de x, z et a dans chaque système, on obtient, pour chacun des nombres inscrits dans ce tableau, un théorème semblable aux suivants :

Théorème V. — *Dans la suite indéfinie des carrés non divisibles par* 5, *il y en a un, mais un seul, qui devient un cube lorsqu'on lui ajoute* 35, 25, *savoir le carré de* 4964, *lequel devient par cette addition le cube de* 291.

Théorème VI. — *Dans la suite indéfinie des carrés premiers avec* 13, *il y en a un, mais un seul, qui devient un cube par l'addition de* 35.169, *savoir le carré de* 356.

Tous les nombres inscrits dans le tableau ci-dessus donnent lieu chacun à un théorème semblable à ceux que nous venons d'énoncer. Nous pouvons renfermer tous ces théorèmes dans l'énoncé suivant :

Si l'on désigne par a l'un quelconque des nombres inscrits ci-dessus, on peut trouver un carré premier avec a, mais un seul, qui devient un cube par l'addition de $35\,a^2$.

Ce carré unique pour chaque valeur de a est celui qui figure dans les identités suivantes :

$$(4964)^2 + 35.5^2 = 291^3, \qquad (356)^2 + 35\,(13)^2 = 51^3,$$
$$(104)^2 + 35\,(59)^2 = 51^3, \qquad (202)^2 + 35\,(23)^2 = 39^3,$$
$$(22)^2 + 35\,(41)^2 = 39^3, \qquad (414)^2 + 35\,(73)^2 = 71^3,$$
$$(608)^2 + 35\,(131)_2 = 99^3, \qquad (328)^2 + 35\,(157)^2 = 99^3,$$
$$(2106)^2 + 35\,(269)^2 = 193^3, \qquad (2668)^2 + 35\,(311)^2 = 219^3,$$
$$(268)^2 + 35\,(311)^2 = 219^3, \qquad (468)^2 + 35\,(397)^2 = 179^3,$$
$$(3942)^2 + 35\,(937)^2 = 539^3, \qquad (5846)^2 + 35\,(509)^2 = 351^3,$$
$$(2416)^2 + 35\,(733)^2 = 291^3, \qquad (15912)^2 + 35\,(971)^2 = 659^3.$$
$$(2726401964)^2 + 35\,(409)^2 = (195161)^3.$$

20. Si l'on désigne par a l'un quelconque des nombres premiers inférieurs à 1000, qui ne figurent pas dans le tableau précédent, on peut énoncer ce théorème :

Théorème VII. — *Dans la suite indéfinie des carrés premiers avec a, il ne s'en trouve aucun qui devienne un cube par l'addition de* $35\,a^2$.

La restriction que le carré soit premier avec a devient inutile, lorsque a est non-diviseur de $x^2 + 35$; car si l'on fait $x = ah$, $z = ak$ dans l'équation

$$x^2 + 35\,a^2 = z^3$$

et qu'on divise par a^2, on a

$$h^2 + 35 = ak^3,$$

ce qui est impossible, puisqu'on suppose a non-diviseur de $x^2 + 35$.

Les non-diviseurs de $x^2 + 35$ sont les nombres premiers renfermés dans la formule $70l + (19, 23, 31, 37, 41, 43, 53, 57, 59, 61, 67, 69)$. Tous les nombres premiers inférieurs à 1000, renfermés dans cette formule, à l'exception de ceux qui rentrent dans le tableau précédent, savoir 23, 41, 59, 269, 311, 409, 509, 543, 971, donnent lieu au théorème suivant :

Théorème VIII. — *Le nombre premier a remplissant les conditions que nous venons d'énoncer, si l'on ajoute à* $35\,a^2$ *les carrés* 1, 4, 9, 16, 25, 36, ... *à l'infini, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

Ceux des nombres premiers inférieurs à 400 auxquels s'applique ce théorème sont : 19, 31, 37, 43, 53, 61, 67, 89, 101, 107, 113, 127, 131, 137, 139, 163, 181, 193, 197, 199, 229, 233, 241, 251, 263, 271, 277, 317, 337, 347, 349, 373.

Chacun de ces nombres donne lieu à un théorème semblable au suivant, relatif au nombre 19 :

Si l'on ajoute successivement au nombre $35\,(19)^2 = 12635$ *les carrés entiers* 1, 4, 9, 16, 25, ... *à l'infini, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

21. Les diviseurs de $x^2 + 35$ donnent des théorèmes semblables

à ceux que nous venons d'énoncer pour les non-diviseurs. Car pour que l'équation

$$x^2 + 35\,y^2 = az^3$$

soit vérifiée, il ne suffit pas que a soit diviseur du premier membre, il faut encore que le quotient soit un cube. Or toutes les représentations propres du produit az^3 par les formes du déterminant — 35 appartiennent aux classes obtenues en composant les classes qui représentent le facteur a avec les classes qui représentent le cube z^3. D'ailleurs, le nombre des classes du déterminant — 35 étant égal à 6, et ces six classes étant rangées dans une période régulière, savoir celle de la classe $H = (3, 1, 12)$, les seules classes qui puissent représenter des cubes sont $H^3 = (5, 0, 7)$, $H^6 = (1, 0, 35)$ soit H^2 une classe représentant le nombre a. Pour que cette représentation du nombre a corresponde à une représentation du produit az^3 par la classe principale, il faut que l'une des deux résultantes $H^\lambda H^3$, $H^\lambda H^6$ soit la classe principale, et par conséquent il faut que λ soit égal à 3 ou à 6. Si donc le nombre a est un nombre premier représenté par l'une des formes $(3, \pm 1, 12)$, $(4, \pm 1, 9)$ l'équation

$$x^2 + 35\,y^2 = az^3 \tag{5}$$

est impossible en nombres premiers entre eux, quoique le nombre a soit diviseur de $x^2 + 35$. Il résulte de là que, pour savoir si l'on peut former un cube en ajoutant un carré au produit $35\,a^2$, il est inutile de distinguer le cas où le carré x^2 serait multiple de a.

Théorème IX. — *Si l'on désigne par a un nombre premier de l'une des deux formes quadratiques*

$$3\,x^2 + 2\,xy + 12\,y^2, \qquad 4\,x^2 + 2\,xy + 9\,y^2,$$

et qu'on ajoute successivement au produit $35\,a^2$ *les carrés* 1, 4, 9, 16, ... *à l'infini, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube, excepté celles qui correspondent aux carrés dont les racines sont déterminées par les formules suivantes*

$$(a) \qquad x = m^3 - 105\,mn^2, \qquad 3\,m^2n - 35\,n^2 = \pm\, a,$$

$$(b) \qquad x = (4\,m + n)\,(2\,m^2 + mn - 13\,n^2),$$
$$6\,m^2n + 3\,mn^2 - 4\,n^3 = a.$$

22. Pour déduire de ce théorème général quelques-uns des théorèmes qu'il renferme, il faut déterminer ceux des nombres premiers a, inférieurs à une limite donnée, qui rendent possible les systèmes (a), (b), ne conserver parmi ces nombres que ceux qui sont de l'une des deux formes quadratiques indiquées ci-dessus, et former le tableau des solutions correspondantes de l'équation

$$x^2 + 35\, y^2 = z^3.$$

Nous avons déterminé (n° 20) ceux des nombres premiers, inférieurs à 1000, qui satisfont à l'un des systèmes (a), (b), savoir 5, 13, 23, 41, 59, 73, 131, 269, 311, 397, 409, 509, 543, 733, 937, 971.

Or les nombres 23, 41, 59, 131, 269, 311, 409, 509, 543, 971 sont non-diviseurs de $x^2 + 35$. Les diviseurs sont 5, 13, 73, 397, 733, 937. Les deux nombres 5, 73 sont représentés par la forme $5\,m^2 + 7\,n^2$. Il ne reste que les quatre nombres 13, 397, 733, 937, représentés par la forme $3\,m^2 + 2\,mn + 12\,n^2$.

$$13 = 3.1^2 - 2.1.1 + 12.1^2, \quad 397 = 3.11^2 + 2.11.1 + 12.1^2.$$
$$733 = 3.5^2 + 2.5.7 + 12.7^2, \quad 937 = 3.13^2 + 2.13.5 + 12.5^2.$$

Les solutions correspondantes de l'équation

$$x^2 + 35\, a^2 = z^3$$

ont été données dans le numéro cité. Nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème X. — *Si l'on représente par a l'un des quatre nombres* 13, 397, 733, 937 *et qu'on ajoute successivement au produit* $35\, a^2$ *les carrés* 1, 4, 9, 16, 25, ... *à l'infini, une seule des sommes obtenues est égale à un cube, savoir celle qui, pour chaque valeur de a, est renfermée dans le tableau suivant :*

$$356^2 + 35.13^2 = 51^2, \qquad 468^2 + 35.397^2 = 179^3$$
$$2416^2 + 35.733^2 = 291^3, \qquad 3942^2 + 35.937^2 = 539^2.$$

Théorème XI. — *Si l'on désigne par a l'un des nombres premiers, inférieurs à* 1000, *représentés par la forme* $3\,m^2 + 2\,mn + 12\,n^2$,

et différent des nombres 13, 397, 733, 937, *il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant* $35a^2$ *à un carré.*

Les nombres premiers inférieurs à 400 auxquels s'applique ce théorème, sont les nombres 3, 17, 47, 97, 103, 143, 167, 173, 203, 223, 227, 283, 307, 353. Chacun de ces nombres donne lieu à un théorème négatif, semblable au suivant qui concerne le nombre 3.

Théorème XII. — *Si l'on ajoute* 315 *à chacun des carrés* 1, 4, 9, 16, 25, ... *à l'infini, aucune des sommes obtenues n'est égale à un cube.*

Les nombres premiers ou puissances de nombres premiers inférieurs à 1000 et représentés par la forme (4, 1, 9) rendent impossible, en nombres premiers avec a, l'équation

$$x^2 + 35a^2 = z^3,$$

car aucun de ces nombres ne figure parmi ceux qui ont été déterminés ci-dessus (n° **19**). D'ailleurs le produit az^3 ne peut pas être représenté par la forme principale; car toutes ses représentations appartiennent aux classes $H^2H^3 = H^5 = (3, -1, 12)$, $H^2H^6 = H^2$, et aux deux classes qui leur sont opposées (3, 1, 12), (4, — 1, 9). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème XIII. — *Si l'on représente par a l'un des nombres premiers ou puissances de nombres premiers représentés par la forme* (4, 1, 9) *et inférieurs à* 1000, *tels que* 9, 11, 79, 109, 121, 169, ... *il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant un carré au produit* $35a^2$.

23. La forme (5, 0, 7) donne aussi lieu à des remarques intéressantes. Nous avons vu (n° 20) que parmi les carrés premiers avec 5, il y en a un, mais un seul, qui devient un cube par l'addition de 35, 25. Existe-t-il un carré jouissant de la même propriété, parmi les carrés multiples de 5? — Si l'équation

$$x^2 + 35.5^2 = z^3$$

peut être vérifiée par une valeur de x multiple de 5, on voit immé-

diatement qu'elle doit être multiple de 25; posant donc $x = 25u$ et $z = 5v$, on a l'équation

$$(25u)^2 + 35.5^2 = 5^3 v^3, \qquad 5u^2 + 7 = v^3.$$

On est ainsi amené à examiner si, parmi les solutions de l'équation

$$(6) \qquad 5u^2 + 7t^2 = v^3$$

il y en a quelqu'une dans laquelle la valeur de t se réduise à l'unité.

Les représentations du cube v^3 appartiennent aux classes obtenues par la triplication des classes qui représentent v. Par conséquent, le nombre v doit être représenté par quelqu'une des classes dont la triplication donne la classe $H^3 = (5, 0, 7)$, c'est-à-dire par l'une des deux classes opposées H et H^5. On aura par conséquent

$$v = 3f^2 + 2fg + 12g^2.$$

D'ailleurs la triplication de la forme (3, 1, 12) conduit à l'identité

$$(7) \quad 5(2f^3 + 9f^2g - 18fg^2 - 16g^3)^2 + 7(-f^3 + 9f^2g + 18fg^2 - 8g^3)^2 = (3f^2 + 2fg + 12g^2)^3.$$

On conclut de là que les solutions de l'équation (6) en nombres entiers et premiers entre eux, sont toutes renfermées dans les formules

$$\begin{aligned} u &= 2f^3 + 9f^2g - 18fg^2 - 16g^3 \\ t &= -f^3 + 9f^2g + 18fg^2 - 8g^3 \\ v &= 3f^2 + 2fg + 12g^2 \end{aligned}$$

dans lesquelles on désigne par f, g deux entiers premiers entre eux.

Relativement à notre question, nous trouvons une solution de l'équation (6) dans laquelle t se réduit à l'unité, en prenant $f = 1$, $g = 0$. On a $5.2^2 + 7 = 3^3$, et en multipliant par 5^3

$$(50)^2 + 35.5^2 = (15)^3.$$

On trouve par conséquent deux carrés qui deviennent des cubes par l'addition de $875 = 35.5^2$, savoir le carré de 2964 trouvé plus

haut (n° **19**) et celui de 50. Mais tandis que nous avons pu affirmer que, parmi les carrés premiers avec 5, celui de 2964 est le seul qui devienne un cube par l'addition de 875, il n'est pas prouvé que, parmi les carrés multiples de 5, 2500 soit le seul qui devienne un cube quand on lui ajoute le même nombre.

24. Il résulte du théorème VII (n° **20**) qu'il est impossible de former un cube en ajoutant $1715 = 35.7^2$ à un carré premier avec 7. La même impossibilité subsiste-t-elle relativement aux carrés divisibles par 7? On voit aisément que cette question revient à demander si l'équation (6) peut être vérifiée en prenant $u = \pm 1$. Toutes les solutions de l'équation (6) étant renfermées dans l'identité (7), il faudrait trouver deux nombres entiers vérifiant l'équation

$$2f^3 + 9f^2g - 18fg^2 - 16g^3 = \pm 1,$$

ou démontrer que cela est impossible. L'état actuel de la science ne permet pas de résoudre ce problème.

On voit par ce qui précède combien de problèmes intéressants se présentent à celui qui étudie l'équation indéterminée

$$x^2 + cy^2 = z^3.$$

Nous n'avons considéré que deux cas, celui où $c = 47$ et celui où $c = 35$. Les autres valeurs positives de c conduisent à des résultats non moins intéressants. Le lecteur en trouvera de nombreux spécimens dans mes deux notes des Comptes rendus citées au commencement de ce travail. Nous nous bornerons ici au cas où $c = 499$.

III. $x^2 + 499y^2 = z^3$

25. Le nombre 499 étant de la forme $8l + 3$, la forme (1, 0, 499) ne peut représenter proprement que des nombres impairs ou des nombres de la forme $8l + 4$, qui ne peut pas convenir à un cube. Par conséquent, le cube z^3 est toujours impair dans les solutions de l'équation proposée, en nombres premiers entre eux. Il n'y a pas lieu de considérer les formes improprement primitives du déterminant -499, puisqu'elles ne représentent que des nombres

pairs. L'ordre proprement primitif de ce déterminant se compose de neuf classes qu'on peut renfermer dans la période suivante :

$$\begin{aligned} M &= (5, 1, 100), & M^2 &= (25, 1, 20), & M^3 &= (4, -1, 125), \\ M^4 &= (20, -9, 29), & M^5 &= (20, 9, 29), & M^6 &= (4, 1, 125), \\ M^7 &= (25, -1, 20), & M^8 &= (5, -1, 100), & M^9 &= (1, 0, 499). \end{aligned}$$

Pour que l'équation soit résolue en nombres premiers entre eux, il faut que l'un des deux nombres x, y soit pair et l'autre, impair, puisque z doit être impair. Il faut, de plus, que z soit représenté par l'une des formes $(4, \pm 1, 125)$, $(1, 0, 499)$; car le cube de z étant représenté proprement par la forme principale, il faut que z soit représenté par l'une des formes dont la triplication donne pour résultante la classe principale. Par conséquent, toutes les valeurs de z propres à vérifier, en nombres premiers entre eux, l'équation

$$x^2 + 499\,y^2 = z^3 \tag{1}$$

sont exprimées par les formules

$$z = f^2 + 499\,g^2, \qquad z = 4\,f^2 + 2\,fg + 125\,g^2.$$

26. On déduit des théorèmes établis dans mon mémoire de 1892 sur l'équation (n° 8)

$$x^2 + cy^2 = z^3,$$

que toutes les solutions de l'équation (1) en nombres premiers entre eux sont exprimées par les deux groupes de formules

$$\begin{aligned} z &= f^2 + 499\,g^2, \\ x &= f\,(f^2 - 1497\,g^2), \\ y &= g\,(3\,f^2 - 499\,g^2), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} z &= 4\,f^2 + 2\,fg + 125\,g^2, \\ x &= (4\,f + g)\,(2\,f^2 + fg - 187\,g^2), \\ y &= g\,(6\,f^2 + 3\,fg - 62\,g^2), \end{aligned} \tag{3}$$

que l'on déduit des formules (3) et (4) du mémoire cité, en prenant $c = 499$, $l = 62$. C'est au moyen de ces formules qu'on doit résoudre les diverses questions que l'on peut proposer relativement à diverses conditions auxquelles on peut assujettir l'une des indéterminées.

Proposons-nous de trouver tous les carrés qui deviennent des cubes par l'addition du nombre 499. Il faut pour cela trouver toutes les solutions de l'équation (1) dans lesquelles la seconde indéterminée se réduit à l'unité. Pour cela on devra résoudre successivement les deux équations

$$g(3f^2 - 499g^2) = \pm 1, \quad g(6f^2 + 3fg - 62g^2) = \pm 1.$$

Dans les deux équations, g doit se réduire à l'unité. Dans la première, on aura $f^2 = \frac{499 \pm 1}{3}$. On doit prendre le signe inférieur, ce qui donne $f^2 = 166$. Comme cette valeur de f n'est pas rationnelle, on doit la rejeter.

Dans la seconde équation, le module 3 exige le signe supérieur; on aura

$$g = 1, \quad 6f^2 + 3f = 63, \quad 2f^2 + f = 21,$$

$$f = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{4} = 3, \quad -\frac{7}{2}.$$

Ainsi la condition $y = 1$ ne peut être remplie que dans les formules (3), et cela d'une seule manière, savoir en faisant $f = 3$, $g = 1$. Les valeurs correspondantes de x et de z sont $x = 2158$, $y = 167$. Donc

Théorème I. — *Parmi les sommes obtenues en ajoutant successivement le nombre* 499 *aux carrés* 1, 4, 9, 16, ... *à l'infini, il n'y en a qu'une qui soit égale à un cube, savoir*

$$(2158)^2 + 499 = (167)^3$$

27. On obtient un grand nombre de théorèmes semblables à celui que nous venons d'énoncer, au moyen des solutions du problème suivant.

Problème. — Trouver parmi les nombres premiers inférieurs à 400 ceux qui étant pris comme valeurs de y rendent possible l'équation (1), en nombres premiers entre eux.

Désignons par a les nombres demandés. On les obtiendra au moyen des deux équations

$$g(3f^2 - 499g^2) = \pm a, \quad g(6f^2 + 3fg - 62g^2) = \pm a.$$

Le nombre a étant premier, et les nombres f, g étant supposés premiers entre eux les deux équations se ramènent aux quatre systèmes suivants

1°	$g = a,$	$3f^2 - 499a^2 = \pm 1,$
2°	$g = 1,$	$3f^2 - 499 = \pm a,$
3°	$g = a,$	$6f^2 + 3af - 62a^2 = \pm 1,$
4°	$g = 1,$	$6f^2 + 3f - 62 = \pm a.$

Dans le premier système, le module 3 exige le signe inférieur. L'un des deux nombres f, a doit être pair ; or, on ne peut pas supposer f pair, ce qui donnerait $-3a^2 \equiv -1$ (mod. 4). On devrait donc prendre f impàir et $a = 2$, puisqu'on suppose a premier. On aurait ainsi

$$3f^2 = 1996 - 1, \qquad f^2 = 665,$$

ce qui est impossible, puisque 665 n'est pas un carré.

Dans le second système, les nombres premiers a correspondent à des valeurs de f paires et moindres que 18; on trouve les nombres

$$a = 67,\ 89,\ 199,\ 269,\ 307,\ 487$$

qui correspondent respectivement aux valeurs suivantes de f :

$$12,\ 14,\ 10,\ 16,\ 8,\ 2.$$

Les valeurs correspondantes de z et de x sont

$$z = 643,\ 695,\ 599,\ 755,\ 563,\ 503,$$

$$x = 16236,\ 18214,\ 13970,\ 19856,\ 11464,\ 2986.$$

I

$$(16236)^2 + 499\,(67)^2 = (643)^3,$$
$$(18214)^2 + 499\,(89)^2 = (695)^3,$$
$$(13970)^2 + 499\,(199)^2 = (599)^3,$$
$$(19856)^2 + 499\,(269)^2 = (755)^3,$$
$$(11464)^2 + 499\,(307)^2 = (563)^3,$$
$$(2986)^2 + 499\,(487)^2 = (503)^3.$$

Les valeurs de a déterminées par le système 4° se déduisent de la formule

$$\pm a = 6f^2 + 3f - 62$$

en donnant à f des valeurs impaires, positives ou négatives. Comme $6.9^2 - 3.9 - 62$ est > 400, il suffit de prendre $f = \pm 1$, ± 3, ± 5, ± 7; on trouve ainsi

$$a = 17,\ 53,\ 59,\ 73,\ 104,\ 211.$$

Les valeurs correspondantes de x, a et z sont renfermées dans le tableau suivant :

II

$$(1782)^2 + 499\,(17)^2 = (155)^3,$$
$$(9201)^2 + 499\,(53)^2 = (131)^3,$$
$$(558)^2 + 499\,(59)^2 = (127)^3,$$
$$(2772)^2 + 499\,(103)^2 = (235)^3,$$
$$(2592)^2 + 499\,(311)^2 = (307)^3,$$
$$(2698)^2 + 499\,(73)^2 = (215)^3.$$

28. Il nous reste à démontrer que le système 3° ne donne pour a aucune valeur qui convienne à notre problème. L'équation

$$6f^2 + 3fa - 62a^2 = \pm 1$$

considérée suivant le module 3 ne subsiste qu'avec le signe supérieur. En la multipliant par 8, on trouve

(4) $$3(4f + a)^2 - 499\,a^2 = 8.$$

Posons

$$4f + a = t.$$

On obtiendra les valeurs de a qui vérifient cette formule en réduisant en fraction continue la racine positive de l'équation $z^2 = \frac{499}{3}$ et en égalant le rapport $\frac{t}{a}$ aux fractions convergentes qui correspondent aux quotients complets dont les dénominateurs sont égaux à 8.

Comme la quantité $\frac{\sqrt{1497}}{3}$ donne lieu à une période de 30 quotients précédés d'un quotient non périodique, je me contenterai de donner ceux des résultats de ce calcul qui sont utiles à notre problème. On a

$$\frac{\sqrt{1497}}{3} = 12\ (1, 8, 1, 2, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 2, 1, 76, \\ 1, 2, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 2, 1, 8, 1, 24).$$

Les premiers quotients complets sont

$$x_0 = \frac{\sqrt{1497}}{3}, \qquad x_1 = \frac{36 + \sqrt{1497}}{67} = 1 +,$$

$$x_2 = \frac{31 + \sqrt{1497}}{8} = 8 +, \qquad x_3 = \frac{33 + \sqrt{1497}}{51} = 1 +, \ldots$$

Le dénominateur 8 n'apparaît que dans les deux quotients x_2 et x_{28}

$$x_2 = \frac{31 + \sqrt{1497}}{8}, \qquad x_{28} = \frac{33 + \sqrt{1497}}{8}.$$

Par conséquent, l'équation

$$3t^2 - 499u^2 = 8$$

n'admet que deux solutions dans la première période. Les autres solutions s'en déduisent au moyen des solutions de l'équation de Pell

$$x^2 - 1497y^2 = 1;$$

mais comme, à l'exception de $x = 1$, $y = 0$, les solutions de cette équation sont formées de nombres très grands, elles ne donnent pour notre problème aucun résultat compris dans les limites

assignées. Nous pouvons en dire autant de la réduite qui correspond au 28e quotient ; il suffit pour s'en convaincre d'effectuer le calcul des réduites qui correspondent aux premiers quotients :

Quotients : 12, 1, 8, 1, 2, 2, 6, 1.

$$\text{Réduites : } \frac{1}{0}, \frac{12}{1}, \frac{13}{1}, \frac{116}{9}, \frac{129}{10}, \frac{374}{29}, \frac{877}{68}, \frac{5636}{438}, \frac{6513}{505}, \ldots$$

En égalant $\frac{t}{a}$ à la huitième réduite $\frac{6513}{505}$ on obtient pour a une valeur supérieure à notre limite. Que serait-ce si l'on poussait le calcul jusqu'à la 28e réduite ! Il ne reste ainsi que la réduite $\frac{13}{1}$ qui correspond au quotient x_2. On a $t = 13$, $a = 1$, $4f = t - a = 12$, $f = 3$; faisant $f = 3$, $y = 1$ dans les formules (3), on obtient la solution trouvée plus haut

$$(2158)^2 + 499 = (167)^3.$$

29. Par conséquent, les nombres (N) du n° **27** sont, parmi les nombres premiers < 400, les seuls qui vérifient les conditions de notre problème.

Théorème II. — *Si l'on désigne par a un nombre premier,* < 400 *et différent des nombres* (N) 17, 53, 59, 67, 73, 89, 103, 199, 211, 269, 307, *il est impossible d'obtenir un cube en ajoutant au nombre* $499\,a^2$ *un carré premier avec a.*

Théorème III. — *Si l'on désigne par a l'un des nombres* (N), *il existe un carré, mais un seul parmi les carrés premiers avec a, qui devient un cube par l'addition du nombre* $499\,a^2$.

Nous avons dû exclure dans ces théorèmes les carrés multiples de a, parce que si l'équation

$$x^2 + 499 = az^3 \tag{5}$$

pouvait se vérifier en prenant $x = m$, $z = n$, le carré $(am)^2$ deviendrait égal au cube $(an)^3$ par l'addition du nombre $499\,a^2$. Ainsi pour déterminer les cas où les deux derniers théorèmes peuvent s'étendre à tous les carrés, sans restriction, il est nécessaire de trouver les nombres premiers qui rendent possible l'équation (5) et ceux qui la rendent impossible.

La première condition pour la possibilité de l'équation (5) est que le nombre a soit diviseur de $x^2 + 499$, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{-499}{a}\right) = \left(\frac{a}{499}\right) = 1.$$

L'équation (5) est donc impossible lorsque le nombre a est non-résidu de 499. Si le nombre a est résidu quadratique de 499, il faut encore distinguer celles des classes quadratiques du déterminant — 499 qui peuvent le représenter; car pour que le produit az^3 soit représenté par la forme principale, il est nécessaire que les deux facteurs puissent être représentés par deux formes opposées. Or, les seules classes quadratiques qui puissent représenter un cube sont $(4, \pm 1, 125)$, $(1, 0, 499)$. Le nombre a doit donc appartenir à l'une de ces classes; si, au contraire, il est de l'une des formes

$$a = 5m^2 + 2mn + 100n^2, \qquad 20m^2 + 2mn + 25n^2,$$
$$20m^2 + 18mn + 29n^2$$

l'équation (5) est impossible.

30. Pour déduire quelques conclusions des principes que nous venons d'établir, sans donner à notre travail une trop grande étendue, bornons-nous à considérer les nombres premiers, moindres que 200. Ceux de ces nombres qui ne figurent pas parmi les nombres (N) sont

(P) 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 61, 71, 79, 83, 97, 101, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 153, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197.

Ceux de ces nombres qui sont non-résidus de 499, et conséquemment non-diviseurs de $x^2 + 499$, sont

(NR) 3, 7, 11, 13, 19, 23, 37, 41, 61, 71, 79, 83, 97, 113, 153, 163, 173, 179, 191, 193.

Pour tous ces nombres l'équation (5) est impossible. Il en est de même pour ceux des résidus quadratiques de 499 qui sont représentés par les formes (5, 1, 100), (20, 1, 25), (20, 9, 29); ce sont

tous les nombres premiers, diviseurs de $x^2 + 499$, qui ne sont représentés par aucune des formes (1, 0, 499), (4, 1, 125). Or, la forme (1, 0, 499) ne représente aucun nombre premier, moindre que 400. Les nombres premiers représentés par la forme (4, 1, 125) et < 400 sont 127, 131, 137, 167, 181, 197, 281, 307, 397. Pour ceux des résidus de 499 qui ne figurent pas parmi ces nombres et qui sont inférieurs à la limite 200, savoir

(R) 5, 29, 31, 43, 47, 101, 107, 109, 139, 151,

l'équation (5) est impossible. Pour chacun des nombres (NR) et (R), en le désignant par a, on peut énoncer ce théorème :

Théorème IV. — *Si l'on désigne par a l'un des nombres renfermés dans les deux groupes* (NR) *et* (R), *il est impossible de trouver un carré qui devienne un cube par l'addition du nombre* $499\,a^2$.

En prenant les valeurs particulières $a = 3, 5, 7, 11$, on obtient les théorèmes suivants :

Théorème V. — *Ajoutez successivement tous les carrés au nombre* 4491; *aucune des sommes obtenues ne sera égale à un cube.*

Théorème VI. — *Il est impossible de former un cube en ajoutant un carré à l'un des nombres* 12475, 24451, 60379.

Le seul des nombres premiers, < 400, représentés par la forme (4, 1, 125), qui soit compris parmi les nombres (N) est 307. Parmi les carrés premiers avec 307, le seul qui devienne un cube par l'addition de $499\,(307)^2$ est le carré de 11464.

Mais pour affirmer qu'il n'existe pas d'autre carré qui devienne un cube par l'addition de $499\,(307)^2$, il faudrait démontrer l'impossibilité de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 + 499 = (307)\,z^3,$$

et pour cela il faut chercher l'expression générale des solutions de l'équation

$$x^2 + 499\,y^2 = az^3 \tag{6}$$

en prenant $a = 307$; puis examiner si l'expression de y peut se réduire à l'unité dans quelqu'un des systèmes obtenus.

31. On doit faire une remarque semblable pour les nombres

$$127, 131, 137, 167, 181, 197, 281, 397$$

qui sont représentés par la forme (4, 1, 125) sans figurer parmi les nombres (N). Si l'on désigne par a l'un de ces nombres, on peut affirmer qu'aucun carré premier avec a ne devient un cube par l'addition de 499 a^2. Afin d'affirmer qu'il en est de même pour les carrés multiples de a, il faut démontrer que dans l'expression générale des solutions de l'équation (6), l'expression de y ne peut pas se réduire à l'unité.

Nous sommes ainsi amenés à résoudre le problème suivant.

Le nombre premier $a = 4m^2 - 2mn + 125n^2$ étant donné, trouver l'expression générale des solutions de l'équation (6). Or, pour que le produit az^3 soit représenté par la forme principale, il faut que z^3 soit représenté par la forme (4, 1, 125) opposée à celle qui représente le nombre premier a. On a donc à chercher la solution générale de l'équation

$$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = Z^3.$$

Cette solution sera exprimée par trois systèmes de formules qui correspondent aux trois couples de classes opposées

$$(5, \pm 1, 100), \qquad (20, \pm 1, 25), \qquad (20, \pm 9, 29)$$

dont la triplication a pour résultantes les deux classes (4, ±1, 125).

Comme deux formes opposées représentent les mêmes nombres, nous ne prendrons que les signes supérieurs. Pour la composition des classes nous emploierons les formules Ω du n° **8**.

Duplication de la forme (5, 1, 100).

On a dans ce cas :

$$a = a' = 5, \quad b = b' = 1, \quad c = 100, \quad p = 1,$$
$$q' = q'' = 5, \quad q''' = 2.$$
$$A = 25, \quad B = 1 - 5p'', \quad 0 = p'' - p',$$
$$2p'' - 5p''' = 100.$$

Nous prendrons $p'' = p' = 0$, $p''' = -20$. La résultante sera $(25, 1, 20)\,(X, Y)^2$, et l'on aura $X = x^2 - 20y^2$, $Y = 10xy + 2y^2$. Donc, on réduit à une identité la formule

$$(a) \qquad 25X^2 + 2XY + 20Y^2 = (5x^2 + 2xy + 100y^2)^2$$

en prenant

$$X = x^2 - 20y^2, \qquad Y = 10xy + 2y^2.$$

La triplication de la forme (5, 1, 100) s'obtient en composant les deux formes $(25X^2 + 2XY + 20Y^2)$ $(5x^2 + 2xy + 100y^2)$. On a pour cela

$$a = 25, \quad a' = 5, \quad b = b' = 1, \quad c = 20$$
$$p = 1, \quad q' = 25, \quad q'' = 5, \quad q''' = 2,$$
$$A = 125, \quad B = 1 - 25p'', \quad q'p'' = q''p',$$
$$2p'' - 5p''' = 20, \quad p' = p'' = 0, \quad p''' = -4,$$
$$B = 1, \quad C = 4.$$

Désignant par P, Q les indéterminées de la résultante, on a

$$P = Xx - 4yY, \qquad Q = 25Xy + 5Yx + 2yY$$

(7) $$125P^2 + 2PQ + 4Q^2$$
$$= (25X^2 + 2XY + 20Y^2)(5x^2 + 2xy + 100y^2).$$

Substituant dans ces formules les expressions de X et de Y en fonctions de x, y, remplaçant Q par X, P par Y dans le résultat obtenu et ayant égard à la formule (a) on obtient le théorème suivant :

Théorème VII. — *Les deux formes cubiques*

$$X = 75x^2y + 30xy^2 - 496y^3, \qquad Y = x^3 - 60xy^2 - 8y^3$$

vérifient identiquement la formule

(8) $$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = (5x^2 + 2xy + 100y^2)^3.$$

32. On obtient d'une manière semblable la triplication de la forme (20, 1, 25). On trouve d'abord par la duplication que les deux fonctions

$$F = 2x^2 + 10xy - 2y^2, \qquad G = 20xy + y^2$$

satisfont identiquement à l'équation

$$100F^2 - 98FG + 29G^2 = (20x^2 + 2xy + 25y^2)^2.$$

La forme (100, — 49, 29) se change en (29, — 9, 20) par la substitution $F = -Q$, $G = P - 2Q$; on aura $P = G - 2F$, $Q = -F$ et l'on conclura que les deux formes

$$P = -4x^2 + 5y^2, \qquad Q = -2x^2 - 10xy + 2y^2$$

réduisent à une identité la formule

$$29P^2 - 18PQ + 20Q^2 = (20x^2 + 2xy + 25y^2)^2$$

On vérifiera donc identiquement la formule

$$20X^2 + 18XY + 29Y^2 = (20x^2 + 2xy + 25y^2)^2$$

en prenant

$$X = -Q = 2x^2 + 10xy - 2y^2, \qquad Y = 5y^2 - 4x^2.$$

Composant ensuite les deux formes

$$(20, 9, 29)(X, Y)^2, \qquad (20, 1, 25)(x, y)^2,$$

on arrive à cette conclusion :

Théorème VIII. — *Les deux formes cubiques*

$$X = 150x^2y + 15xy^2 - 62y^3, \qquad Y = 8x^3 - 30xy^2 - y^3.$$

vérifient identiquement la formule

(9) $$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = (20x^2 + 2xy + 25y^2)^3.$$

Pour la forme (20, 9, 29), on arrive, en procédant de la même manière, à cette conclusion :

Théorème IX. — *Les deux formes cubiques*

$$X = 150x^2y + 135xy^2 - 32y^3,$$
$$Y = -8x^3 - 12x^2y + 24xy^2 + 13y^2,$$

satisfont identiquement à l'équation

(10) $$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = (20x^2 + 18xy + 29y^2)^3.$$

Remarque. — Les théorèmes VII, VIII, IX donnent toutes les solutions de l'équation

$$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = z^3$$

en nombres entiers et premiers entre eux.

33. On déduit aussi de ce qui précède la résolution complète de l'équation

$$(11) \qquad t^2 + 499\,u^2 = 4\,z^3$$

en nombres entiers, premiers entre eux. Dans toutes ces solutions le nombre z est impair, car autrement les trois nombres t, u, z auraient un diviseur commun, 2, contrairement à l'hypothèse. Or, les représentations propres du nombre 4 par les formes quadratiques du déterminant — 499 appartiennent exclusivement aux deux classes opposées (4, ± 1, 125). Pour que le produit $4\,z^3$ soit représenté proprement par la forme principale, il faut que z^3 soit représenté par les deux formes (4, ± 1, 125). Par conséquent tous les nombres z propres à vérifier l'équation (11) sont représentés par les trois formes (5, 1, 100), (20, 1, 25), (20, 9, 19), et toutes les solutions propres de cette équation se déduisent des formules (8), (9) et (10) en multipliant ces solutions par 4, ce qui donne le théorème suivant :

Théorème X. — *Toutes les solutions de l'équation*

$$(11) \qquad t^2 + 499\,u^2 = 4\,z^3$$

en nombres premiers entre eux sont exprimées par les trois systèmes suivants :

I

$$t = x^3 + 300\,x^2y + 60\,xy^2 - 1992\,y^3,$$
$$u = x^3 - 60\,xy^2 - 8\,y^3,$$
$$z = 5\,x^2 + 2\,xy + 100\,y^2.$$

II

$$t = 8\,x^3 + 600\,x^2y + 30\,xy^2 - 249\,y^3,$$
$$u = 8\,x^3 - 30\,xy^2 - y^3,$$
$$z = 20\,x^2 + 2\,xy + 25\,y^2.$$

III

$$t = -8\,x^3 + 588\,x^2y + 564\,xy^2 - 115\,y^3,$$
$$u = -8\,x^3 - 12\,x^2y + 24\,xy^2 + 13\,y^3,$$
$$z = 20\,x^2 + 18\,xy + 29\,y^2.$$

34. Soit $p = 4m^2 - 2mn + 125n^2$ un nombre premier. Proposons-nous de trouver l'expression générale des solutions de l'équation

$$(12) \qquad t^2 + 499u^2 = pz^3$$

en nombres entiers et premiers entre eux. Pour que le produit pz^3 soit représenté par la forme principale, puisque p ne peut être représenté que par la classe $(4, -1, 125)$ et par la classe opposée, il faut que z^3 soit représenté par ces mêmes classes. Or toutes les solutions de l'équation

$$4X^2 + 2XY + 125Y^2 = z^3$$

en nombres premiers entre eux, sont exprimées par les trois groupes de formules des théorèmes VII, VIII et IX. En composant cette forme $(4, 1, 125)$ avec la forme opposée $(4, -1, 125)$ $(m, n)^2$, on obtient pour résultante la forme principale $t^2 + 499u^2$, dans laquelle t, u seront exprimés par les formules

$$(13) \qquad t = (4m - n)X + (m - 125n)Y, \qquad u = mY + nX.$$

En substituant dans ces formules les expressions de X, Y, z auxquelles se rapportent les trois théorèmes cités, on obtient trois systèmes de formules qui renferment toutes les solutions de l'équation (12) en nombres premiers entre eux. Prenons par exemple $p = 307$, et conséquemment $m = 7$, $n = 1$. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème XI. — *Toutes les solutions de l'équation*

$$(14) \qquad t^2 + 499u^2 = 307z^3$$

sont renfermées dans les trois systèmes suivants :

I

$$t = 118x^3 + 2025x^2y + 7890xy^2 - 12448y^3,$$
$$u = 7x^3 + 75x^2y - 390xy^2 - 552y^3,$$
$$z = 5x^2 + 2xy + 100y^2.$$

II

$$t = -944x^3 + 4050x^2y + 3945xy^2 - 1556y^3,$$
$$u = 56x^3 + 150x^2y - 195xy^2 - 69y^3,$$
$$z = 20x^2 + 2xy + 25y^2.$$

III

$$t = 944x^3 + 5466x^2y + 813xy^2 - 2398y^3,$$
$$u = -56x^3 + 66x^2y + 303xy^2 + 59y^3,$$
$$z = 20x^2 + 18xy + 29y^2.$$

35. Quel que soit le nombre premier p représenté par la forme (4, — 1, 125), pour obtenir toutes les solutions de l'équation (12)

$$t^2 + 499u^2 = pz^3$$

en nombres premiers entre eux, il faut employer trois systèmes de formules. On les obtient en combinant les formules relatives aux équations (8), (9) et (10) avec les formules (13) ou m, n forment la représentation du nombre p. La solution serait plus simple si le nombre p était représenté par la forme principale. Dans ce cas le cube z^3 devrait être représenté par la même forme, qui est à elle-même son opposée; sa racine z devrait être représentée par l'une des formes dont la triplication donne pour résultante la classe principale, c'est-à-dire l'une des formes (4, $\pm$ 1, 105), (1, 0, 499).

Toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + 499y^2 = z^3$$

sont exprimées en fonction de deux nombres arbitraires, f, g, par les formules (2) et (3) du n° 26. On combinera ces expressions de x, y, z avec la représentation m, n de p au moyen des formules

$$t = mx - 499ny, \qquad u = my + nx,$$

de sorte qu'on exprimera toutes les solutions de l'équation (12) en nombres premiers entre eux au moyen de deux systèmes de formules.

Prenons par exemple $p = 503$, et conséquemment $m = 2$, $n = 1$, on aura

$$t = 2x - 499y, \qquad u = 2y + x.$$

En substituant dans ces formules les expressions (2) et (3) de x, y en fonction de f, g on obtient deux systèmes de formules qui expriment toutes les solutions en nombres premiers entre eux de l'équation

$$(15) \qquad t^2 + 499u^2 = 503z^3.$$

Théorème XII. — *L'équation* (15) *est complètement résolue en nombres premiers entre eux au moyen de deux systèmes de formules*

I

$$\begin{aligned} t &= 2f^3 - 1497f^2g - 2994fg^2 + 249001g^3, \\ u &= f^3 + 6f^2g - 1497fg^2 - 998g^3, \\ z &= f^2 + 499g^2. \end{aligned}$$

II

$$\begin{aligned} t &= 16f^3 - 298f^2g - 2991fg^2 + 30564g^3, \\ u &= 8f^3 + 18f^2g - 741fg^2 - 311g^3, \\ z &= 4f^2 + 2fg + 125g^2. \end{aligned}$$

Chaque déterminant donne lieu à une étude semblable à celle que nous venons de faire. On obtient ainsi une multitude d'identités dont quelques-unes fournissent des théorèmes fort remarquables sur la possibilité d'obtenir des cubes en ajoutant des carrés à des nombres donnés.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins; à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVI, 1877 à 1902.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, commencée en 1902.

Les deux volumes annuels de 700 pages in-8°, chacun. . . . . fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . fr. **7 50**

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Notice sur son but, son organisation et ses travaux. Brochure de 32 pages, in-18, distribuée gratuitement à ceux qui en font la demande au Secrétariat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8°; 1898 . . . . 3 fr. 50

— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ÉD. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire*; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme*; 1900 . . . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique*; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres*; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année 1896. (Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris,** 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4° avec nombreuses figures; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à 1793.* Grand in-8°.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

VINGT-SEPTIÈME ANNÉE, 1902-1903

TROISIÈME FASCICULE

LOUVAIN

SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

(M. J. THIRION)

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1903

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

PAGES

Session des 2[illegible] 115
Première Sec[illegible] 115
Deuxième — 127
Troisième — 142
Quatrième — 153
Cinquième — 155
Assemblée générale du [illegible] 157
Rapport du Secrétaire g[illegible] 157
Conférence de M. le Cha[illegible] *Les Hépatiques aux points de vue historique,* [illegible] *sophique* 165
Assemblée générale du 22 avril 166
Rapport du Délégué de la *Sociét[illegible] de Paris.* . . 166
Conférence de M. le D^r^ Lemière s[illegible] *défense contre les agents pathogènes.* 169
Assemblée générale du 23 avril 1903 172
Rapport du Trésorier 172
Conférence du R. P. J.-D. Lucas, S. J., sur [illegible] *nores dans l'arc électrique : arc chantant et arc-*[illegible] . . 173
Résultat des élections pour le renouvellement [illegible] . 174
Liste des ouvrages reçus par la *Société scientifique* [illegible] 1^er^ mai 1902 au 1^er^ mai 1903 175

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

La congélation appliquée aux batardeaux, par M. L. Cousin . . . .
Simple recherche trigonométrique sur la nutation eulérienne de l'axe instantané, par M. F. Folie . . . .
Sur la séparatrice d'ombre et lumière du serpentin, par M. Ch. Hanocq
Sur la conductibilité électrique des solutions d'hydrate de chloral, par M. R. De Muynck 186
Observations sur l'Anatomie macroscopique de l'appareil salivaire de *Nepa Cinerea*, par M. M. Lefebvre 192
Description de trois genres nouveaux et de cinq espèces nouvelles de la Famille des *Sciaridae* (Diptères), par M. l'Abbé J. J. Kieffer .

Le volume des *Annales de la Société scientifique* p[illegible] 4 fascicules trimestriels; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

Adresse du secrétaire : **M. Paul Mansion,** *6, quai des Dominicains, Gand.*

Supplément aux "Annales de la Société Scientifique de Bruxelles", t.27, fasc. III.

Agence générale pour la Belgique :
Librairie Nierstrasz, 7, passage Lemonnier, LIÈGE

LE MOIS SCIENTIFIQUE ET INDUSTRIEL

Revue des Revues Techniques

Le M. S. I. est honoré d'une subvention de la Société d'encouragement pour l'Industrie Nationale et d'une subvention de l'Association française pour l'avancement des Sciences.

MULTA PAUCIS

Cette Revue, d'un genre unique, publie chaque mois, après les avoir classés méthodiquement et suivant un ordre pratique, les résumés accompagnés de croquis et de photographies des principaux mémoires publiés par les revues techniques du monde entier en quelque langue qu'ils soient.

Ces analyses, faites par des spécialistes, donnent l'essence même du travail résumé, en signalant tous les points intéressants et nouveaux dans *l'ordre pratique*.

Elle est, en premier lieu, l'outil indispensable de l'ingénieur et de l'industriel qui veulent suivre sans grande dépense et sans grand effort les perfectionnements apportés dans leur industrie.

C'est aussi un recueil intéressant et instructif pour tous ceux qui veulent, sans approfondir les questions, se donner une idée générale des travaux considérables accomplis dans les différentes branches industrielles.

Nous conseillons donc à tous ceux qui veulent avoir une idée de cette importante publication de solliciter l'envoi d'un

SPÉCIMEN GRATUIT *(Joindre 0.20 pour les frais).*

Le spécimen envoyé a pour but de donner une idée approximative de l'état actuel de la Revue qui a aujourd'hui de 120 à 160 pages par mois. Ce spécimen, montre bien la façon dont est réalisée notre devise « Multa Paucis ».

Pendant ses 4 années d'existence, elle a résumé 18.000 articles.

L'abonnement comprend **12 FASCICULES** mensuels, plus un **SUPPLÉMENT** important publié à l'occasion du **Congrès annuel** de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, et qui, paraissant quelques jours **avant** l'ouverture du Congrès, contient le résumé des communications qui doivent y être faites.

Enfin, chaque année, la Revue publie **4 monographies très documentées** sur des industries différentes, accompagnées d'index bibliographiques complets et d'annotations sur les renseignements pratiques (main-d'œuvre, etc..)

La première sera publiée le 25 mars et aura pour titre :

La Fabrication des fontes, aciers et fers par le haut-fourneau électrique

La deuxième paraîtra dans notre fascicule du 25 juin et sera intitulée :

Les applications industrielles du Froid

Prix du Numéro : 2 francs

ABONNEMENT :	Edition ordinaire	Edition pour fiches
France et Belgique	20 fr.	25 fr.
Etranger	25 fr.	30 fr.

L'Edition pour Fiches est imprimée sur un seul côté des pages.

OPINIONS DE LA PRESSE SCIENTIFIQUE

(Faute de place, nous ne reproduisons ici qu'une seule opinion, choisie dans toutes celles qui ont été publiées).

Electricien, *25 novembre 1899.*

Cette nouvelle publication, dont nous avons les quatre premiers numéros sous les yeux, mérite d'attirer l'attention de tous ceux qui, à un titre quelconque, s'intéressent aux choses de la science et de l'industrie.

En créant cette nouvelle Revue, la rédaction a eu pour objectif principal de résumer tous les mémoires, travaux et études publiés dans les innombrables publications périodiques, tant françaises qu'étrangères. Tout ce qui mérite d'être signalé dans le domaine de la mécanique, de l'électricité, de la construction, de l'éclairage et du chauffage, de la photographie, de la locomotion, des mines et de la métallurgie, de l'agronomie, de la chimie industrielle, etc., est soigneusement indiqué et analysé, avec l'indication des sources originales où le lecteur, s'il le désire, pourra

trouver les développements et renseignements complémentaires sur la question qui l'intéresse plus particulièrement. Un détail à noter, qui a bien son importance, est que la plupart des analyses publiées sont accompagnées de figures explicatives.

Il faut vraiment une patience de bénédictin pour mener à bien un pareil travail, et la rédaction du *Mois Scientifique* doit avoir une besogne difficile pour présenter ainsi mensuellement un résumé aussi fidèle des progrès accomplis, tant au point de vue théorique qu'au point de vue des applications.

La notice *Multa paucis*, mise en tête de la préface du premier numéro, est largement justifiée ; et cette utile, nous dirons même indispensable publication est appelée à un grand succès bien mérité, car tout le monde, savants, industriels et praticiens, y trouveront des renseignements précieux qu'il leur sera facile de compléter en se reportant aux travaux originaux qui sont très soigneusement indiqués.

On ne saurait trop encourager une publication de cette valeur, et nous sommes persuadés que nos lecteurs nous sauront gré de la leur avoir signalée. J.-A. MONTPELLIER.

BUREAU TECHNIQUE du M.S.I.

Adresse Télégraphique : MSI-PARIS **8, Rue Nouvelle, PARIS-IXe**

(FONDÉ EN 1899)

Destiné à compléter notre revue, notre. **BUREAU TECHNIQUE** *répond, moyennant des honoraires convenus d'avance, à* **toute question qui lui est posée, quel qu'en soit l'objet.**

Quelle que soit la question qui vous préoccupe, quelles que soient les recherches bibliographiques ou autres que vous ayez à faire, quels que soient le sujet et la nature du travail scientifique, technique, industriel et commercial, dont vous ayez besoin, demandez au "Bureau Technique" ses conditions de prix et de délai. Donnez en même temps les détails nécessaires pour que l'on se rende bien compte de vos désirs ; indiquez les éléments que vous possédez déjà afin que les recherches préliminaires soient abrégées et le prix diminué en conséquence.

Grâce à un index de

7.000.000 de Fiches

il peut fournir rapidement et pour un prix modéré la bibliographie de toute question.

Il fait toutes **traductions techniques** *(4 fr. les 1000 mots), peut fournir la* **collection des Catalogues** *pour toutes machines et s'occupe de la vente et de l'achat des* **Brevets.**

SPÉCIMENS DE QUESTIONS RÉSOLUES

... juin 1902.

... Des chaudières sont alimentées par de l'eau de source ; où il se produit des crues subites et à ce moment **l'eau devient très trouble** et se charge d'un limon très divisé qui se dépose dans les chaudières. Il passe à travers tous les filtres essayés jusqu'à présent et il va jusque dans la boîte de distribution ; comment s'en débarrasser alors qu'on ne peut pas filtrer sous pression..?

L'ingénieur Directeur d'une usine à gaz.

Bollène, 9 juin 1902.

... Pourriez-vous m'indiquer le nom **d'un minerai** ressemblant beaucoup au manganèse qui ne contient pourtant que beaucoup d'alumine avec un peu de fer ne ressemblant en rien à la bauxite..?

Paris, 6 août 1902.

... Pourriez-vous me faire une enquête aux Etats-Unis sur les divers procédés pour la **fabrication** de... par le **four électrique** ?

Paris, le 7 juillet 1902.

Un constructeur me répare pour la 3e fois un **moteur à pétrole** de canot. Je ne puis le lui reconfier. J'en ai besoin. Que dois-je faire ?

Madrid, 5 janvier 1902.

... Ayant de grandes quantités de **copeaux de bois**, je désirerai en tirer un meilleur profit, que par leur combustion dans un foyer.

Dijon, 15 septembre 1902.

... Je désirerais avoir la bibliographie de l'**Emploi du Vanadium** dans la métallurgie de l'acier...

Paris, le 14 juin 1902.

... J'ai eu l'occasion de voir dernièrement appliqué au Vénézuela, un nouveau procédé d'**argenture des miroirs**, procédé allemand très simple, et, paraît-il, **exposé** à Paris en 1889. Pourriez-vous m'en donner la description..?

DEMANDER LA NOTICE

ÉTAMPES ET PARIS. — IMP. " LA SEMEUSE " 10681

LA CONGÉLATION

APPLIQUÉE AUX BATARDEAUX

PAR

M. L. COUSIN
Ingénieur

Le 31 mars 1903, la ville d'Anvers mettait en adjudication le creusement de deux nouveaux bassins et leur raccord avec le bassin Lefebvre (fig. 1). L'obligation de maintenir ce dernier à pleine eau et de n'ouvrir la brèche AB qu'à la fin des travaux, le déplacement des fossés d'enceinte et les obstacles qui s'opposent au passage d'une drague, sont des sujétions qui grossiront le coût de l'entreprise. Mais la principale difficulté résulte de l'existence à la cote — 4,50 d'une couche de sable boulant, laquelle rend dangereux tout batardeau ordinaire à grande retenue d'eau.

L'auteur du projet a voulu évidemment l'exécution de ces travaux sans le secours du batardeau, car il prescrit, dans le cahier des charges : que les nouveaux bassins devront être achevés et mis sous eau avant de porter la main au tronçon ACDB du chenal; que les murs CA et DB ainsi que leur raccord avec l'enceinte du bassin Lefebvre seront construits au moyen de caissons non foncés en fer. Comme conséquence et sans l'imposer toutefois il a dû concevoir la démolition du mur de quai AB à l'aide d'une cloche à air comprimé.

La réalisation de ce programme présente le triple inconvénient de laisser des discontinuités dans les murs, de coûter cher et d'exiger un long délai; alors qu'un batardeau, élevé devant la brèche AB et dans le bassin, permettrait de démolir et reconstruire à sec.

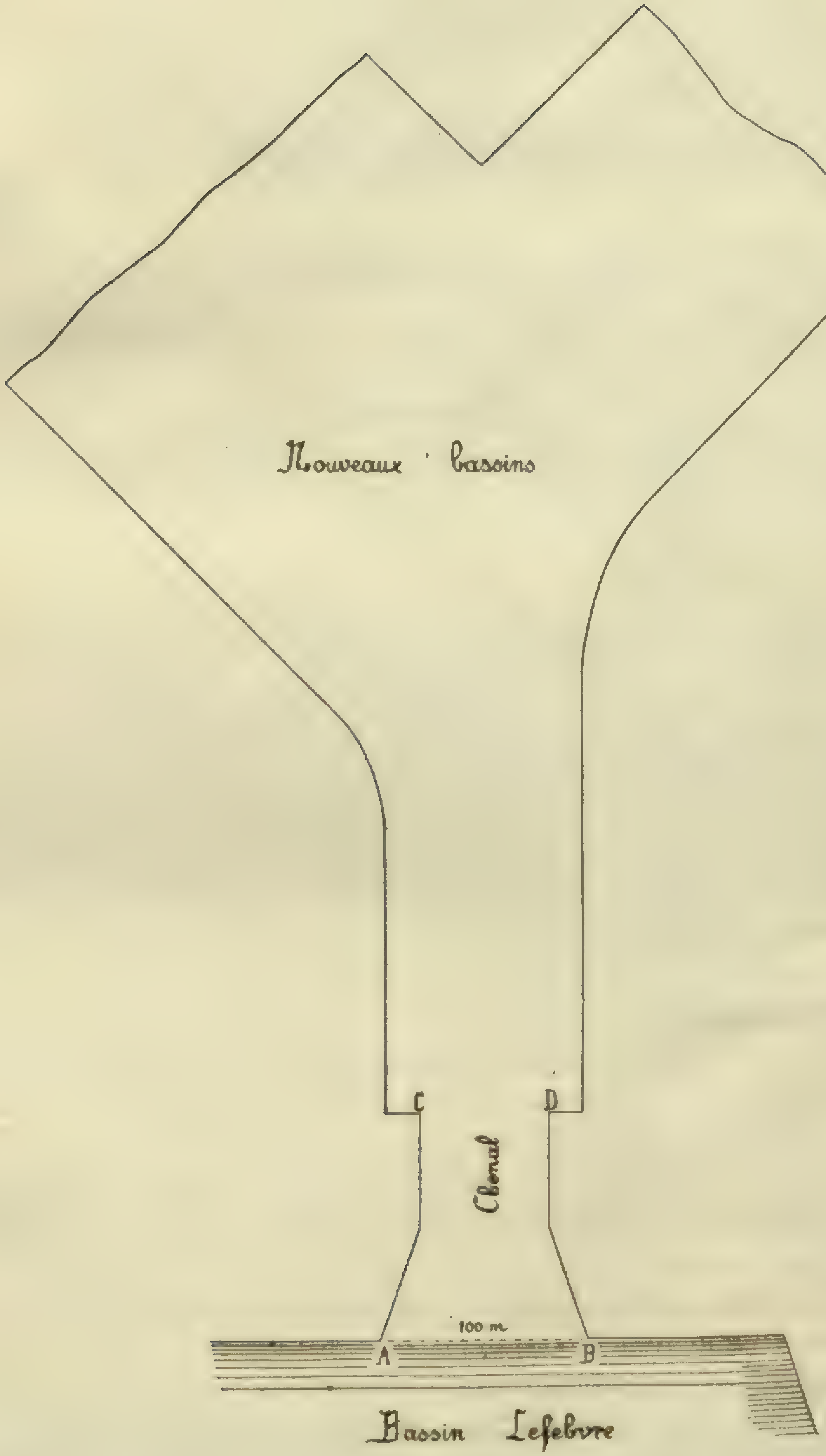

Fig. 1. — Plan général. Échelle $^1/_{5000}$.

Malheureusement le sous-sol est mouvant et il doit être soumis à une pression de 9 mètres d'eau.

M. Émile Cousin, ingénieur et entrepreneur, a eu l'idée de recourir à la congélation pour assurer en même temps l'étanchéité et la résistance du terrain. C'est une application nouvelle du procédé bien connu de M. Poetsch, ingénieur des mines allemand, pour le fonçage des puits dans les terrains aqueux et boulants (*).

Eu égard aux sujétions spéciales de l'entreprise d'Anvers, le batardeau devrait être constitué d'une série de caissons métalliques sans fond, échoués dans le bassin à $0^m,75$ du parement AB et enlignés devant l'ouverture à pratiquer, la débordant aux deux bouts de 8 à 10 mètres (fig. 2). Les joints entre caissons, larges de $0^m,75$ environ seraient couverts latéralement par des ailerons *n*

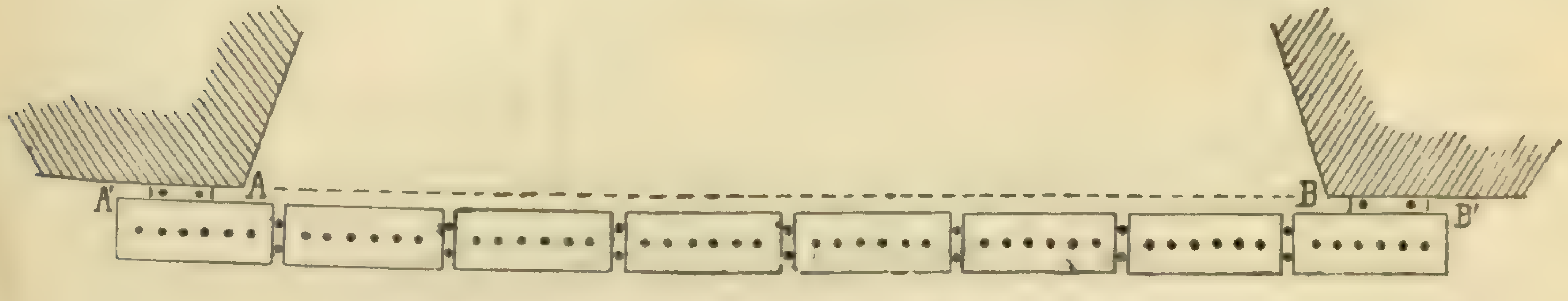

Fig. 2. — Plan du batardeau. Échelle $^1/_{1250}$.

rivés sur les abouts et formant emboîtement. Les deux caissons extrêmes seraient en outre munis de deux cornières verticales extérieures *m* (fig. 3), destinées à servir d'appui aux panneaux de bois fermant le joint sur les murs AA′ et BB′.

Sur les panneaux comme sur les ailerons on appliquerait de longs saucissons en grosse toile, remplis de terre argileuse et couvrant les joints sur toute la hauteur. En même temps les tubes à congeler seraient mis en place et distribués dans les caissons et les joints de façon à solidifier la base continue du batardeau (fig. 3), après quoi caissons et joints sont remplis de terre et mieux de sable, si on veut les vider à la pompe après terminaison des travaux.

En cet état le batardeau présente toute garantie de résistance

(*) Voir la Revue des Ingénieurs de Louvain 1882-1883 et 1883-1884; — les Annales des ponts et chaussées de France, 1884 et 1887.

et d'étanchéité après la congélation du sous-fond. Sous son couvert on peut épuiser les fouilles sans plus risquer d'appeler le sable mouvant et de compromettre les quais voisins. Il serait aisé d'ailleurs d'en faire la preuve sans danger aucun, en mettant à sec le petit espace enserré entre le batardeau et le quai, avant d'ouvrir aucune fouille. Ce mur AB lui-même pourrait être maintenu pendant la construction des quais AC et BD.

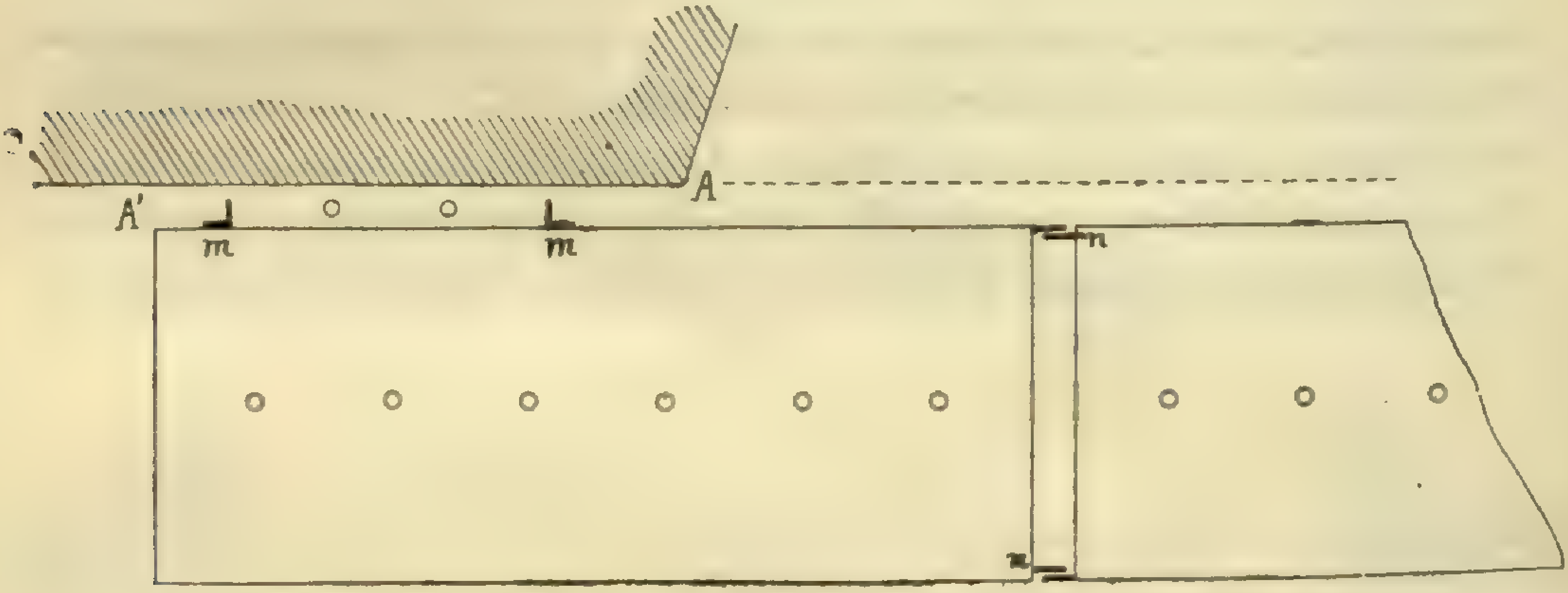

Fig. 3. — Fermeture des joints. Échelle $^1/_{250}$.

L'application spéciale du procédé Poetsch qui vient d'être décrite peut s'étendre d'une manière générale à toute espèce de retenue d'eau en terrain mobile et perméable. Le batardeau peut indifféremment être contenu entre des parois de caissons ou un encoffrement en charpente; ce peut même être un simple massif de terre rapporté ou non : la congélation se pratiquera avec la même facilité et la même efficacité dans tous les cas.

SIMPLE RECHERCHE TRIGONOMÉTRIQUE

DE LA

NUTATION EULÉRIENNE DE L'AXE INSTANTANÉ

PAR

M. F. FOLIE
Membre de l'Académie royale de Belgique

Dans un premier article (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, t. XXV, 2e partie, pp. 252-268), je suis arrivé à prouver que cette nutation se compose de deux termes, dont l'un a pour argument $\Gamma + \varphi$, Γ désignant l'angle de la projection équatoriale de l'axe instantané avec l'axe principal X, et l'autre, l'angle ξ compris entre le colure des solstices et le grand cercle des deux pôles.

J'envoyai cette démonstration à M. Darwin qui m'écrivit immédiatement que mes deux termes se détruisaient; je lui répondis que cela ne me semblait pas possible, l'argument du premier ayant une période de $\frac{305}{306}$ j., l'autre une période de 305 j., *d'après tous les astronomes.*

C'est alors que M. Darwin, pour trancher la question, étudia, au moyen d'une analyse très profonde, le mouvement de la Terre autour de son axe instantané, abstraction faite des forces perturbatrices, et m'autorisa à présenter à l'Académie royale de Belgique le manuscrit de son travail (BULLETIN DE LA CLASSE DES SCIENCES, 1903, p. 147-161).

Il y démontre que la nutation eulérienne de l'axe instantané est nulle (en pratique), mais que l'heure y est sujette à des variations de même ordre et de même période que les variations de latitude, multipliées par la tangente de la latitude; en sorte que les heures

déterminées au même instant en deux lieux de même longitude et de latitudes respectives $+ 45^\circ$ et $- 45^\circ$ diffèrent entre elles de $0^s,02$ lorsque le pôle instantané est à 90° du méridien de ces lieux.

De mon côté, frappé de l'observation que m'avait faite M. Darwin, je scrutai le problème que j'avais résolu par la seule trigonométrie sphérique, et j'aboutis aux mêmes résultats que lui.

J'avais pensé que ces variations périodiques de l'heure, base fondamentale de l'astronomie, engageraient les astronomes à renoncer définitivement au système de l'axe instantané.

Il n'en est rien, et M. Darwin lui-même semble plaider les circonstances atténuantes en faveur de ce système.

Je me propose de donner à celui-ci le coup de grâce, en démontrant que la nutation eulérienne du *véritable* axe instantané n'est pas négligeable comme celle de l'axe *fictif* considéré par tous les astronomes, et dont M. Darwin s'est occupé. Je pourrai toutefois me borner à tenir compte de l'effet le plus considérable des forces perturbatrices, la précession.

En désignant par p, q, r les vitesses angulaires de la Terre autour des axes principaux X, Y, Z; par α', β', γ' les angles de l'axe instantané avec ceux-ci, on aura

$$\cos\alpha' = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\beta' = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\gamma' = \frac{r}{\omega}, \quad \omega \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Or les intégrales des équations d'Euler sont :

$$p = \gamma_1 \cos\Gamma + c_1 \sin\varphi, \quad q = \gamma_1 \sin\Gamma + c_1 \cos\varphi, \quad r = n = C^{te}.$$

De là, on tire, en faisant $\gamma_1 = n\gamma$, $c_1 = nc$,

$$\omega^2 = n^2 + \gamma_1^2 + c_1^2 + 2c_1\gamma_1 \sin(\Gamma+\varphi),$$

$$\sin^2\gamma' = \gamma^2 + 2c\gamma\sin(\Gamma+\varphi) + c^2,$$

ou

$$\gamma' = \gamma\left[1 + \frac{c}{\gamma}\sin(\Gamma+\varphi)\right].$$

Des formules connues, on tire ensuite

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma_1\cos(\Gamma+\varphi), \quad \sin\theta\frac{d\psi}{dt} = \gamma_1\sin(\Gamma+\varphi) + c_1$$

et en intégrant :

$$\theta = \theta_0 - \frac{\gamma}{1+\mu} \sin(\Gamma + \varphi):$$

$$\sin\theta\,(\psi - \psi_0) = c_1 t - \frac{\gamma}{1+\mu} \cos(\Gamma + \varphi),$$

Γ ayant pour expression $\Gamma_0 + n\mu t$.

Nous avons trouvé, dans notre précédent article,

$$\theta_1 - \theta = -\gamma' \cos\xi, \qquad \sin\theta\,(\psi_1 - \psi) = \gamma' \sin\xi.$$

La nutation eulérienne de l'axe instantané,

$$\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_0, \qquad \Delta\psi_1 = \psi_1 - (\psi_0 + c_1 t)$$

sera donc exprimée par

$$\Delta\theta_1 = -\gamma(1-\mu)\sin(\Gamma + \varphi) - \gamma' \cos\xi.$$

$$\sin\theta\Delta\psi_1 = -\gamma(1-\mu)\cos(\Gamma + \varphi) + \gamma' \sin\xi.$$

Or, en se reportant à la figure de notre précédent article, on a

$$\xi = QI' = EI' - EQ = \Gamma + \varphi - 3\frac{\pi}{2}\ (*);$$

et, par suite, en négligeant $\gamma\mu = 0''0005$:

$$\Delta\theta_1 = c\sin^2(\Gamma + \varphi), \quad \sin\theta\Delta\psi_1 = c\sin(\Gamma + \varphi)\cos(\Gamma + \varphi);$$

d'où

$$\Delta\delta_1 = c\sin(\Gamma + \varphi)\cos(\Gamma + \varphi - \alpha_1),$$

$$\Delta\alpha_1 = c\cos\theta\sin(\Gamma + \varphi)\cos(\Gamma + \varphi)$$
$$- c\,\mathrm{tang}\,\delta_1 \sin(\Gamma + \varphi)_1 \sin(\Gamma + \varphi - \alpha_1).$$

C'est donc bien à tort que les astronomes fondent leurs réductions sur les formules incorrectes $\Delta\delta_1 = 0$, $\Delta\alpha_1 = 0$.

(*) C'est cet angle ξ auquel Oppolzer attribue une période de 305 j., tandis qu'elle est en réalité la même que celle de $(\Gamma + \varphi)$, $\frac{305}{306}$ j.

Comme $c = \frac{c_1}{n} = \frac{20''.2}{2\pi . 366,25} = 0''.0085$, l'erreur en déclinaison approche du centième de seconde d'arc.

Peut-être dira-t-on que cette erreur est insignifiante, comme on l'a dit des variations de l'heure astronomique (*).

On ne le dira pas quant à celle qu'on commet sur l'AR de la polaire; $c \operatorname{tang} \delta_1$ en effet est égal à $0^s.027$ pour cette étoile, à $0^s.07$ pour λ U. min.'

Dans le tableau suivant, nous mettrons en regard

I) les formules usitées, mais incorrectes,

C) les formules correctes relatives à l'axe instantané,

L) les formules absolument rigoureuses relatives à l'axe d'inertie.

AR
- I. $\Delta\alpha_1 = 0.$
- C. $\Delta\alpha_1 = c \sin(\Gamma + l + \alpha)[\cot\theta \cos(\Gamma + l + \alpha) - \operatorname{tang}\delta_1 \sin(\Gamma + l)].$
- L. $\Delta\alpha \;= \pm \gamma[-\cot\theta\cos(\Gamma + l + \alpha) + \operatorname{tang}\delta \sin(\Gamma + l)].$

Décl.
- I. $\Delta\delta_1 = 0.$
- C. $\Delta\delta_1 = c \sin(\Gamma + l + \alpha)\cos(\Gamma + l).$
- L. $\Delta\delta \;= \pm\gamma \cos(\Gamma + l).$

Lat.
- I. $\Phi_1 = \Phi_m + \gamma\cos(\Gamma + l).$
- C. $\Phi_1 = \Phi_m + \gamma\cos(\Gamma + l) - c\sin(\Gamma + l + \alpha)\cos(\Gamma + l).$
- L. $\Phi \;= \Phi_m.$

Heure
- I. $\tau_1 = \tau_0 + nt.$
- C. $\tau_1 = \tau_0 + nt - \operatorname{tang}\Phi_1[\gamma\sin(\Gamma + l) + c\sin(\Gamma + l + n)].$
- L. $\tau \;= \tau_0 + nt$ (**).

(*) Les variations eulériennes (pér. 305 j.) ont pour coefficient, non γ qui est constant, mais $\gamma + c\sin(\Gamma + \varphi)$. De même l'expression de Γ n'est pas simplement $\Gamma_0 + n\mu t$, comme dans les expressions ci-dessus de p et q, mais bien $\Gamma_0 + n\mu t - \frac{c}{\gamma}\cos(\Gamma + \varphi)$, comme on le déduit aisément des formules

$$\cos\alpha' = \sin\gamma' \cos\Gamma, \qquad \cos\beta' = \sin\gamma' \sin\Gamma.$$

(**) *Revision des constantes de l'astronomie stellaire*, p. 93.

Les unes et les autres se rapportent aux observations faites dans le méridien instantané ou dans le méridien fixe. Dans ce dernier cas les signes $+$ ou $-$ s'appliquent à un passage supérieur ou inférieur, et proviennent de ce que $\varphi = \alpha + l$ ou $\varphi = \pi + \alpha + l$, l désignant la longitude orientale du premier méridien.

A la simple inspection de ces formules, on constate immédiatement que, dans le système de l'axe d'inertie, la nutation eulérienne disparaît entièrement dans la somme des coordonnées de deux étoiles de même déclinaison à peu près, observées à quelques minutes d'intervalle, l'une au N., l'autre au S., que la différence de ces coordonnées, au contraire, double ces deux nutations, avantages bien précieux que n'offrent pas les formules relatives à l'axe instantané.

En résumé, comme nous le disons dans un travail encore inédit, les formules usuelles sont absolument incorrectes quant à l'AR et à l'heure, insuffisantes quant à la variation des latitudes. Elles ont été, un peu inconsidérément, adoptées par toutes les éphémérides.

Ne serait-il pas plus que temps qu'un congrès d'astronomes revînt sur cette décision si funeste au progrès de l'astronomie de précision (*) ?

(*) Mémoires de l'Académie pontificale des Nuovi Lincei, t. XXI.

SUR LA
SÉPARATRICE D'OMBRE ET LUMIÈRE
DU SERPENTIN

PAR

Ch. HANOCQ
Candidat-ingénieur à Liége

Le serpentin est, comme on le sait, la surface enveloppe d'une sphère dont le centre parcourt une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Les caractéristiques, intersections de deux sphères infiniment voisines, sont des grands cercles situés dans des plans normaux à l'hélice.

Pour trouver la séparatrice d'ombre et lumière du serpentin, nous rechercherons, dans chaque position déterminée de la sphère génératrice, l'intersection de la séparatrice d'ombre et lumière de cette sphère avec la caractéristique correspondante ou, ce qui revient au même, nous déterminerons l'intersection du plan de cette séparatrice avec celui de la caractéristique et nous porterons sur cette droite, de part et d'autre du centre, une longueur égale au rayon ρ de la sphère mobile.

Nous trouverons ainsi, dans chaque position de la sphère, deux points de la séparatrice cherchée qui sont diamétralement opposés.

Soit (m, m') un point de l'hélice donnée; soit (RL, R'L') la direction des rayons lumineux (fig. 1).

Le plan de la séparatrice de la sphère est perpendiculaire aux rayons lumineux et passe par (m, m'); sa trace horizontale est Q. Le plan de la caractéristique est perpendiculaire à la tangente

à l'hélice au point (m, m') ; sa trace horizontale est P. L'intersection de ces deux plans est la droite $(mt, m't')$; pour obtenir des points de la séparatrice sur le serpentin, il suffira de porter sur $(mt, m't')$, de part et d'autre de (m, m'), la longueur ρ.

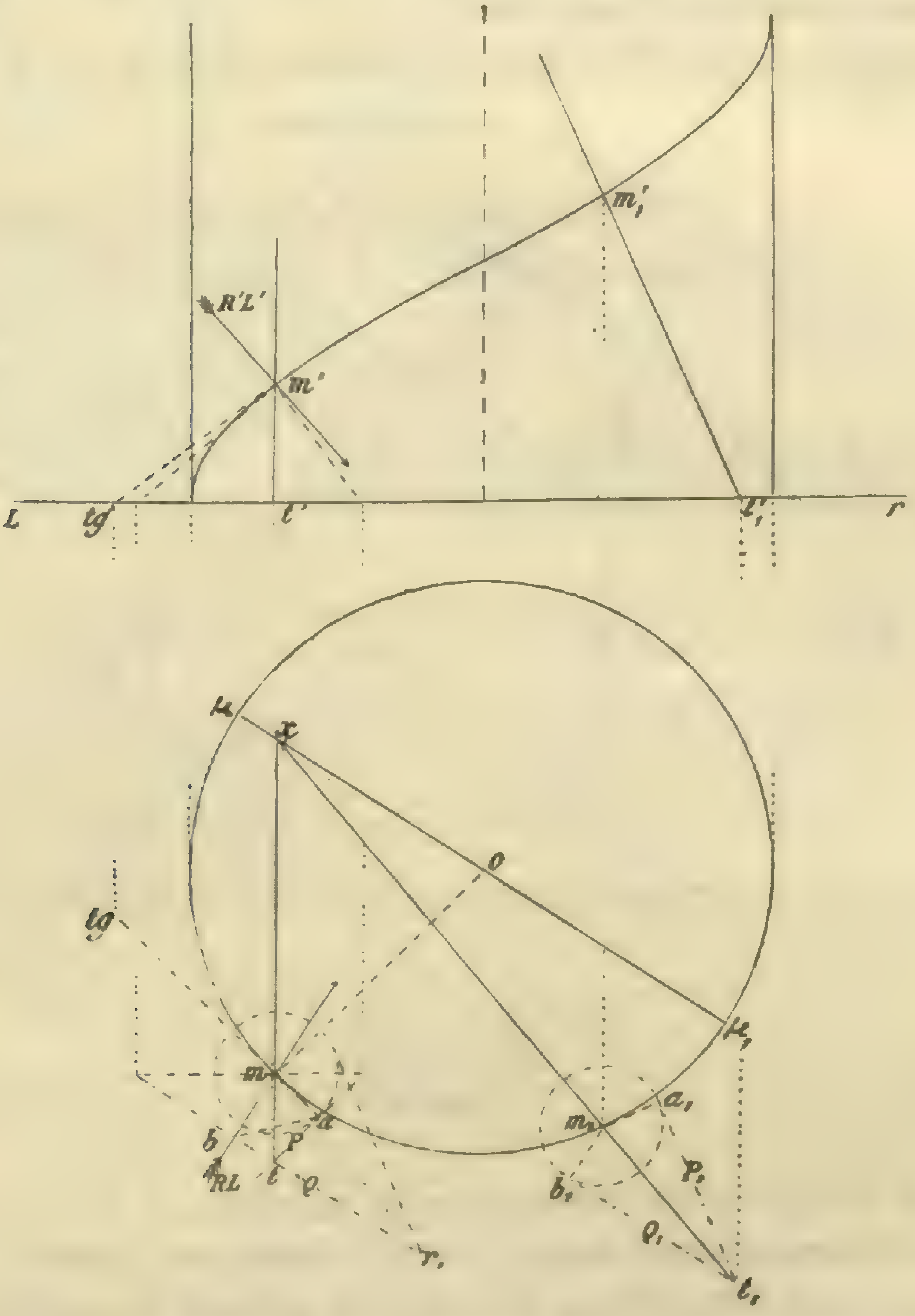

Fig. 1.

Nous pourrions répéter cette construction pour un autre point (m_1, m_1') de l'hélice ; mais remarquons que, si nous faisons participer le plan horizontal de projection au mouvement hélicoïdal qui amène (m, m') en coïncidence avec (m_1, m_1'), la trace P_1 du plan de la caractéristique sera à une distance $m_1 a_1 = ma$ du point m_1 ;

le plan de la caractéristique garde en effet une inclinaison constante sur le plan horizontal. Quant à la trace Q_1 du plan d'ombre de la sphère génératrice, elle est évidemment parallèle à Q et à une distance $m_1b = mb$ du point m_1. Donc l'intersection des deux plans est ici $(m_1t_1, m'_1t'_1)$.

On aurait pu l'obtenir plus facilement encore en traçant π_1

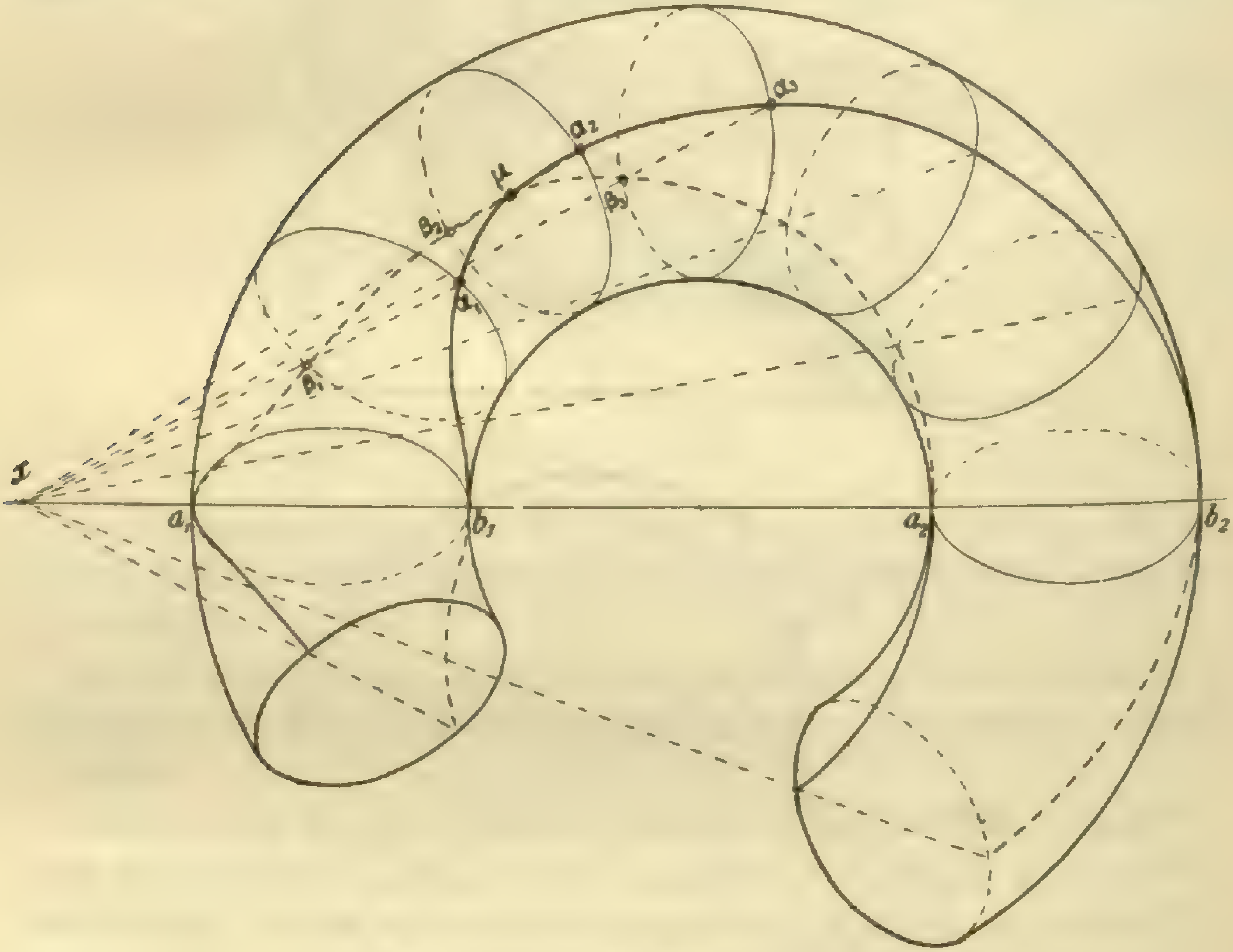

Fig. 2.

tangent au cercle de rayon *ma* et parallèle à P_1, c'est-à-dire à om_1 ; l'intersection r_1 avec Q_1 aurait donné mr_1 parallèle à m_1t_1.

Cette remarque, due à M. Legrand, permet de concentrer les constructions au point (m, m') et de déterminer facilement la projection verticale $m'_1t'_1$, ainsi que les points (x_1, x'_1), (y_1, y'_1) de la séparatrice du serpentin.

En effet, si nous déterminons les projections de la séparatrice d'ombre et lumière de la sphère de centre (m, m'), nous pourrons prendre les points d'intersection de *mr* avec la projection horizontale de cette séparatrice : soient X et Y ces deux points. Les

projections verticales seront X′ et Y′ sur la projection verticale $m'r'_1$ de mr_1. En menant par m'_1 une parallèle a mr'_1 et en portant de part et d'autre de (m_1, m'_1) les distances correspondantes (mX, m'X′), (mY, m'Y′) on aura les deux points (x_1, x'_1), (y_1, y'_1) de la séparatrice cherchée qui appartiennent à la sphère de centre (m_1, m'_1).

Nous allons démontrer une proposition importante qui facilite la construction de la séparatrice.

Théorème. — *Les projections horizontales des intersections des plans de la caractéristique et de la séparatrice de la sphère enveloppée, dans les différentes positions de celle-ci, convergent en un point x situé sur la perpendiculaire en o à la projection horizontale du rayon lumineux.*

En effet, menons ab et prolongeons tm jusqu'à la rencontre en x avec $o\mu$ perpendiculaire à RL. Le quadrilatère $matb$ étant inscriptible, on a :

angle $mba = mta$, angle $mab = mtb$.

Or, à cause des parallèles,

angle $mta = xmo$, angle $mtb = oxm$.

Donc les triangles mba et oxm sont équiangles et semblables, et l'on a :

$$\frac{ox}{ma} = \frac{om}{mb}.$$

D'où

$$ox = \frac{om \times ma}{mb} = \text{constante.}$$

Corollaire. — Cette propriété correspond à une propriété de la séparatrice dans l'espace qui peut s'énoncer comme suit :

Les diamètres de la sphère mobile, dont les extrémités appartiennent à la séparatrice du serpentin sont les génératrices d'une surface conoïde ayant pour plan directeur le plan perpendiculaire au rayon lumineux pour directrice rectiligne une verticale et pour directrice curviligne l'hélice.

Discussion. — La formule

$$(1) \qquad ox = \frac{om \times ma}{mb}$$

permet de déterminer les particularités de la projection horizontale de la courbe séparatrice pour différentes inclinaisons du rayon lumineux.

En effet, on peut faire les hypothèses

$$mb > ma, \qquad mb = ma, \qquad mb < ma$$

qui correspondent respectivement à un rayon lumineux plus incliné, de même inclinaison ou moins incliné sur le plan horizontal que la tangente à l'hélice donnée.

Si $mb > ma$, on a $ox < om$ et le point x est à l'intérieur du cercle o. Dans cette hypothèse, xm peut occuper toutes les positions autour du point x et en particulier la position $x\mu$, $x\mu_1$ perpendiculaire à RL. Si nous remarquons que dans l'espace les droites $(x\mu, x'\mu')$, $(x\mu_1, x'_1\mu'_1)$ sont perpendiculaires au rayon lumineux, comme étant situées dans les plans des séparatrices d'ombre et lumière des sphères correspondantes, il nous faudra conclure que $(x\mu, x'\mu')$ et $(x\mu_1, x'_1\mu'_1)$ sont des horizontales et que par conséquent les points correspondants de la séparatrice sont sur le contour apparent. Cette conclusion est évidente si l'on observe que les projections horizontales des points de la séparatrice peuvent s'obtenir en les considérant comme intersection des droites telles que xm avec l'ellipse, projection horizontale de la caractéristique correspondante, cette courbe restant égale à elle-même.

Si $mb = \infty$, on a $ox = 0$; c'est le cas du rayon lumineux vertical. La séparatrice d'ombre et lumière devient le contour apparent en projection horizontale.

Si $mb = ma$, on a $ox = om$ et le point x se trouve sur la circonférence de centre o. La droite xm se confond avec la tangente en x lorsque m coïncide avec x. Dans cette hypothèse la caractéristique fait partie de la séparatrice, aux points de l'hélice où la tangente est parallèle aux rayons lumineux.

Si $mb < ma$, on a $ox > om$ et le point x est extérieur au cercle

de centre o. Les positions limites de xm sont $x\mu$ et $x\mu_1$ (fig. 2). Si nous considérons une position xmm_1 voisine de $x\mu$, nous aurons, en notant les points visibles de la séparatrice par α_1, α_2, α_3, et les points non visibles par β_1, β_2, β_3, deux courbes $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et $\beta_1\beta_2\beta_3$.

On voit de cette manière que les deux courbes se croisent en μ; pour la même raison que dans le premier cas, ces deux courbes passent sur le contour apparent en des points a_1, b_1, a_2, b_2, situés sur la droite ox.

Remarques. — I. On voit aisément que dans les trois cas la droite ox est un axe de symétrie de la projection horizontale.

II. Le tore pouvant être considéré comme un serpentin dont l'hélice est ramenée à une circonférence, on voit que les caractéristiques sont alors dans des plans verticaux et que l'on a dans la formule (1) $ma = 0$, donc $ox = 0$.

La directrice rectiligne de la surface conoïde coïncide ici avec l'axe du tore.

Cette remarque permet de donner une construction de la séparatrice d'ombre et lumière du tore, en particulier pour le cas du rayon lumineux parallèle au plan vertical.

En effet, les génératrices du conoïde, perpendiculaires aux rayons lumineux, seraient en projections verticales perpendiculaires à R'L'; il sera donc facile de les déterminer.

En les amenant par rotation dans la section méridienne, on obtiendra chaque fois deux points d'intersection avec la circonférence génératrice et par conséquent deux points de la séparatrice.

SUR LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE

DES SOLUTIONS D'HYDRATE DE CHLORAL

PAR

R. DE MUYNCK
Professeur à l'Université de Louvain

Une solution aqueuse d'hydrate de chloral, de concentration moyenne (contenant, par exemple, 60 grammes d'hydrate dans 100 centimètres cubes d'eau), mesurée à l'aide du pont à téléphone de Kohlrausch, présente, immédiatement après la fermeture du courant, une résistance du même ordre de grandeur que l'eau distillée. Mais, si on continue la mesure, on constate bientôt que le minimum téléphonique se déplace : la résistance diminue rapidement, tombant, par exemple, de 1300 à 700 ohms en quelques minutes, à 100 ohms dans l'intervalle de quelques heures.

Il convient de remarquer que l'eau distillée du laboratoire présente un phénomène analogue. Mais il y a entre les deux liquides des différences essentielles : dans l'eau la diminution est moindre : la résistance ne descend pas au delà de plusieurs centaines d'ohms, et en outre elle atteint un minimum, où elle se maintient définitivement. Dans les solutions d'hydrate, au contraire, la diminution est bien plus grande : la résistance tombe à des valeurs inférieures à 100 ohms et en outre semble se prolonger indéfiniment. Il faut donc croire que dans les solutions d'hydrate, au phénomène observé dans l'eau pure (et dû sans doute en partie à la présence d'impuretés notamment de CO_2) se superpose une conductibilité propre à l'hydrate, indiquant l'existence, au sein de la solution, de molécules dissociées.

Il ne sera pas superflu de remarquer ici que cette dissociation — si elle est réelle — doit différer essentiellement d'une autre espèce de dissociation qu'on a étudiée dans l'hydrate de chloral, à savoir « du dédoublement que subissent certaines combinaisons chimiques, résultant de la juxtaposition de deux substances qui ne sont que faiblement unies ». D'après certains auteurs (*), l'hydrate de chloral peut ainsi se dédoubler, dans quelques dissolvants, en chloral et eau. Ce dédoublement, dont l'existence ne semble pas prouvée (**), et qui d'ailleurs ne se produirait précisément pas dans les solutions aqueuses, est évidemment distinct de la dissociation électrolytique, la seule que nous considérons ici.

Quant à cette dissociation électrolytique, la question de son existence a été posée par Rudolphi (***) qui n'a cependant pas pu donner à cette question une réponse satisfaisante : ses mesures ne lui fournissaient que les indices de réfraction. Or, on sait qu'il n'existe pas de loi connue reliant l'indice de réfraction à l'état d'ionisation ; il ne pouvait donc pas tirer des conclusions certaines.

Les considérations suivantes, et les expériences qui s'y rattachent, sans trancher cette question, semblent cependant de nature à jeter quelque clarté.

Tout d'abord, l'augmentation de la conductibilité d'une solution d'hydrate dans le pont de Kohlrausch ne peut s'expliquer ni par une variation de concentration, ni par l'élévation de température du liquide traversé par le courant : cette augmentation est, en effet, manifestement trop grande pour relever uniquement de ces causes : il faut donc plutôt croire à une décomposition électrolytique provoquée par le courant.

Mais, ce courant étant alternatif, comment peut-il provoquer une décomposition appréciable et permanente ? Il faut répondre à cela que, pour que les produits dégagés par un premier courant à une des électrodes puissent se recombiner intégralement aux produits dégagés à la même électrode par le courant subséquent, inverse du premier, il faut que ces produits n'aient pas eu le temps de s'éloigner de l'électrode par diffusion, etc., c'est-à-dire,

(*) Beckmann, Zeitschrift für physikalische Chemie, II, p. 724, 1888.
(**) Van den Berghe, Bull. de l'Acad. royale de Belgique, 1899, p. 658.
(***) Zeitschrift für physikalische Chemie, XXXVII, p. 445, 1902.

que le nombre d'alternances du courant intervient ici comme facteur, et on peut parfaitement concevoir que, pour une bobine donnée, une partie des produits de l'électrolyse aura le temps de se répandre dans le liquide et d'augmenter, le cas échéant, sa conductibilité (*).

Cela étant, pour vérifier le fait de l'électrolyse en courant continu, les pôles d'une batterie de dix éléments Leclanché furent appliqués à deux électrodes en platine platiné, très rapprochées, et plongées dans une solution d'hydrate de chloral. Voici ce qu'on observe alors : tout d'abord il ne se produit pas de décomposition visible; mais après une ou deux minutes on constate sur les deux électrodes, mais principalement sur l'électrode positive, un dépôt de bulles gazeuses. Ce dépôt augmente rapidement et bientôt se produit un dégagement de gaz, tumultueux et de plus en plus intense.

Une solution d'hydrate dans l'alcool à 94 °/₀, une solution de chloral anhydre dans l'eau ou l'alcool, se comportent de même; une solution de chloral anhydre dans le toluène, une solution d'hydrate de chloral dans le même dissolvant, ne subissent pas d'action visible, même en maintenant pendant quinze minutes une différence de potentiel de 116 volts à deux fils de platine très voisins placés dans le liquide.

Comme produits de l'électrolyse, il se dégage au pôle positif un gaz non inflammable, ayant une forte odeur de chlore; au pôle négatif un gaz inflammable de volume moindre. Peut-être a-t-on là au pôle négatif de l'hydrogène, et au pôle positif du chlore ou du chlore mélangé à de l'oxygène ; on sait, en effet (**), que, dans l'électrolyse de solutions diluées d'acide chlorhydrique, il se produit au pôle positif, par une réaction secondaire, de l'oxygène provenant de l'action du chlore naissant sur le dissolvant.

La solution d'hydrate avant l'électrolyse ne donne pas de précipité net avec une solution de nitrate d'argent ; elle ne rougit pas franchement le papier de tournesol : après l'électrolyse, le liquide rougit vivement ce papier ; il donne, avec une solution de nitrate,

(*) Cfr. Wiedemann, *Elektricität*, II, p. 570.

(**) Wiedemann, *Ibid.*, p. 501.

un précipité très net, très abondant pour le liquide ayant entouré les électrodes, moins abondant pour les parties intermédiaires.

Avant l'électrolyse, si on mélange à la solution d'hydrate de chloral des traces d'une solution de nitrate d'argent et si ensuite on fait passer le courant, on observe, superposé à l'électrolyse du nitrate, un trouble de la solution à la fois aux deux électrodes : il faut donc croire qu'il s'est produit de l'acide chlorhydrique tant au pôle positif qu'au pôle négatif. Cette production d'acide chlorhydrique expliquerait très bien l'augmentation de conductibilité observée au pont de Kohlrausch.

Cette expérience, comme je l'ai signalé plus haut, ne donne pas de résultat positif dans le cas de l'hydrate de chloral en solution dans le toluène. Comme je voulais m'assurer si ces solutions présentent une augmentation de conductibilité du toluène, j'ai eu recours à une méthode plus délicate. Le toluène est versé dans une cuve plate en verre, où reposent deux plaques en laiton poli de 20×20 centim. de surface, servant d'électrodes, et séparées par de petits morceaux de verre d'une épaisseur de 1,9 millim. Ces électrodes sont mises dans un circuit comprenant dix éléments Leclanché et un galvanomètre Deprez d'Arsonval très sensible, dans lequel un déplacement de 1 millim. indique un courant de $4{,}6.10^{-10}$ ampères, l'échelle étant à deux mètres du miroir. Le galvanomètre donne, à la fermeture du circuit, une déviation de quelques millimètres, répondant à la conductibilité du toluène pur.

Cette déviation n'est pas absolument constante : la conductibilité observée est la somme de la conductibilité propre, extrêmement faible, du toluène et de la conductibilité variable communiquée à celui-ci par de légères traces d'impuretés de diverse nature qu'on n'élimine jamais entièrement par la distillation. Heureusement, on peut, d'après H. Hertz (*), supprimer cette cause d'erreurs en « purifiant électriquement » le liquide : le passage suffisamment prolongé d'un courant détruit la conductibilité due aux impuretés. La nature intime de cette purification électrique est encore mal connue, mais, quelle qu'elle soit, nous pouvons nous servir avantageusement de ce procédé d'épuration.

(*) Wied. ann. XX, p. 283, 1883.

Après avoir ainsi, au besoin, épuré électriquement le toluène, de manière à ce que dix éléments Leclanché donnent une déviation d'une dizaine de millimètres seulement, si on fait dissoudre dans le liquide de l'hydrate de chloral, on observe une déviation très considérable, entièrement en dehors de la règle divisée. Pour ramener celle-ci dans le champ de la lunette il faut diminuer la force électro-motrice : ne prendre que deux éléments Leclanché par exemple, qui donnent une déviation de 65 millimètres.

Cette augmentation considérable de conductibilité, provoquée par la dissolution de l'hydrate, ne peut pas être mise sur le compte du chloral comme tel, car, si on recommence l'expérience avec du toluène donnant pour dix éléments Leclanché 4 millimètres de déviation et si on y mélange du chloral anhydre en quantité assez notable, la déviation n'augmente que légèrement (de 4 à 50 millim.) : mais si à ce moment on ajoute quelques gouttes d'eau distillée, la déviation monte subitement et atteint 120 millim. pour deux éléments Leclanché.

Une seconde expérience, conduite de la même façon, mais avec des quantités de chloral différentes, donne un résultat analogue. D'autre part, cette augmentation ne peut être mise sur le compte de l'eau seule, car mélangeant d'abord de l'eau distillée au toluène, on n'obtient qu'une augmentation minime, mais ajoutant ensuite du chloral anhydre, on retrouve une déviation très considérable.

Il faut donc conclure que l'hydrate de chloral comme tel communique au toluène une certaine conductibilité. Mais si on se reporte aux expériences relatées plus haut, il faut admettre que cette conductibilité est trop faible encore pour permettre le passage d'un courant et une électrolyse appréciable.

Conclusion. — L'électrolyse de l'hydrate de chloral ou du chloral en solution dans l'eau et dans l'alcool peut s'interpréter de deux façons différentes : ou bien la molécule se dissocie réellement dans ces solutions, ou bien les phénomènes observés sont provoqués par des réactions secondaires : en effet, malgré le soin qu'on a mis à purifier les produits (ils provenaient de Merck et Kahlbaum) il est possible qu'il s'y rencontre des traces de corps étrangers, par exemple d'acide chlorhydrique, et que celui-ci, décomposé par le courant, réagisse sur le liquide. Cette seconde hypothèse semble

provisoirement plus probable que la première, car elle rend mieux compte de l'accélération très rapide observée dans l'électrolyse.

Quoi qu'il en soit, il sera intéressant, par des expériences ultérieures, de décider entre ces deux explications, et, en même temps, dans le cas de la dissociation réelle, de rechercher la nature des ions formés, dans le cas des réactions secondaires, d'étudier les produits obtenus aux deux électrodes.

OBSERVATIONS

SUR

L'ANATOMIE MACROSCOPIQUE DE L'APPAREIL SALIVAIRE

DE *NEPA CINEREA*

PAR

M. LEFEBVRE

Les observations que j'ai l'honneur de présenter à la troisième section sont très incomplètes : c'est un simple extrait d'un travail plus considérable que j'ai fait sur l'anatomie, l'histologie et la physiologie de l'appareil digestif des Hémiptères.

Elles feront ressortir un exemple d'un abus fréquent que l'on rencontre dans les traités élémentaires d'histoire naturelle : ces traités se contentent souvent d'observations et de figures prises de confiance dans quelque mémoire suranné, sans préoccupation de vérifier les faits.

C'est ainsi qu'on retrouve dans la plupart des traités de zoologie une figure du système digestif de *Nepa,* publiée par Léon Dufour en 1833 (*) (fig. 1). Il est facile de voir en comparant cette figure à celle que j'ai l'honneur de présenter à la section (fig. 2), combien elle est incomplète et erronée.

Lorsqu'on ouvre une Nèpe sous l'eau, en lui enlevant ses téguments dorsaux, puis la dentelle du *pericardial-Gewebe* de Graber et les troncs trachéens qui recouvrent son appareil digestif, on

---

(*) L. Dufour, *Recherches anatomiques et physiologiques sur les Hémiptères.* Mém. des Sav. étr., Acad. des Sc., t. IV, 1833.

trouve la disposition suivante pour la portion antérieure de celui-ci : à partir de la tête et dans la ligne médiane du thorax, l'œsophage (œ) se montre sous forme d'une ligne rougeâtre à peine sinueuse, qui aboutit au ventricule chylifique (v. ch.); de chaque côté de l'œsophage, le long de sa moitié postérieure, apparaît une grande glande salivaire (gl. s.) qui se prolonge beaucoup plus bas et va entourer de ses deux tiers postérieurs par un repli en forme d'*S* le commencement du ventricule chylifique.

Chacune de ces glandes est réunie par un fin canal à une petite glande qui la surmonte et que j'appellerai *glande appendiculaire* (gl. app.).

La grande glande émet en avant un canal fort long qui va déboucher dans un appareil accessoire du pharynx, appareil très curieux servant probablement à la succion et que je décris dans mon mémoire sur l'appareil digestif de la Nèpe, mais sur lequel je n'attirerai pas votre attention aujourd'hui pour ne pas allonger ma communication outre mesure. La glande appendiculaire est reliée à la paroi de l'œsophage par un cordon fibreux plein (c. f.). L. Dufour avait remarqué ce ligament et dit dans son mémoire qu'il se fixe dans l'intérieur de la tête, bien que sa figure en représente l'extrémité flottante au dehors. Du même endroit antérieur terminal de la grande glande d'où partent les deux canaux que je viens d'indiquer, part un troisième canal qui remonte d'abord jusque dans le cou, puis redescend et se termine dans une vésicule allongée ou réservoir salivaire : pour éclaircir la figure, j'ai modifié le trajet naturel de ce canal. Le réservoir salivaire débute par un petit mamelon dans lequel s'ouvre le canal en question, se dilate ensuite considérablement et se termine enfin par une longue queue étroitement appliquée contre le ventricule chylifique par un réseau de trachées, détail que je n'ai pas dessiné.

L. Dufour a été induit en erreur touchant le trajet et les rapports du canal qui réunit le réservoir à la grande glande. Il a pensé que ce canal, en partant de la grande glande, se terminait dans la tête et n'était qu'un canal efférent, de sorte qu'il admettait deux canaux efférents pour cette glande.

La rareté d'une pareille disposition dans tout le règne animal aurait dû mettre ce grand entomologiste en garde contre cette présomption. D'autre part, inconséquence singulière, quoiqu'il

considère effectivement la vésicule que nous venons de décrire comme un réservoir pour la sécrétion salivaire, il ne cherche pas à constater ses rapports avec la grande glande.

Quant aux glandes venimeuses non décrites jusqu'aujourd'hui, on en voit deux petites, étroites et allongées, de chaque côté de l'œsophage, entre ce dernier et les glandes salivaires appendiculaires.

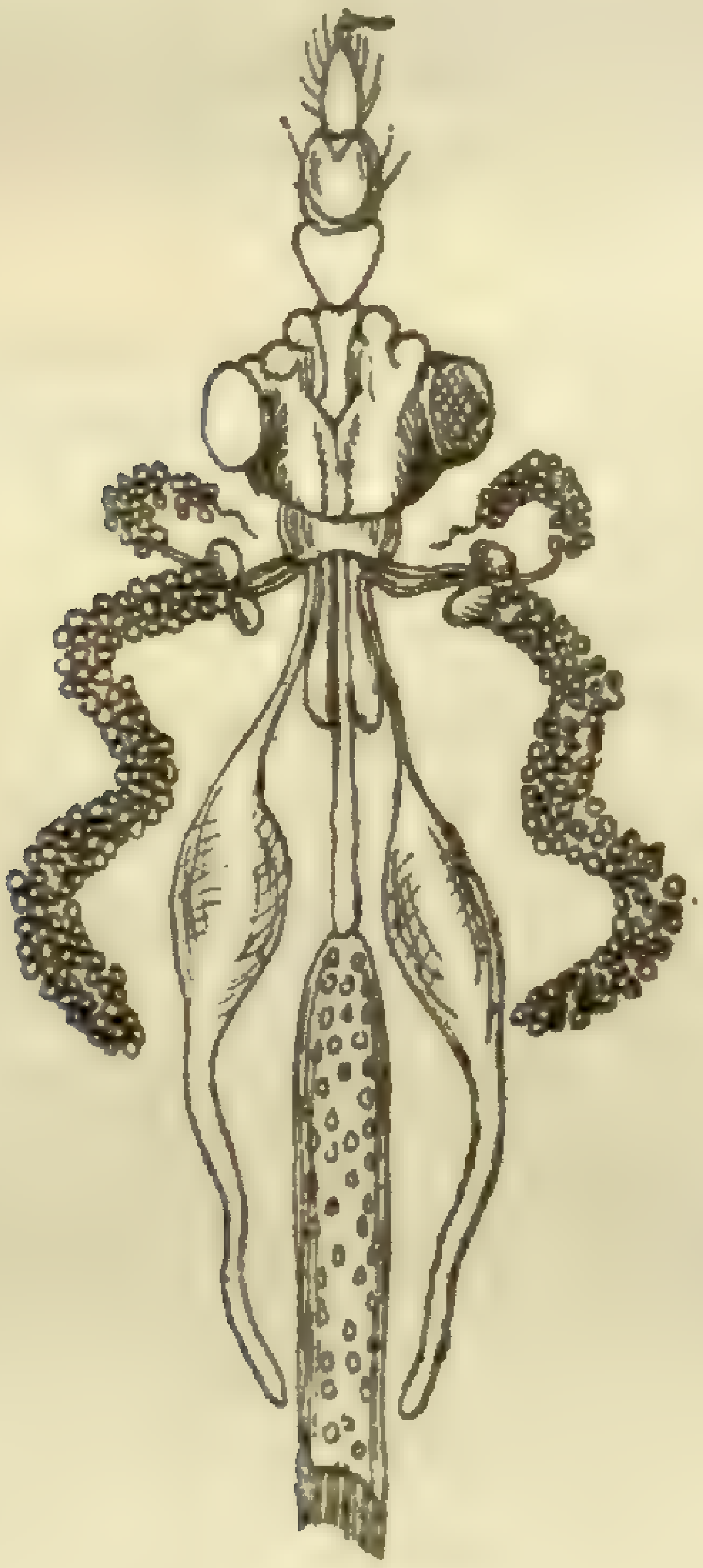

Fig. 1.

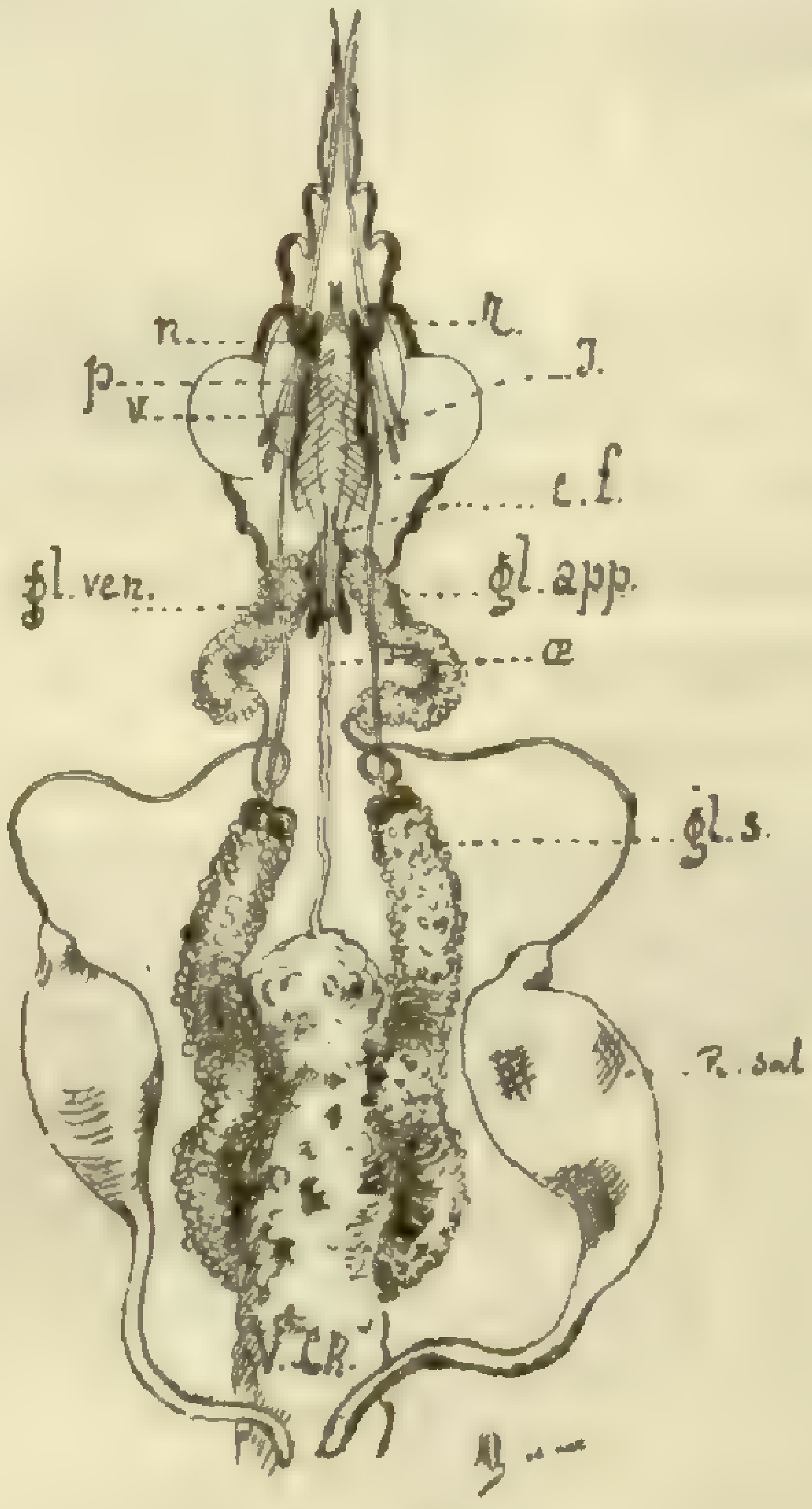

Fig. 2.

Dufour considère ces deux glandes comme deux réservoirs de sécrétion salivaire; mais leur contenu lactescent a une tout autre apparence que la salive. Il ne m'a pas été possible de constater le mode de débouché de ces glandes venimeuses dans les dards; et comme cette lacune pouvait laisser un doute sur la nature des deux petites glandes en question, je me suis assuré qu'elles représentaient bien les glandes venimeuses, par le procédé fort simple que voici : j'ai exprimé le contenu de ces glandes sur une piqûre de lancette que je me suis faite à la peau. La piqûre a pris aussitôt un caractère cuisant, et, bientôt après, une petite ampoule lui a succédé; la même opération, pratiquée avec le contenu des glandes

salivaires ou des grands réservoirs décrits précédemment, n'a pas produit ces effets. Il s'agit donc bien dans le cas présent des glandes venimeuses.

Mon intention est de donner à la section un simple aperçu d'anatomie macroscopique ; je laisse donc de côté dans cette note toutes mes observations histologiques.

Toutefois, j'ajouterai que mes coupes dans les réservoirs salivaires m'y ont montré une texture nettement glandulaire. Ce point est intéressant parce que ces organes ont été interprétés différemment. J'ai dit plus haut l'erreur de Dufour, qui pensait que les canaux issus de ces organes allaient s'ouvrir dans la tête. D'après lui, cependant, ce seraient simplement des réservoirs salivaires. Ramdhor est certainement dans le faux quand il appelle ces vésicules " première paire de glandes salivaires (*) ".

Plateau ne se trompe pas moins quand il les désigne pour la paire de glandes postérieures (**). A mon avis, leur disposition anatomique en fait, non une paire de glandes indépendantes mais des annexes des glandes salivaires déjà décrites, annexes toutefois qu'on ne peut considérer comme de simples réservoirs, puisque leurs parois sont glandulaires. Il est inutile d'ailleurs de nous arrêter à la singulière hypothèse de Vayssière qui, dans son atlas d'anatomie comparée, les soupçonne d'être des *glandes odorantes !...*

C'est le même auteur qui, touchant ce que Dufour appelait " petits réservoirs salivaires " et que j'ai montré être des glandes venimeuses, se borne à cette lumineuse explication : *petits cœcums sur les côtés de l'œsophage !*

(*) Ramdhor, *Verdauungswerkzeuge der Insecten*, Halle, 1811.

(**) *Mém. sur les phénomènes de la digestion chez les insectes*, Bull. Acad. R. de Belgique, 1877.

DESCRIPTION

DE

TROIS GENRES NOUVEAUX ET DE CINQ ESPÈCES NOUVELLES

DE LA FAMILLE DES *Sciaridae* (DIPTÈRES)

PAR

M. l'Abbé J. J. KIEFFER
Professeur au Collège Saint-Augustin à Bitche (Lorraine)

Les quatre premiers insectes que nous allons décrire, ont été recueillis dans l'arrondissement de Digne par M. Paul de Peyerimhoff. Tous quatre sont remarquables par l'aptérisme ou le brachyptérisme de la femelle, fait que l'on ne connaissait jusqu'ici que pour une seule espèce de cette famille. Les deux premiers forment un genre nouveau que nous dédions à l'éminent entomologiste qui les a découverts. Le troisième ne peut de même se rapporter à aucun des genres décrits jusqu'ici. Le tableau synoptique suivant indiquera la place occupée par ces nouveaux genres dans la famille des Sciarides.

1. Pelote nulle; palpes de 4 articles; femelle dépourvue d'ailes et de balanciers, à articles du funicule munis de verticilles de poils; mâle inconnu . . . *Epidapus* Hal.

— Une ou trois pelotes distinctes : palpes de 1 à 3 articles (*); chez la femelle, les poils des articles du funicule ne forment pas de verticille . . . . . 2.
2. Palpes très courts, composés de 1 à 2 articles . . . . 3.
— Palpes composés de 3 articles (*). . . 5.
3. Yeux velus ; femelle aptère ou brachyptère . . . . 4.
— Yeux nus ; femelle à ailes bien développées ; palpes de 2 articles. . . . *Plastosciara* Berg. (*Pseudosciara* Kieff. non Schin.).
4. Palpes composés d'un seul article ; tibias antérieurs sans peigne. . . . . . 4[bis].
— Palpes de 2 articles ; tibias antérieurs munis à leur extrémité d'une rangée transversale de spinules brunes formant peigne . . . . *Dasysciara* n. g.
4[bis]. Empodium avec une pelote courte ; pas de pulvilles . . . . *Peyerimhoffia* n. g.
— Empodium atrophié, sans pelote ; deux pulvilles en corne de cerf et aussi longs que les crochets . . . . . . *Mycosciara* n. g.
5. Cubitus réuni à la nervure costale par une nervure brachiale. . . . . . *Cratyna Winn.*
— Cubitus sans nervure brachiale . . . 6.
6. Ailes distinctement velues . . . . . 7.
— Ailes à pilosité microscopique, c'est-à-dire formée par des soies dressées et extrêmement courtes . . . . . . 8.
7. Crochets des tarses dentelés ; rameaux de la fourche sinueux . . . . . . *Metangela* Rbs.
— Crochets des tarses simples ; rameaux de la fourche non sinueux . . . . *Trichosia* Winn.

(*) Selon Schiner, les espèces du genre *Sciara* auraient des palpes composés de trois à quatre articles ; je ne connais aucune espèce de *Sciara* dont les palpes sont de plus de trois articles.

8. Crochets des tarses dentelés	*Odontonyx* Rbs.
— Crochets des tarses simples	9.
9. Thorax prolongé par dessus la tête . .	*Hybosciara* Rbs.
— Thorax non prolongé en avant. . . .	10.
10. Partie inférieure de la face prolongée en trompe; trois pelotes	*Rhynchosciara* Rbs.
— Partie inférieure de la face non prolongée; une ou trois pelotes	11.
11. Rameaux de la fourche fortement sinueux; antennes du mâle avec verticilles	*Zygoneura* Meig.
— Rameaux de la fourche non sinueux. .	12.
12. Antennes du mâle avec verticilles de poils	*Corynoptera* Winn.
— Antennes du mâle dépourvues de verticilles.	*Sciara* Meig.

Genre Peyerimhoffia n. g.

Yeux velus. Palpes formés par un article unique. Antennes de 16 articles velus et dépourvus de verticilles. Pattes à pilosité uniforme; cuisses non renflées; tibias antérieurs terminés par un éperon, c'est-à-dire par une épine forte et velue; les autres tibias terminés par deux éperons; crochets des tarses simples; pelote unique et très courte. Ailes du mâle à pilosité microscopique; les femelles connues sont aptères ou brachyptères.

Ce genre comprend les deux espèces suivantes :

P. brachyptera n. sp. ♀ ♂ (Planche, fig. 8). Corps brun; pattes d'un brun clair; balanciers blanchâtres; chez le mâle, le dernier segment abdominal est blanchâtre sur le dessus, avant-dernier segment sur le dessus et le dessous, ainsi que le dessous du dernier segment blancs avec une large bande transversale brune. Article des palpes du mâle ellipsoïdal, presque deux fois aussi long que gros, terminé par une verrue noirâtre et munie de soies grosses et courtes (Planche, fig. 1); chez la femelle, il est plus gros, rétréci à sa base, sans verrue, avec sa plus grande largeur au bout (Planche, fig. 6). Bouche peu proéminente, plus courte que les palpes. Chez le mâle, les articles du funicule cylin-

driques, augmentant insensiblement en longueur, les premiers deux fois aussi longs que gros, et à col presque nul, les derniers trois fois aussi longs que gros, à col égalant en longueur la moitié de leur largeur; article terminal arrondi au bout. Chez la femelle, les articles du funicule sont plus courts et environ d'égale longueur, à l'exception du premier qui est deux fois aussi long que gros, tandis que les suivants ne sont qu'une fois et demie aussi longs que gros; col n'atteignant pas en longueur la moitié de leur grosseur. Ailes du mâle (fig. 1) bien développées; extrémité de la 1re nervure située vis-à-vis de celle de la 6e; extrémité du

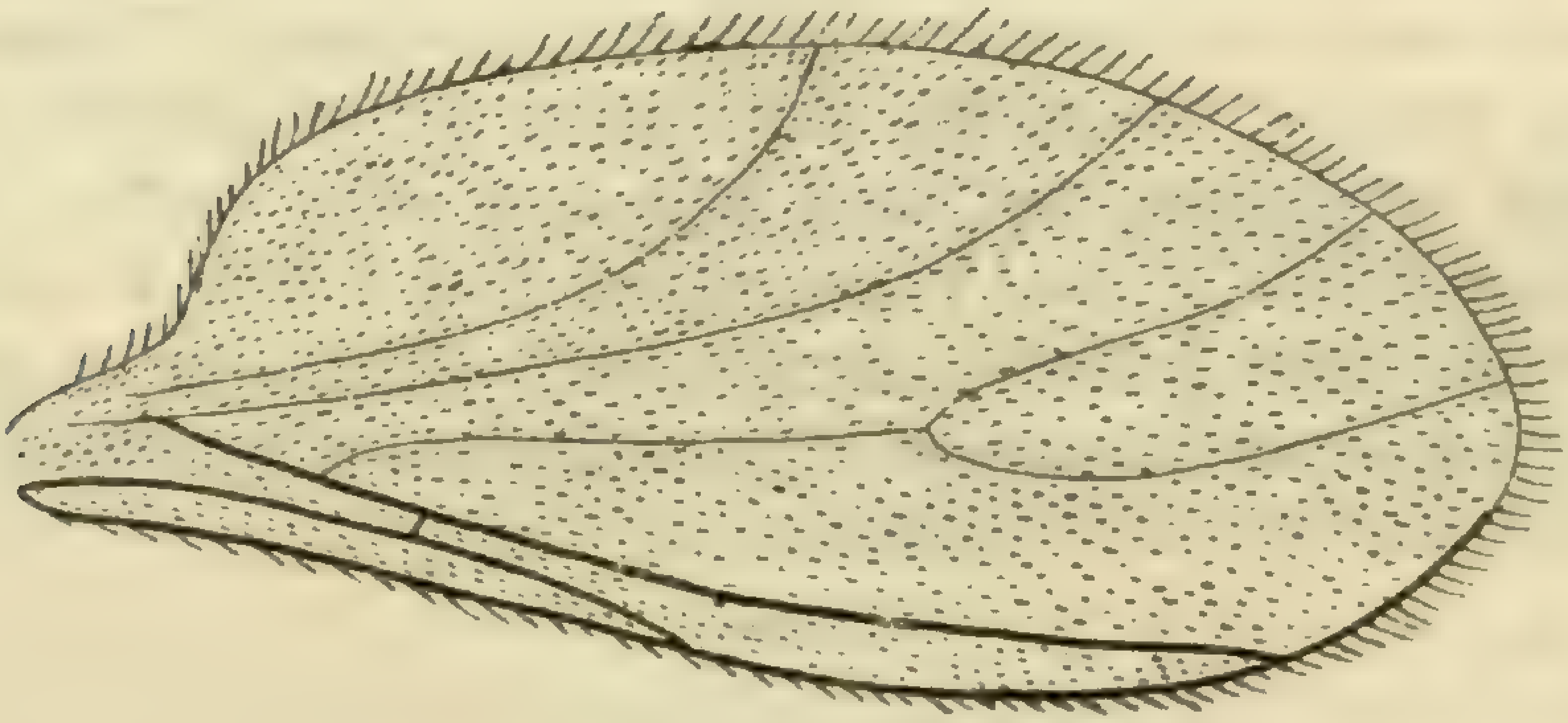

FIG. 1.

cubitus située vis-à-vis de celle du rameau inférieur de la fourche; l'extrémité de la nervure costale est deux fois plus rapprochée du rameau supérieur de la fourche que du cubitus; tige de la nervure discoïdale ou 4e nervure distinctement plus longue que la fourche, ayant son origine en avant de la base du cubitus; bord inférieur subitement rétréci à sa base. Chez la femelle, les ailes sont très étroites et n'atteignent que la longueur de la tête et du thorax réunis; elles sont couvertes de poils microscopiques et on n'y découvre qu'une seule nervure peu délimitée et munie de spinules. Tibias antérieurs presque deux fois aussi longs que le métatarse; celui-ci un peu plus long que les deux suivants réunis; les quatre derniers articles sont 4, 3 1/2, 3 et presque 3 fois aussi longs que gros. Aux pattes postérieures, du moins chez la femelle, le métatarse n'atteint pas la moitié du tibia et est deux fois aussi long que l'article suivant; celui-ci égal au 5e, c'est-à-dire 2-3 fois aussi long que gros, le 3e et 4e sont à peine une fois et demie aussi longs

que gros. Ongle de la pince en massue, rétréci à sa base, armé à son extrémité d'une épine longue et arquée. Taille ♂ : 2, 5 millim.; ♀ : 3 millim.

Capturé accouplé sous une pierre le 8 mai 1901 à Archail.

P. aptera n. sp. ♀ (Planche, fig. 3). D'un blanc jaunâtre; antennes, thorax, larges bandes sur le dessus de l'abdomen et une large tache échancrée sur le dessous des segments bruns. Palpes à article unique, gros, largement arrondi au bout, rétréci à sa base, plus court que les parties buccales (Planche, fig. 2). Antennes ayant le tiers de la longueur du corps; articles du funicule cylindriques, un peu plus de deux fois aussi longs que gros, à col presque aussi long qu'ils sont gros; les deux premiers non soudés. Thorax étroit et petit. Ailes et balanciers nuls. Aux pattes postérieures, le métatarse est quatre fois aussi long que gros, l'article suivant deux fois et demie, le 3e et le 5e presque deux fois, le 4e seulement une fois et demie. Lamelles terminales de l'oviducte un peu plus de deux fois aussi longues que larges. Taille : 3.25 millim.

Capturé aux environs de Digne en 1900.

Dasysciara n. g.

Yeux velus. Palpes composés de deux articles courts. Antennes de 16 articles velus et dépourvus de verticilles. Pattes à pilosité uniforme, entremêlée de spinules sur le dessous des tarses; cuisses renflées au milieu où elles sont deux fois aussi grosses qne les tibias; extrémité des tibias antérieurs armée d'un éperon velu et de quatre spinules brunes disposées en série transversale et formant un peigne peu apparent; les autres tibias avec deux éperons velus; pelotte unique et presque aussi longue que les crochets qui sont simples.

D. pedestris n. sp. ♀. Corps brun ; dessous de l'abdomen de couleur claire. Palpes plus courts que la bouche; premier article à peine plus long que gros, le second faiblement aminci vers l'extrémité et presque deux fois aussi long que gros. Antennes aussi longues que la tête et le thorax réunis. Le premier et le dernier article du funicule à peu près d'égale longueur, deux fois aussi longs que gros, les autres à peine plus longs que gros, avec un col dont la longueur égale la moitié de leur largeur. Thorax

étroit et petit, pas plus large que la tête, mais deux fois aussi long, égalant à peine le tiers de l'abdomen qui est aussi beaucoup plus large. Métatarse des pattes antérieures aussi long que les trois articles suivants réunis, à nombreuses spinules sur le dessous; les quatre derniers articles munis de deux spinules près de leur extrémité, à peu près trois fois aussi longs que gros, à l'exception de l'avant-dernier qui est deux fois aussi long que gros. Ailes n'atteignant que la moitié de la longueur du thorax, étroites et pointues, avec une nervure irrégulière en leur milieu. Balanciers bien développés, presque aussi longs que les ailes, à massue deux à trois fois aussi longue que grosse. Taille : 2 millim. Environs de Digne.

Sciara Meig.

Membranigera n. sp. ♂ ♀. La femelle de cette espèce est brachyptère. L'unique exemplaire a été égaré avant que je n'aie eu le temps de l'examiner plus attentivement.

Le mâle est noir avec les hanches et les pattes brunes. Yeux sans poils entre les facettes, caractère par lequel cette espèce se distingue de tous les *Sciara* que j'ai examinés jusqu'ici. Palpes de trois articles, dont le premier est ellipsoïdal, aussi long que les deux suivants réunis et presque deux fois aussi gros que le second; celui-ci un peu plus long que gros; le dernier encore plus étroit et à peine plus long que gros. Antennes de la longueur du corps; articles du funicule cylindriques; le premier trois fois aussi long que gros, les suivants un peu plus de deux fois, les derniers deux fois et demie, le dernier quatre fois; col des articles inférieurs atteignant en longueur le tiers de leur grosseur, celui des articles terminaux à peu près les trois quarts; dernier article sans appendice. Pattes à cuisses renflées au milieu, deux fois aussi grosses que les tibias; extrémité des tibias antérieurs élargie, avec un éperon velu, et une rangée transversale de huit spinules brunes formant peigne; celle des autres tibias avec deux éperons, mais sans peigne; métatarse des pattes antérieures aussi long que les trois articles suivants, à dessous muni de courtes spinules éparses; les quatre suivants avec deux spinules en dessous de leur extrémité; le 2e quatre fois aussi long que gros, le 3e un peu plus court,

le 4e deux fois aussi long que gros et le dernier trois fois. Crochets un peu plus longs que l'unique pelote. Ailes (fig. 2) bien développées, à pilosité microscopique; l'extrémité de la 1re nervure correspond au milieu de la 6e; celle du cubitus correspond à celle de la 5e; interruption de la nervure costale à peine plus rapprochée

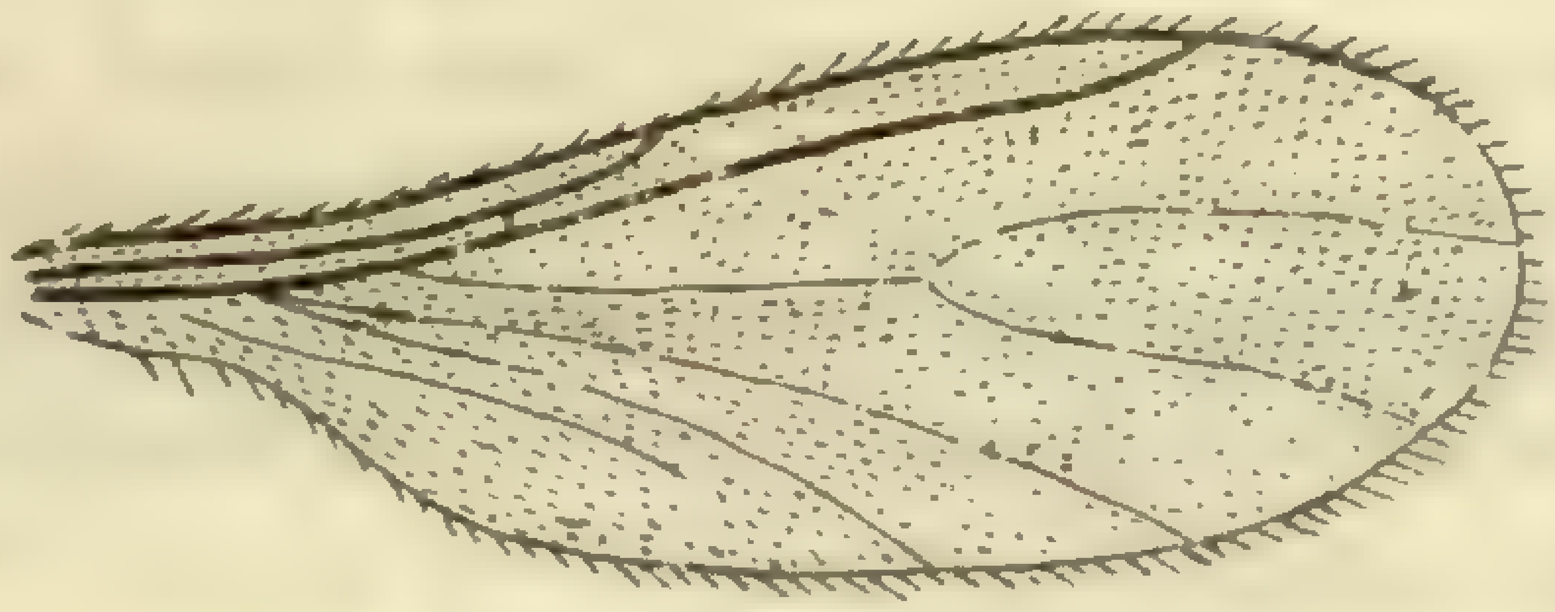

Fig. 2.

du cubitus que du rameau supérieur de la fourche; tige de la 4e nervure égalant la fourche, insérée bien en avant de la base du cubitus; nervure transversale droite, semblant être la continuation du cubitus et un peu plus courte que la portion apicale de la 1re; la 5e et la 6e se réunissent à leur base; bord inférieur de l'aile rétréci insensiblement à sa base. Balanciers (fig. 3) à pédicelle

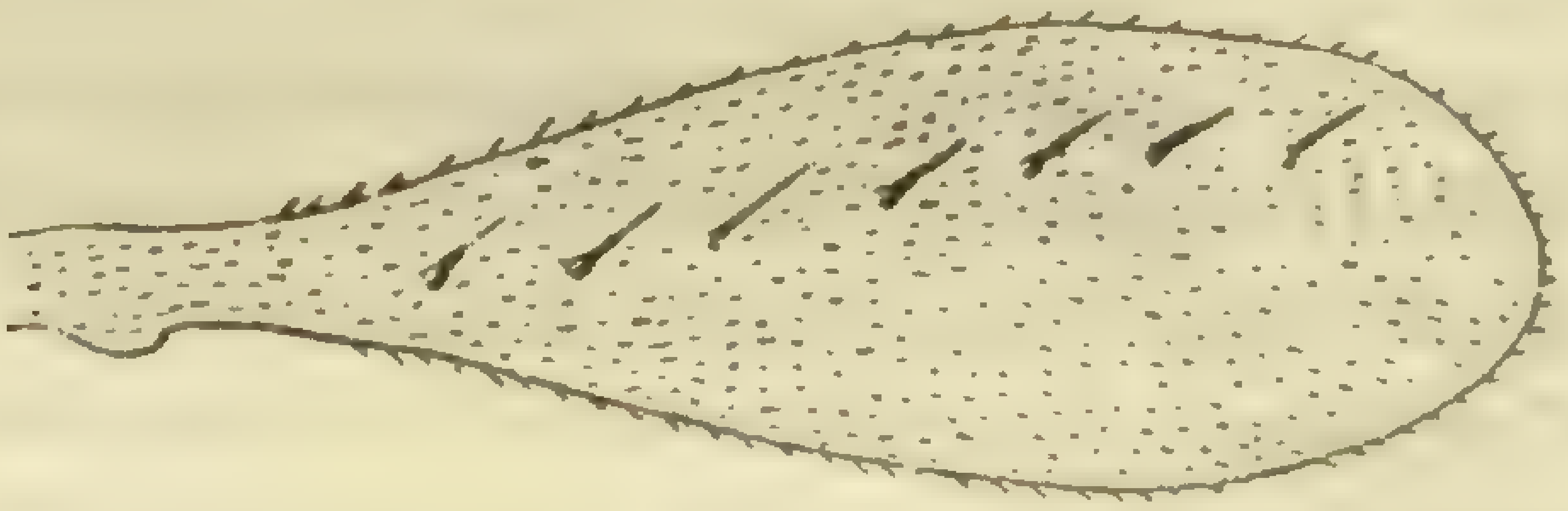

Fig. 3.

petit; massue lancéolée, aplatie en forme de membrane, couverte d'une pilosité microscopique comme les ailes, avec une nervure longitudinale et médiane indiquée par une série de spinules; ils semblent donc former une seconde paire d'ailes, mais très petites. Ongle de la pince gros, ellipsoïdal, armé de trois longs crochets (Planche, fig. 9). Taille : 1.5 millim.

Capturé sur une pierre dans la forêt de Siron, près de Digne, le 25 mai 1901.

Mycosciara n. g.

Yeux velus. Palpes composés d'un article court. Antennes de 16 articles velus et dépourvus de verticilles. Tibias antérieurs sans peigne, mais avec un éperon velu. Empodium atrophié, sans pelote; deux pulvilles composés d'un filet jaunâtre qui se ramifie sur le dessous en forme de corne de cerf; crochets simples (Planche, fig. 5).

M. brevipalpis n. sp. ♂. Corps d'un brun clair; antennes, dessus et dessous du thorax, larges bandes sur le dessus et le dessous de l'abdomen, ainsi que la pince d'un brun sombre. Article du palpe courbé, aminci à la base, deux fois aussi long que gros (Planche, fig. 7). Premier article du funicule non soudé au second, aminci à la base, deux fois et demie aussi long que gros, sans le col qui atteint un peu plus du tiers de sa longueur; articles suivants cylindriques, deux fois aussi longs que gros, avec un col égalant la moitié de leur longueur; tous à poils disposés sans ordre et de moitié plus longs que l'épaisseur des articles. Pattes brièvement velues. Fémurs antérieurs un peu plus courts que les tibias, ceux-ci un peu plus courts que les tarses; métatarse antérieur 3 à 4 fois aussi long que l'éperon du tibia, égal aux articles 2 et 3 réunis; second article quatre fois aussi long que gros, et d'un cinquième plus long que le troisième; quatrième article trois fois aussi long que gros, égal au cinquième. Ailes (Planche. fig .4) ciliées, à surface paraissant ponctuée, c'est-à-dire avec une pilosité microscopique; nervation comme l'indique la figure. Pince anale avec l'ongle ou article terminal gros, ellipsoïdal, armé à son extrémité d'une dent arquée aussi longue que l'épaisseur de l'ongle; lamelle supérieure profondément bilobée. Taille ♂ : 1,5 millimètre.

Mœurs et patrie. Obtenu deux exemplaires d'un champignon (*Boletus bovinus*). Environs de Bitche.

EXPLICATION DE LA PLANCHE

(Toutes les figures agrandies)

1. Un des palpes et bouche de *Peyerimhoffia brachyptera* n. sp. ♂ vus d'en haut.
2. Bouche et palpe de *Peyerimhoffia aptera* n. sp. ♀ vus de profil.
3. *Peyerimhoffia aptera* n. sp. ♀.
4. Aile de *Mycosciara brevipalpis* n. sp. ♂.
5. Article terminal des tarses antérieurs du même.
6. Bouche et palpe de *Peyerimhoffia brachyptera* n. sp. ♀ vus de profil.
7. Palpe de *Mycosciara brevipalpis* n. sp. ♂.
8. *Peyerimhoffia brachyptera* n. sp. ♀.
9. Article terminal de la pince anale de *Sciara membranigera* n. sp. ♂.

1
2
3
4
5
6
7
8
9

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins; à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVI, 1877 à 1902.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . . . .fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, commencée en 1902.

Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, se vendent fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . .fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . .fr. **7 50**

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Notice sur son but, son organisation et ses travaux. Brochure de 32 pages, in-18, distribuée gratuitement à ceux qui en font la demande au Secrétariat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ÉD. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.
Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

SUR LA BRÈCHE DE BACHANT

ET

LES FORMATIONS ANALOGUES

PAR

M. le Chanoine BOURGEAT

Il existe dans le Carbonifère marin du Hainaut et spécialement à Bachant, non loin de la gare d'Aulnoye, une brèche calcaire dont l'origine préoccupe depuis longtemps les géologues. Signalée pour la première fois en 1853 par Delanoue lors de la réunion de la *Société Géologique de France* à Berlaimont, elle a été successivement l'objet de publications de la part de MM. Gosselet, Dupont, Briart, Cayeux et de Dorlodot. Nous-même en avons parlé incidemment à propos des marnes à spongiaires du Jura.

C'est une formation qui consiste en calcaires anguleux réunis par une pâte argilo-calcaire plus ou moins rouge.

La première explication que l'on donna de son origine fut celle dont on abusait si fréquemment au début de la géologie : l'action des agents internes.

Comme dans une carrière, montrée par Delanoue, on apercevait une grande fissure verticale remplie d'une argile rouge analogue à celle que présente la brèche, on admit que cette argile était venue de l'intérieur de la terre et que c'était par son action sur le calcaire que la brèche était née. La couleur rouge se retrouvant dans trois dépôts géologiques supérieurs au Carbonifère, à savoir le Permien, le Trias et l'Aachénien, l'éjaculation des argiles fut pour les uns d'âge permien, pour les autres d'âge triasique, pour les autres enfin d'âge aachénien.

Mais cette hypothèse d'une éjaculation argileuse ne pouvait s'accorder avec tous les faits constatés. D'abord il n'était pas facile d'en assigner le lieu d'origine; puis il était plus difficile encore d'expliquer comment, sous l'action de cette matière éruptive et chaude, le calcaire s'était conservé sans décomposition; enfin il n'y avait pas possibilité pour les géologues qui l'admettaient, de dire pourquoi la brèche en question se trouve presque partout, ainsi que l'a fait remarquer M. Dupont, dans les calcaires à *Productus giganteus.* Bien intelligente en effet aurait été une éruption postérieure au Carbonifère qui, entre tant de calcaires, aurait choisi de préférence, pour s'y loger, les calcaires contenant ce *Productus.*

La seconde explication est celle qui fut donnée par d'Omalius d'Halloy et qui a été renouvelée sous une autre forme par M. Briart dans le tome XXI des Annales de la Société Géologique de Belgique. Elle consiste à penser, avec d'Omalius, que la brèche est " le résultat de fendillement sur place du calcaire, fendillement occasionné par les phénomènes qui ont disloqué et plissé les couches ", ou avec M. Briart, qu'elle est due à des glissements des assises. Son origine, dans cette manière de voir, serait purement dynamique; si les couches n'avaient subi ni plissements ni glissements la brèche n'existerait pas. Le malheur pour cette explication dynamique, comme pour la précédente, c'est encore que la brèche se trouve au niveau des *Productus giganteus.* En était-il donc au moment de ces phénomènes dynamiques comme dans certaines sociétés mal organisées? Était-ce aux couches à *Productus giganteus* à supporter à elles seules toutes les charges de la pression ou du glissement?

Une troisième explication a été donnée avec tout l'élan et toute la conviction de la jeunesse en 1894, dans les Annales de la Société Géologique du Nord par M. Cayeux, un des anciens élèves de M. Gosselet. Après avoir combattu (*) d'une façon magistrale l'opinion que j'avais énoncée en 1892, M. Cayeux, arguant de la couleur différente des blocs de la brèche et de la forme arrondie de quelques-uns d'entre eux qui les fait ressembler à de véritables

---

(*) Annales de la Société Géologique du Nord, année 1894, t. XXII.

galets, affirme que la brèche est une sorte de *brèche poudingue* qui provient d'une érosion et qui témoigne d'une émersion passagère du sol durant le dépôt du Carbonifère du Hainaut. Je ne puis m'empêcher de reconnaître que cette explication si simple s'accommode à merveille avec la théorie des lacunes admises par MM. Dupont et Gosselet dans l'ensemble du Carbonifère.

Faites sortir le sol du fond de la mer pendant que les terrains qui contiennent un de vos *fossiles caractéristiques* se déposent ailleurs, et vous expliquez pourquoi les terrains correspondant à ce fossile font défaut. La lacune n'est plus un mystère.

Elle n'est plus un mystère si vraiment elle apparaît au même moment que la brèche et si, quelque part, on peut trouver l'origine des blocs roulés ou tout au moins des traces de ravinement.

En est-il réellement ainsi ? Hélas ! non. Ce n'est pas au niveau où elle serait nécessaire pour expliquer une lacune que la brèche se montre. On ne la remarque pas aux points où semblent manquer les assises d'Avesnelles et d'Etrœungt ; M. Dupont comme M. Gosselet avouent que " l'on ne connaît pas (*) un ensemble particulier de roches clastiques qui viennent, là où le calcaire de la Marlière n'existe pas, s'intercaler entre les roches encrinitiques inférieures à ce calcaire et l'assise de Bachant qui lui est supérieure „.

Ensuite M. Gosselet, qui a si bien étudié le Carbonifère, reconnaît qu'on n'a pas encore observé de traces de ravinement entre les brèches et les couches sous-jacentes (**).

Enfin M. Cayeux lui-même, après avoir affirmé que " quand on connaît le détail des couches du Carbonifère de la région on peut remonter à l'horizon qui a fourni telle catégorie des éléments de la brèche „ avoue qu'il n'a jamais pu trouver le moindre document au sujet de certains galets de schistes rouges foncés de la brèche de Dourlers. Pas plus que les géologues qui l'ont précédé, il ne peut dire quelle est réellement la région du Carbonifère qui a été dénudée pour donner la brèche.

Une quatrième explication est celle que j'avais émise en 1892 et qui a été si victorieusement rejetée par M. Cayeux. La voici telle

(*) *L'Ardenne*, p. 664.
(**) *Ibid.*, p. 662.

que je la formulais et telle que M. Cayeux l'a reproduite au commencement de sa note. " J'ai constaté que l'on observe aussi la trame d'organismes inférieurs dans beaucoup de fragments des brèches de Bachant qui ont tant préoccupé les géologues et qui étaient pour eux l'indice d'une émersion du sol durant le dépôt du Carbonifère marin du Nord. „ J'ai donc cru et écrit, après avoir observé un certain nombre de fragments de la brèche, qu'elle est en grande partie d'origine organique. C'était à mes yeux une formation construite analogue à tant d'autres formations zoogènes qu'on retrouve dans la série des terrains.

Enfin une cinquième explication est celle que j'appellerai l'explication mixte. C'est celle qui a été adoptée par notre éminent confrère, M. le chanoine de Dorlodot, dans le travail qu'il inséra en 1895 aux ANNALES DE LA SOCIÉTÉ GÉOLOGIQUE DU NORD (*).

" L'origine de la grande brèche, dit-il, est encore très obscure. Comme M. Gosselet, nous pensons que la constance de la brèche à un niveau déterminé ne peut se concilier avec l'hypothèse de l'origine dynamique : néanmoins il faut bien avouer que dans certains cas particuliers cette hypothèse rendrait mieux compte des relations de la brèche avec les couches stratifiées qui l'avoisinent. Ne pourrait-on admettre que dans certains cas la brèche est d'origine à la fois stratigraphique et dynamique? On comprend en effet que les cassures et les glissements de divers genres et notamment ceux que M. Briart désigne sous le nom de mouvements parallèles se produisent de préférence au contact d'une roche massive et de couches stratifiées : ces deux sortes de formations présentant une résistance inégale à l'effort de plissement. L'origine stratigraphique de la brèche nous rendrait compte de sa constance à un niveau déterminé et de son allure concordante dans tous les plis de quelque importance avec les couches stratifiées... Peut-être enfin pour expliquer certaines allures, et en particulier celles que nous avons observées à Bouffioulx, faudrait-il rattacher jusqu'à un certain point l'origine de la brèche *à l'existence des récifs coralliens*. Il est incontestable en effet que les relations observées entre la brèche et les couches stratifiées *ressemblent* beaucoup à celles

(*) T. XXIII, pp. 289 et suiv.

qui se présentent entre *les récifs et les dépôts stratifiés de Waulsort*... Or, non seulement on constate la présence de *stromatoporoïdes* dans la brèche, mais aussi nous croyons avoir reconnu au niveau de la brèche de véritables *calcaires construits intimement reliés à la brèche elle-même.* „

Ainsi cinq opinions ont été émises : celle de l'éjaculation de l'argile qui est maintenant abandonnée, celle de l'érosion que M. Cayeux trouve si simple, celle des fractures par glissement ou par compression formulée par d'Omalius, celle de l'origine récifale que j'ai soutenue, celle enfin de l'origine à la fois récifale et dynamique admise par M. de Dorlodot.

Sans insister beaucoup sur mon opinion, je voudrais faire connaître les motifs qui me l'ont fait admettre et qui me déterminent à la soutenir toujours, pour la brèche de Bachant du moins, que j'ai visitée plusieurs fois.

1° La brèche, ainsi que tout le monde l'admet avec M. Dupont, est presque exclusivement cantonnée dans les assises qui contiennent le *Productus giganteus*. Or, pour quiconque a étudié les assises carbonifères de la Belgique et du Nord de la France, il ressort que le *Productus giganteus* est un des fossiles les plus communs au voisinage des formations construites. C'est ainsi qu'il se présente à Visé et dans le Boulonnais. Ces assises à *Productus*, celles de Visé surtout, passent insensiblement, comme on peut le voir au ravin de Souvré, à des massifs riches en stromatopores et autres organismes inférieurs.

2° Dans les carrières de Bachant la brèche se lie tellement aux assises normales qu'il est impossible de dire où elle commence et où celles-ci finissent. A peine aperçoit-on d'abord un léger fendillement dans des couches d'apparence homogène; puis peu à peu le fendillement s'accuse davantage, la masse fendillée se renfle, la stratification s'efface et après des variations plus ou moins nombreuses d'épaisseur et de physionomie de la brèche, on la voit se fondre plus loin dans des assises non fragmentées. Mais ce n'est pas seulement à Bachant que cette particularité se présente, M. Gosselet (*) l'a fait remarquer en beaucoup d'autres points et

(*) *L'Ardenne*, p. 661.

spécialement près de Saint-Rémy Chaussée et de Landelies. M. de Dorlodot, dans la citation qne nous venons de faire, dit positivement que les relations de la brèche avec les couches stratifiées ressemblent beaucoup à celles qui se présentent entre les récifs et les dépôts stratifiés du facies de Waulsort. Or, dans le facies de Waulsort, d'après le même auteur, « les masses construites forment de grandes lentilles généralement aplaties dans le sens vertical et régulièrement interstratifiées entre les couches » (*).

3° Lorsqu'on examine les blocs de la brèche après les avoir traités, non pas par les acides azotique ou chlorhydrique, mais par l'acide acétique étendu, on constate que certains d'entre eux sont manifestement formés de stromatopores, d'autres de polypiers branchus, d'autres d'une masse inorganique au sein de laquelle rampe et se ramifie une matière franchement organique, d'autres enfin d'une matière amorphe sans traces d'organisation. Ce sont les gris qui généralement laissent voir des Stromatopores, les blancs ou bruns qui sont formés d'autres Polypiers, les noirs qui sont moitié organiques, moitié inorganiques : les autres, en petit nombre du reste, ont une couleur très variable. Les traces organiques des calcaires noirs proviennent-elles d'Éponges ou d'autres organismes inférieurs ? Il serait difficile de le dire. A voir les analogies qu'elles offrent avec certains Spongiaires des assises secondaires du Jura, on serait tenté de les rapporter aux Éponges. C'est le même mode d'enchevêtrement avec la matière inorganique, la même tendance à la cristallisation sur certains points, à peu près la même couleur de la trame. Mais la trame en détail n'offre pas la régularité de celle des Éponges et se rapproche beaucoup plus de celle des Algues calcaires du groupe des *Lithothamnium*. Cela tient-il à ce que la trame est telle ou bien de ce qu'elle a été oblitérée ? Je n'ose me prononcer sur ce point ; mais, malgré les autres analogies, j'inclinerais plus volontiers du côté des *Lithothamnium* que du côté des Spongiaires.

Ainsi, voilà une formation qui est associée toujours aux mêmes fossiles, qui se fait remarquer par tous les caractères stratigra-

---

(*) Annales, t. XXIII, p. 232.

phiques des formations d'origine organique, qui présente dans la majeure partie de ses éléments une structure organique visible, dont l'existence, de l'aveu même des partisans de l'origine détritique, ne correspond à aucune trace connue de ravinement ; si elle n'est pas elle-même d'origine organique, il faut rejeter de cette catégorie toutes les formations organiques connues.

Mais pourquoi cette variété de couleur dans les blocs, pourquoi l'argile rouge qui les empâte, pourquoi enfin la forme arrondie de quelques-uns d'entre eux ? Pour répondre à la première question, nous n'avons qu'à demander pourquoi parmi les récifs construits de l'Ardenne il en est qui sont plutôt bleus comme ceux du Givétien, d'autres plutôt rouges, comme ceux du Frasnien, d'autres plutôt violacés comme ceux du Waulsortien. Quand on a vu des récifs, ces questions de couleur ne sont vraiment pas une objection sérieuse : tels organismes donnent des calcaires blancs, tels autres des calcaires rouges ou des calcaires bleus ou des calcaires violets. Il est vrai que l'on ne sait pas encore pourquoi les roses sont roses et les lis blancs ; mais cela n'empêche pas les lis et les roses d'exister. Autant vaudrait nier l'existence des hommes parce qu'il y en a de blancs et de noirs.

Pour répondre à la seconde, il n'y a qu'à demander aussi pourquoi certaines formations manifestement construites, telles que les formations à Spongiaires de l'Oxfordien et du Rauracien du Jura, contiennent aussi de l'argile rouge ? La présence de l'argile n'exclut nullement la présence de ces organismes. On peut supposer : ou bien que cette argile provient de marnes ferrugineuses comprises entre les organismes que les eaux d'infiltration auraient dépouillées de leur calcaire, ou bien que c'est un produit d'infiltration des eaux superficielles. Nous avouons que, si la seconde explication est plus conforme aux faits lorsqu'il s'agit de la silicification ou de la dolomitisation si communes chez les polypiers, la première paraît beaucoup plus simple lorsqu'il s'agit des gangues argileuses. C'est elle aussi qui donne la réponse la plus complète à la troisième objection, celle qui est basée sur les blocs arrondis.

Ces blocs en effet ne seraient pas autre chose que les témoins et les résidus d'un phénomène de dissolution plus accusé que celui qui a isolé les blocs anguleux. Les blocs anguleux, organiques ou

non, dans les points où les eaux d'infiltration ont eu un plus facile accès ont été peu à peu rongés par leur surface en contact avec les fentes. Leurs aspérités se sont effacées progressivement et, comme le phénomène a été plus complet que dans les simples brèches, le résidu argileux y a été plus abondant. Dès lors le *Banc d'Or,* ce poudingue à blocs multicolores, entourés d'une masse calcaréo-argileuse rougeâtre, ne serait pas autre chose lui-même que la brèche dans un état de dissolution plus avancé. Il est à remarquer que pour le Banc d'Or de Bachant en particulier les couches qui l'encadrent sont dans une position voisine de la verticale, que lui-même a cette allure, c'est-à-dire qu'il est dans les conditions les plus favorables pour permettre l'entrée des eaux et subir une dissolution plus grande. Ce Banc d'Or, du reste, laisse voir des traces d'organisation comme la brèche ; et, bien que nous soyons d'un autre avis que M. Cayeux sur son origine, au moins pour le Banc d'Or de Bachant que nous avons le plus étudié, nous sommes pleinement du sien, lorsqu'il s'agit de le rattacher à la brèche.

Le titre de cette note indique notre intention de parler d'autres formations analogues à la brèche.

Le *Banc d'Or* dont il vient d'être question, est assurément la première et nous voyons comment elle s'y rattache, mais il n'est assurément pas la seule.

Nous pensons sans pouvoir en donner une preuve convaincante qu'il faut y rapporter les marbres Henriette et Napoléon du Boulonnais. Leur disposition en bancs épais, leur stratification souvant mal accusée, les nodules bruns à contours irréguliers qu'y révèle le polissage, les zones successives et le réticulum qu'un lavage à l'acide y met en lumière, tout cela me porte fortement à croire qu'ils ont plus d'une parenté avec les brèches. Cette parenté paraît plus complète encore lorsqu'on remarque que bien souvent le centre des nodules, comme le centre des spongiaires du Jurassique, comme le centre des trames organiques dans les blocs noirs de la brèche, est passé à l'état de carbonate cristallin.

Nous pensons aussi que c'est à des formations semblables à celles qui ont engendré la brèche qu'il faut rapporter certaines assises de la pierre de Soignies, d'apparence amorphe, lorsqu'elles

n'ont pas subi de frottement, mais qui laissent voir un réticulum dû à des êtres organisés lorsqu'elles ont été un peu polies sous une action mécanique. Le vestibule de la Faculté catholique des sciences de Lille présente plusieurs dalles de cette nature.

C'est bien assurément à des organismes plus ou moins parents de ceux de la brèche de Bachant que se rattachent les brèches à ramifications tortueuses qui sont si fréquentes dans le Jurassique supérieur des monts Jura. Nous les avions signalés en même temps que ceux de la brèche de Bachant. Notre découverte a été confirmée par M. Riche (*), mais nous ne saurions partager l'avis du savant professeur de Lyon lorsqu'il les rapporte tous à de grands Bryozoaires (**). Nous ne prétendons pas que les Bryozoaires y soient étrangers, mais nous pensons que c'est à d'autres organismes qu'il faut attribuer la majeure partie des ramifications. La trame n'en est pas en effet généralement aussi régulière que celle des *Bryozoaires* (***).

Est-ce à des organismes aussi qu'il conviendrait de rattacher les grandes brèches du Chablais, dont on s'est tant occupé dans ces dernières années et dont on est allé chercher l'origine à 80 kilomètres de distance dans la région du lac de Garde en expliquant leur venue par un phénomène de glissement gigantesque? Nous ne le savons et nous serions bien téméraire de le soutenir, en ce moment surtout où la théorie des grands chevauchements bat son plein. Il nous est impossible toutefois de ne pas noter d'une part, que ces grands chevauchements ou charriages si sensibles dans les Préalpes voisines du Léman, ne semblent presque pas avoir affecté le Jura, et de l'autre qu'en 1901, au moment de la réunion de la Société géologique de France dans le Chablais, on reconnut sur l'observation de M. Schmitt " que la brèche est en réalité constituée par une série de calcaires plus ou moins coralligènes ". Des Polypiers y sont visibles mais n'y aurait-il pas aussi là quelques organismes analogues à ceux de la brèche de Bachant, et dont la texture aurait été plus ou moins oblitérée?

Sans doute, dans la plupart de ces brèches on ne découvre pas

---

(*) Bulletin du Service de la Carte Géologique de France, 1899, p. 124.

(**) Ibid.

(***) Ibid., année 1901, p. 107.

toutes les formes organiques des récifs corralliens; mais la vie même dans ces récifs ne s'est pas toujours montrée sous les mêmes formes et de la même façon. Qui aurait dit avant la découverte des massifs construits du Trias alpin que d'humbles algues calcaires, telles que les Gyroporelles, pouvaient édifier des récifs? Qui aurait pensé avant l'étude des Rudistes dans les mers du Midi que les Mollusques du groupe des Dicéras pourraient se transformer assez pour remplacer au Crétacé, partiellement du moins, les polypiers au voisinage desquels nous les voyons vivre au temps du Jurassique? Qui, à la vue des formations coralligènes du Secondaire si riches en Nérinées, ne s'attendrait à trouver un grand nombre de Gastropodes analogues dans les formations coralligènes du Primaire? Qui ne croirait, en voyant le Corallien secondaire avec ses calcaires oolithiques et les calcaires à Eutroques qui lui servent de soubassement, que partout où il y a formation coralligène il y a aussi des Encrines et des calcaires oolithiques? Et cependant les formations coralligènes du Primaire reposent au Dévonien sur des schistes argileux; elles sont souvent envasées par l'argile et apparaissent relativement pauvres en *Gastropodes,* si l'on excepte quelques assises à Murchisonia. Les calcaires oolithiques ne s'y présentent pas, les Encrines et les Mollusques Bivalves à test résistant, tels que les *Megalodon* et les *Stringocephales* ne commencent qu'à s'y montrer. Au Carbonifère nous voyons les oolithes apparaître, les *Encrines* se multiplier sans que les *Polypiers* constructeurs aient notablement changé et sans que les *Gastropodes* et les Bivalves à test résistant se soient multipliés.

Au Trias ce sont ces Bivalves à test épais qui évoluent sous la forme de Mégalodon, les Polypiers constructeurs changent aussi d'aspect; et, au travail des Polypiers s'ajoute celui des Algues. Au Jurassique les Polypiers varient peu mais c'est une abondance énorme de *Nérinées* et de *Diceras.* Au Crétacé les *Diceras* prennent le pas : les Nérinées atteignent une taille gigantesque, mais ces deux groupes sont au maximum de leur développement. Les *Nérinées* vont disparaître à la fin du Secondaire et le groupe des *Diceras* ne sera plus guère représenté que par les Chamas durant le Tertiaire.

Ainsi, dans cette succession de formations construites, c'est à une époque les *Polypiers* d'un groupe, à une autre époque les *Polypiers*

d'un autre groupe qui dominent. Tantôt ils sont presque seuls pour édifier leurs curieuses constructions, tantôt ils sont aidés et parfois même remplacés par les *Algues marines*, les *Spongiaires* et les *Rudistes*. Au Primaire c'est sur un fond vaseux qu'ils élèvent le plus souvent leurs récifs, mais déjà à l'époque du Carbonifère ils en assoient la base sur une plate-forme calcaire riche en Encrines. Ainsi font-ils aussi pendant le Secondaire jusque vers la fin du Crétacé, époque à laquelle les *Encrines* s'effacent et sont, dans une certaine mesure du moins, remplacées par les *Bryozoaires*.

Relativement rares près des récifs du Primaire, les *Bivalves* à coquille épaisse s'y multiplient au temps du Secondaire, deviennent constructeurs à leur tour, puis s'évanouissent presque complètement.

Un peu plus précoces près des mêmes récifs, les *Gastropodes* résistants attendent cependant plus longtemps pour offrir leur maximum de vitalité. Ce n'est qu'au Jurassique, après que les *Mégalodon* ont constitué de puissantes couches dans le Trias qu'ils atteignent leur apogée pour décroître rapidement.

Et malgré tous ces changements c'est toujours un récif qui se constitue. Ce sont toujours des nodules siliceux, qui se rencontrent dans son voisinage, ce sont presque toujours les mêmes formes de *Rynchonelles* qui s'y abritent presque toujours la même tendance du récif à la dolomitisation. Les animaux d'une époque ne cèdent la place à ceux d'une autre qu'après que ceux-ci ont vécu avec eux et ont fait en quelque sorte leur stage pour s'accommoder aux mêmes conditions de vie.

On a dit, d'une part, qu'on ne ramène pas les peuples vers le passé, et de l'autre, que l'histoire est un perpétuel renouveau. Ces paroles pourraient s'appliquer aussi bien aux phénomènes de la nature qu'au développement des peuples. Sous la main puissante de Dieu, tout se modifie, tout change dans le détail : les formes disparues ne reviennent pas, mais tout se renouvelle aussi pour répéter dans l'avenir l'histoire du passé.

RELATIONS GÉOLOGIQUES
DES
RÉGIONS STABLES ET INSTABLES
DU
NORD-OUEST DE L'EUROPE

PAR

le Comte F. de MONTESSUS de BALLORE

PREMIÈRE PARTIE

ILES BRITANNIQUES ET BRETAGNE

AVANT-PROPOS

Si l'on compare une carte géologique de l'Europe du N.-W. avec une carte géographique des mêmes territoires, on s'aperçoit bien vite que de petits massifs montagneux très morcelés de terrains primaires ou archéens sont séparés les uns des autres par des mers peu profondes ou par des pays plats ou relativement peu élevés, couverts de terrains plus récents, mésozoïques, tertiaires et quaternaires, dont il est facile de faire abstraction pour considérer les massifs précités comme les derniers fragments d'une vieille Europe nord-occidentale primaire, qu'auraient découpée des actions dynamiques extrêmement puissantes et prolongées pendant les époques géologiques ultérieures. Ces fragments sont

disséminés de la Galice aux Sudètes, de la Scandinavie à l'Irlande. Et ce n'est pas là une simple vue de l'esprit : toutes les découvertes géologiques modernes montrent que ces restes présentent un caractère commun, celui d'avoir été plissés à deux époques très reculées, les uns, ceux du nord (Monts scandinaves, Highlands d'Écosse, pays de Galles, Irlande) antérieurement au vieux grès rouge dévonien, les autres, ceux du sud (Bretagne et Vendée, massif central de la France, Galice, Ardenne, Erz-Gebirge et Bohême) à la fin de l'époque carboniférienne et même jusque pendant le trias. Dans les dépressions qui séparent les plissements en question, calédoniens d'une part, armoricains, hercyniens ou varisciques, comme on les appelle, d'autre part, ils se retrouvent cachés sous le substratum sédimentaire plus récent. Il y a plus, les actions de plissement, dont il s'agit, ne se sont pas éteintes avec l'époque de leur plus grande énergie, et en particulier pour ceux de la chaîne armoricaine, elles se sont continuées bien au delà à travers les âges géologiques, de façon à affecter suivant leur direction propre les sédiments postérieurs.

Il y a ainsi continuité géologique, sinon géographique entre les fragments de la vieille Europe paléozoïque du N.-W. qui, elle, n'est plus une entité hypothétique, mais revit sous forme de deux chaînes primaires inégalement anciennes, calédonienne et armoricaine, quoique bien déchues de leur antique altitude, probablement comparable à celle des Alpes, que la dénudation et l'érosion longtemps prolongée, ainsi que d'autres vicissitudes sans nombre ont réduites aux faibles proportions que nous leur voyons.

Il est donc parfaitement rationnel d'étudier ensemble tous ces fragments épars au point de vue de la recherche des relations qu'il peut y avoir entre l'histoire géologique de ces territoires et leur stabilité ou leur instabilité sismiques. Pour des raisons qu'il est inutile de développer ici, on se restreindra toutefois au triangle formé par la Bohême, la Bretagne et l'Écosse en en excluant au nord la Scandinavie, et au sud la Galice et le plateau central français, et en se bornant dans cette première partie aux Iles Britanniques et à la Bretagne.

Un abaissement de niveau de seulement 200 mètres de l'Océan ferait émerger sur un socle commun les Iles Britanniques et la Bretagne en avant de la Norvège et de l'Europe centrale. En effet,

la courbe bathymétrique de cette cote contourne à peu de distance le sud de la presqu'île scandinave, passe à égale distance des Shetlands et du Bremangerland, puis, prenant une direction S.E.-N.W., passe entre ces îles et les Feroer, longe les Hébrides et l'Irlande à quelques 50 kilomètres au large, et enfin se retourne à angle droit pour ficher vers l'embouchure de la Bidassoa, au fond du golfe de Gascogne. Les isobathes suivantes restent très rapprochées depuis le nord-ouest de l'Irlande jusqu'à ce dernier point. Le socle sous-marin ainsi défini est limité à l'ouest par une étroite dépression passant entre les bancs de Rockhall et le Vidal, fosse qui se continue vers le nord-est en diminuant de profondeur pour passer entre les Feroer et les Shetlands.

Les Iles Britanniques et la France ainsi supportées sur une même plate-forme sous-marine, à talus occidental roide, forment donc un ensemble géographique bien défini, et comme d'ailleurs le nord-ouest de la France, du Cotentin à la Vendée, présente exactement les mêmes caractères géologiques que le sud de l'Angleterre et de l'Irlande, il s'ensuit que le massif armoricain français forme avec l'Angleterre un tout géologiquement et géographiquement indivisible, et l'on voit bien maintenant pourquoi la Scandinavie et la Galice ont été exclues de ce travail.

C'est ce vaste territoire qu'il s'agit d'étudier ici en cherchant à faire ressortir les relations qui peuvent exister entre les phénomènes sismiques d'une part et les principaux accidents géologiques et géomorphogéniques d'autre part. On est ainsi conduit à étudier comparativement et simultanément les centres d'instabilité et l'histoire géologique de ces contrées.

La description sismique toute nue et purement schématique en a déjà été faite : pour les Iles Britanniques (QUART. J. GEOGR. SOC. OF LONDON, November 1896) et pour la France (ANN. DES MINES DE PARIS, septembre 1892). Depuis lors, les documents sismiques recueillis se sont beaucoup augmentés, surtout en ce qui concerne l'Angleterre à la suite des travaux de Ch. Davison. Les centres d'instabilité alors décrits sont mieux définis, quelques nouveaux ont apparu, mais, en fait, les cartes sismiques de cette époque n'ont pas changé de physionomie générale. Il faudra cependant reprendre *ab ovo* la description sismique de ces territoires, de façon à mettre en évidence les relations géologiques cherchées.

Toutefois on n'a pas la prétention dans ce travail de donner géologiquement raison de l'existence et de l'activité plus ou moins grande de chaque épicentre. D'abord un grand nombre d'entre eux ont été déterminés au moyen de documents insuffisants quant à l'extension réelle de chaque séisme, car le plus souvent les périmètres ébranlés sont incomplètement connus. La détermination des isoséistes étant fort grossière, celle du centre ne l'est guère moins. Ensuite la mise en lumière de toutes les relations géologiques possibles supposerait de la géologie de ces pays une connaissance que je n'ai point. C'est affaire aux sismologues nationaux à le tenter dans chaque cas particulier, voie dans laquelle s'est si brillamment lancé Davison pour l'Angleterre. On s'en tiendra ici aux traits généraux et aux groupes d'épicentres.

Fallait-il conserver les anciennes subdivisions sismiques volontairement déterminées par des conditions purement géographiques, de manière à ne rien préjuger quant à la répartition géologique de la stabilité ou de l'instabilité sismiques, ou bien les refaire à nouveau en se basant maintenant sur la constitution géologique? Les premières subdivisions ainsi dégagées de toute idée préconçue, et intentionnellement indépendantes de tout phénomène géologique, ont été à peu près conservées. De cette façon, les relations géologiques à découvrir et à exposer en auront plus de force et seront plus démonstratives. On se contentera dans cet ordre d'idées de diviser cette première partie du travail en trois chapitres correspondant aux trois traits géologiques les plus importants : les anciennes chaînes Calédonienne et Armoricaine (Hercynienne ou Variscique) et les plaines sédimentaires plus récentes de l'Angleterre orientale. Au point de vue purement géologique en effet, les Iles britanniques sont constituées à l'ouest et au nord par les roches archéennes ou paléozoïques, que les couches mésozoïques recouvrent en discordance dans la direction du sud-est, tandis que les formations tertiaires ou plus récentes encore n'occupent guère que les bassins de Londres et du Hampshire.

Les régions étudiées ici sont parmi les mieux connues à la surface du globe au point de vue géologique. Quant aux tremblements de terre, s'il n'y existe pas encore de réseau d'observations macro-sismiques, comme en certains pays, tels que le Japon,

l'Italie et autres, du moins les informations scientifiques de toute espèce y sont assez développées au sein d'une civilisation hautement épanouie, pour qu'on puisse admettre qu'une telle organisation ne ferait que modifier seulement les détails de la description sismique actuelle dans ses traits de moindre importance.

Il n'a pas été établi d'index bibliographique. Le nombre des documents consultés est tellement considérable que ce mémoire en eût été trop alourdi. Qu'il suffise de citer Davison, Fuchs, Mallet, O'Reilly et Perrey pour les tremblements de terre, Barrois, Geykie, de Lapparent et Suess pour la géologie et la géomorphogénie.

Pour la clarté de l'exposition, il est nécessaire de donner tout d'abord une très rapide esquisse de l'histoire géologique de ces pays. Les détails utiles en seront ensuite précisés dans chaque subdivision, de façon à faire ressortir les relations géologiques recherchées. Cette description préliminaire servira aussi de cadre.

La chaîne Calédonienne

Les Iles Britanniques sont montueuses et morcelées à l'ouest, du côté atlantique, mais à l'est elles tombent en pente douce sur la mer du Nord. Les terrains les plus anciens dominent, de ce côté-là ; les plus récents, carbonifériens, permiens et postérieurs jusqu'au quaternaire de ce côté-ci. L'ouest est plus instable que l'est, ce qui confirme d'une façon générale une loi énoncée par moi dès 1895, et d'après laquelle le versant abrupt d'une chaîne est d'ordinaire plus instable que le versant doucement incliné, ce qui se conçoit facilement au point de vue géologique parce que le premier est communément plus disloqué que le second.

Les Shetlands, les Orcades, l'Écosse, les Hébrides et l'Irlande constituent les débris du bord oriental d'un massif continental très ancien, archéen et précambrien, au travers duquel l'Océan atlantique s'est à une époque relativement récente ouvert une voie, et contre lesquels les mers géologiques de l'est ont successivement appuyé leurs sédiments, qui se recouvrent les uns les autres sous forme de bandes de plus en plus orientales. Cet ensemble montueux et déchiqueté constitue les débris de la chaîne

Calédonienne déjà plissée et partiellement arasée avant l'époque cambrienne et qui se prolonge jusqu'en Norvège. Elle est coupée d'écharpe du nord-est au sud-ouest par deux dépressions : les Lowlands d'Écosse et la grande plaine irlandaise par où la mer carboniférienne l'a envahie. Cette chaîne prédévonienne a encore été morcelée par l'irruption de l'Atlantique au Minch et au canal d'Irlande, à l'époque pléistocène probablement, tandis que ses derniers fragments ont toujours à lutter contre l'assaut des vagues de l'ouest. Soumise à plusieurs surrections successives qui, au moins temporairement, compensaient les pertes dues à l'érosion et à la dénudation, injectée de matières volcaniques à plusieurs reprises, hérissée de volcans tous éteints maintenant et pour la plupart méconnaissables sauf pour le géologue, elle a enfin atteint son état actuel sous l'action des glaciers qui l'ont presque complètement couverte et rabotée.

L'extrême complexité des phénomènes géologiques dont la chaîne Calédonienne a été le théâtre pendant de longues périodes jusqu'à l'aurore des temps actuels, ainsi que la grandeur des révolutions qu'elle a subies, font prévoir une certaine instabilité. Et c'est bien en effet ce qui se passe.

La chaîne Armoricaine

Le S.-W. de l'Irlande, le sud du pays de Galles et la Cornouailles en Angleterre, la Bretagne, le Cotentin et la Vendée en France sont aussi les ruines d'une autre chaîne, un peu plus récente que la précédente, du vieux continent atlantique. Datant de la fin du carboniférien, elle a subi des vicissitudes toutes semblables, sinon contemporaines. Tout aussi démantelée par l'Océan, elle n'a cependant pas subi le travail des glaciers, et les actions volcaniques y ont montré beaucoup moins de généralité et d'intensité. Mais si dans la chaîne du nord les phénomènes de dislocation et de rupture ont, comme on le verra plus loin, le plus d'influence et d'importance comme causes de séismes, dans celle du sud ce sont aussi les actions de plissement qui interviennent largement dans la genèse des tremblements de terre. En d'autres termes les plissements calédoniens sont morts, tandis que les

armoricains semblent avoir conservé un reste de vitalité sous forme de séismes.

Pour les deux chaînes, la mer d'Irlande et la Manche ne sont que des accidents superficiels et récents, n'ayant entraîné avec eux qu'une insignifiante instabilité sismique, sans rompre la continuité des parties séparées.

La chaîne armoricaine porte aussi les noms d'hercynienne et de variscique. Il est tout naturel ici de ne lui conserver que le premier de ces noms.

Les plaines orientales Anglaises

Enfin les plaines orientales de l'Angleterre sont formées par une série de sédiments qui se sont déposés, comme on l'a dit, sur le rivage oriental du vieux continent atlantique, dont l'ossature était formée par les chaînes Calédonienne et Armoricaine. Les vicissitudes géologiques y ont été beaucoup moindres, aussi la stabilité y est-elle beaucoup plus grande. Les tremblements de terre n'y prennent une certaine importance qu'autour du bombement Wéaldien, le principal accident géologique qu'on y rencontre.

C'est dans ce triple cadre que l'on va successivement passer en revue diverses régions sismiques, en commençant par le nord.

CHAPITRE PREMIER

La chaîne Calédonienne

1° *Les îles Shetlands*

Dans les Shetlands la direction N.-S. prédomine. Ce sont des arêtes de schistes anciens fortement comprimées, dont les falaises coupées abruptement tombent par des cassures verticales et résultent de la dislocation de la chaîne Calédonienne et de l'effondrement pléistocène de l'Atlantique du N.-W. Elles sont donc un reste du rivage oriental de l'ancien continent. Occupant depuis si longtemps une telle position, il n'est pas étonnant qu'elles soient stables. Il est vrai que d'éminents géologues, comme Judd et Geykie ne doutent pas qu'à l'époque pléistocène, comme on le verra plus en détail plus loin, la mer du Nord exondée prolongeait la vallée inférieure du Rhin jusqu'aux parages des Shetlands et des Feroer. L'immersion relativement récente de cette terre n'a donc laissé, pour une raison ou pour une autre, aucune trace d'instabilité dans ces îles.

En fait on n'y connaît que quelques rares séismes propres, en défalquant ceux qui leur viennent de Norvège. Unst, où précisément quelques secousses propres ont été signalées, est située sur une ligne de fracture, mais comme les autres fractures de l'archipel sont stables, il serait téméraire d'attribuer ces secousses à la dite fracture. Cette suggestion a besoin d'être confirmée.

Des coulées porphyritiques, alternant avec des dépôts contemporains du vieux grès rouge dévonien inférieur, attestent bien qu'à cette époque reculée cette portion de la chaîne Calédonienne a été le théâtre d'actions dynamiques intenses. Mais tout est rentré dans l'ordre depuis longtemps, et c'est une remarque que l'on aura bien souvent à faire, à savoir le manque de pérennité des phénomènes éruptifs. Quant aux éruptions sous-marines signalées en 1768 et en 1784, près de Fetlar, il va sans dire qu'elles sont absolument fausses. La mort de nombreux poissons et le bouillon-

nement de la mer observés, paraît-il, en ces deux occasions, doivent être uniquement attribués à des dégagements gazeux, ou peut-être à des phénomènes thermaux temporaires provoqués dans les vases du fond par quelque tremblement de terre sous-marin.

1. Leerwick. — 2. Unst, 4 (*).

2° *Les Hébrides*

Quoique l'assimilation absolue des Hébrides avec les Loffoten n'ait pas été complètement confirmée par les plus récentes études, il n'en reste pas moins vrai que les premières sont des fragments de la chaîne Calédonienne, représentée dans ces îles par le grès Lewisien ou fondamental. Elles sont séparées de l'Écosse par le fossé du Minch, dont la grande profondeur dans le Little Minch atteste l'effondrement d'une bande N.N.E.-S.S.W. de la chaîne. Cette ligne de dislocation est très ancienne, puisqu'elle a permis l'entrée de ce détroit à la mer cambrienne qui est ainsi venue déposer le grès de Torridon sur le rivage opposé des Highlands.

Je ne connais aucun séisme propre aux Hébrides. La fracture du Minch a donc acquis une parfaite stabilité, et son ancienneté rend bien raison du fait.

On peut toutefois se demander pourquoi deux fractures, comme le Minch et le Grand Glen, probablement aussi anciennes l'une que l'autre, presque parallèles, par conséquent dues vraisemblablement aux mêmes efforts, sont actuellement la première stable, la seconde instable, comme on le verra plus loin. Il est assez difficile de répondre avec précision à cette question. Pour le moment il faut se contenter de constater ce contraste, en suggérant, faute de mieux, que les éruptions tertiaires du Minch méridional ont ramené l'équilibre, détruit, et non encore assis au grand Glen par les soulèvements ultérieurs de l'Écosse. Ce ne serait d'ailleurs pas un cas unique de stabilité acquise après des éruptions, même assez récentes, comme celles dont il s'agit ici : on peut presque dire que c'est là un fait d'ordre très général.

(*) Dans les listes qui suivent chaque subdivision sismique, le premier nombre est un numéro de référence avec la carte, tandis que le second est le nombre de séismes observés dans la localité correspondante, ou plutôt y ayant eu leur épicentre, quand il est supérieur à un.

La stabilité des Hébrides exclut aussi toute idée de survivance des actions qui ont plissé et arasé le grès Lewisien avant le dépôt du grès de Torridon, c'est-à-dire à une époque au moins précambrienne. C'est d'ailleurs là un fait général pour ces anciens plissements, dont la très grande ancienneté explique la stabilité sismique définitivement acquise.

L'antiquité de la fracture du Minch ne l'a pas empêchée d'accompagner à une époque beaucoup plus récente des éruptions basaltiques d'une très grande importance, qui se sont étendues jusqu'au Comté d'Antrim en Irlande. Elles paraissent être sorties de nombreuses bouches et s'être à plusieurs reprises, surtout pendant des périodes de repos volcanique, superposées à des argiles à lignites sur l'âge desquelles on n'est point d'accord, Forbes les considérant comme miocènes, et Gardner les faisant remonter jusqu'à l'éocène. Mais il n'en reste pas moins que le Minch a rejoué à l'époque tertiaire sous forme d'éruptions volcaniques grandioses, qui n'ont laissé derrière elles aucune trace d'instabilité sismique, comme forme ultime des actions dynamiques intenses qui les ont produites, puisque les Hébrides sont absolument indemnes de secousses. Ces épanchements tertiaires se retrouvent à Sint-Kilda, îlot isolé au large et dans l'ouest des Hébrides, aux Féroer et jusqu'en Islande. On a donc là un exemple comparable à ceux du Dekkan, et du N.-W. de l'Amérique du Nord, toutes régions où la stabilité sismique contraste avec l'énormité des phénomènes éruptifs de l'époque tertiaire.

Enfin les actions qui ont démantelé à l'époque pléistocène ou tout au plus pliocène cette énorme couverture de laves de l'Atlantique du N.-W., ont complètement disparu. Il semblerait même qu'elles aient dû être assez superficielles, si l'on tient compte de la presque horizontalité du socle sous-marin qui s'étend à l'ouest et au N.-W. des Iles Britanniques, et cela expliquerait bien la stabilité de ces territoires.

3° *Rivage oriental du Minch ou versant occidental des Highlands*

Cette région a pour limite orientale la ligne de partage des eaux du Minch. Elle part du cap Whiton Head sur la côte septentrionale du Sutherland, pour aboutir à l'angle S.-W., de l'île vol-

canique de Mull. Dans le nord cette ligne coïncide à peu près avec la grande dislocation d'Erriboll-Ullapool, qui s'étend sur 145 kilomètres de long jusqu'à l'île Tiree, et qui, antérieure au grès rouge, limite les gneiss des Highlands. Cette ligne de fracture est parallèle au Minch et au grand Glen. Accompagnée de nombreux et énormes chevauchements, elle limite à l'est un grand territoire gneissique disloqué par d'innombrables fractures S. E.-N. W., entre Fromaven et Coulmore. Ces fractures secondaires sont aussi anciennes que la principale, et toutes sont parfaitement consolidées, puisque la région est en somme assez stable.

Les quelques rares séismes qui ébranlent ce territoire doivent donc être mis en relation avec d'autres accidents géologiques. Il faut s'adresser aux fractures qui ont découpé la côte en fjords profonds, se prolongeant par des vallées abruptes jusqu'à la ligne de faîte. Or ces lignes sont antérieures au vieux grès rouge qui a pu se déposer sur leurs fonds. Leur ancienneté s'oppose à ce qu'on les rende responsables des secousses en question. Heureusement ces fjords seraient encore le siège de bradisismes, qui suffiraient à l'explication cherchée, par les mouvements modernes qu'ils semblent déceler. C'est ainsi que le village de Kinloch-Ewe (en gaélique : le bout du monde) aurait été, il y a peu, l'extrémité même du fjord, tandis qu'actuellement ce village occupe l'extrémité orientale du Loch Mare, lac allongé séparé de la mer par un seuil de plusieurs kilomètres de long. L'homme aurait donc été témoin de ces mouvements qui, ici, coïncideraient avec quelques secousses sismiques.

Un autre accident géologique de très grande importance se montre dans le sud, c'est la ligne des îles volcaniques de Skye, Rum, Mull et de la presqu'île d'Ardnamurchan. L'activité y a dépassé l'époque miocène, mais absolument éteinte maintenant, la fracture volcanique ne donne plus signe de vie que par de très rares séismes qu'on peut lui attribuer faute d'autre cause apparente.

1. Cuilion Hill. — 2. Kinlochmoidart. — 3. Kintail. — 4. Loch Alsh. — 5. Loch Broom, 3. — 6. Loch Hourn Head, 2. — 7. Ile Martin. — 8. Ile Mull. — 9. Strontian. — 10. Tinafuline. — 11. Iles Tresnish.

4° *Canal Calédonien, ou Grand Glen, ou Loch Ness*

Avec cette région on entre dans le véritable massif des Highlands. Elle est limitée à l'est par l'arête des Glashurn, des Monaghlea et des Koryaraick, et au sud par une arête transversale passant au sud du Ben Nevis. Le trait principal en est la Grand Glen, Canal Calédonien ou Loch Ness, très profonde cassure déjà dessinée à l'époque dévonienne. La très grande ancienneté de cette fracture n'en a cependant pas encore permis la complète consolidation, puisque de Fort William à Inverness se trouve une des régions les plus instables des Iles Britanniques, après celle de Comrie toutefois. La forme des isoséistes, allongées de part et d'autre du Glen et dans le même sens, montre bien que c'est cet accident géologique qui joue encore sous forme de séismes, surtout autour d'Inverness, mais en conséquence d'efforts tectoniques qui ne sont pas la continuation directe de ceux qui lui ont primitivement donné naissance.

Le Grand Glen a une influence sismogénique si marquée pour l'Invernesshire qu'un aperçu de son histoire géologique s'impose ici. Il n'y a pas de doute que ce ne soit une grande et ancienne fracture, avec affaissement de sa lèvre S.-E. par rapport à celle du N.-W. Mais d'autre part sa profondeur est considérable, 260 mètres en certains points du Loch Ness, lac dont la surface n'est qu'à 17 mètres au-dessus du niveau de la mer. Or le lever de ses parois, exécuté vers 1890 par Th. Scott pour le bureau des pêcheries, a fait reconnaître que ses parois présentent tous les caractères d'un cañon ou d'une étroite vallée submergée. Son thalweg a donc dû être parcouru par un fleuve assez puissant pour élargir et approfondir la fracture et ayant son écoulement naturel vers une mer assez éloignée. L'Écosse était par conséquent une masse continentale qui s'est affaissée et morcelée en même temps que la mer du Nord s'effondrait, c'est-à-dire à l'époque pléistocène, en submergeant le prolongement de la vallée du Rhin, dont on a déjà parlé et qui auparavant collectait les eaux du versant oriental de l'Angleterre et des fjords norvégiens. Cette conclusion résulte de nombreuses considérations et en particulier de l'identification faite par Geykie des graviers à *Elephas primigenius* de l'Angleterre orientale et de ceux de la basse vallée actuelle du Rhin.

Et à cette même époque, le Grand Glen non effondré à 243 mètres au-dessous du niveau de la mer envoyait ses eaux dans le Rhin pléistocène qui se jetait en quelque point au N.-W. des Feroer. Naturellement l'amplitude du mouvement vertical du fond a été bien supérieure à 243 mètres.

Rien donc d'étonnant qu'après de telles vicissitudes l'équilibre du Grand Glen n'ait pu encore que se mal rétablir depuis cette époque relativement très récente, d'où les nombreuses secousses de tremblement de terre qui se produisent dans sa partie septentrionale de Fort William à Inverness, avec tendance marquée à prendre d'autant plus de fréquence et d'intensité qu'on se rapproche de cette ville. Cela est tellement vrai que la cassure tout aussi ancienne du Minch est restée stable, parce que précisément cette dernière ne semble pas avoir participé à l'affaissement pléistocène. Il y a plus, les séismes de l'Invernesshire ont le plus souvent leurs épicentres à l'est du Grand Glen, c'est-à-dire du côté de l'effondrement de la mer du Nord. A coup sûr cette disposition des épicentres n'est pas fortuite.

Davison ne regarde pas la fracture du Grand Glen comme la cause directe de ces secousses, ce en quoi il a parfaitement raison. Mais je ne saurais suivre plus loin ce sismologue éminent, quand, se référant au fait indiqué plus haut que les épicentres dominent à l'est, il en conclut que le district instable de l'Invernesshire est placé sur un grand voussoir compris entre le Grand Glen et une fracture embranchée sur lui, passant à l'est, et dont ces épicentres latéraux marqueraient justement la position, en en démontrant en même temps et à eux seuls l'existence, car une telle faille latérale n'a pas encore été relevée sur le terrain. Les chocs seraient produits par des affaissements ou des tassements du voussoir; le plus grand glissement se produirait le long de la faille-embranchement (branch-fault), causant ainsi une augmentation immédiate de l'effort le long de la fracture principale (Grand Glen), qui serait graduellement relevée par une succession de petits glissements.

A ces suggestions, très intéressantes d'ailleurs, on peut tout d'abord objecter qu'il est certainement fort imprudent d'alléguer une faille profonde encore inconnue et que, si de grands tremblements de terre ont causé des failles, ou mieux ont coïncidé avec leur formation, ce n'est pas à dire que toute petite secousse au

voisinage en puisse augmenter le rejet, si peu que ce soit. Il est, je crois, plus scientifique de ne pas chercher à tant préciser, et à se contenter de dire pour le moment que les secousses de l'Invernesshire sont vraisemblablement la continuation des efforts pléistocènes qui ont abaissé le fond du Grand Glen à la profondeur où nous le voyons maintenant.

S'il en est réellement ainsi, les séismes de Fort William seront attribués aux mêmes efforts et non aux phénomènes récents d'exhaussement décelés aux environs par des terrasses à coquilles, que Guyn-Geffreys considère comme très proches parentes de celles des mers voisines. On sait d'ailleurs que rarement les bradisismes modernes coïncident avec des régions instables.

D'autres cassures transversales rencontrent le Grand Glen, principalement à l'ouest, et deux au moins, le Glen Garry et celle qui se trouve au sud du Kraigora, montrent encore une certaine instabilité sismique.

Par contre le Sutherland, le Caithness et les Orcades sont parfaitement stables. Ces deux comtés sont relativement bas et recouverts de vieux grès rouge dévonien, de nouveau grès rouge triasique et même de dépôts jurassiques. C'est donc qu'il s'agit là d'un versant de la chaîne Calédonienne qui, depuis l'ère dévonienne, a formé la côte stable d'une mer ouverte à l'est. Et ce petit district participe à la stabilité du versant oriental de l'Angleterre, dont il rappelle en quelque sorte les caractères sédimentaires.

Les fjords des Orcades sont, comme ceux du versant oriental du Minch, tournés vers l'ouest mais, contrairement à ce qui semble se passer pour ceux-ci, n'accusent plus aucune instabilité sismique, même faible. Les dislocations, grâce auxquelles se sont produites les éruptions porphyriques du vieux grès rouge supérieur dans ces îles, sont aussi parfaitement consolidées.

En résumé, l'instabilité sismique, d'ailleurs importante dans cette région, y est strictement localisée au Grand Glen, et à deux autres fractures secondaires, Glen Garry et Kraigora.

1. Achreach. — 2. Aldourie, 3. — 3. Ardochy, 13. — 4. Balnafettack, 3. — 5. Ben Nevis. — 6. Bunchrew, 5. — 7. Clanachharry. — 8. Clunes. — 9. Dalarossie, 4. — 10 Daviot. — 11. Dochgarroch, 27. — 12. Dochgarroch Locks. — 13. Drumälan, 2. — 14. Drummadrochit, 4. — 15. Feddan. — 16 Findhorn. — 17. Glen Garry, 7. — 18. Glen Mazeran. — 19. Glen Nevis. — 20. Glen Quoich, 4.

— 21. Glen Urquhart. — 22. Les Highlands. — 23. Holm, 14. — 24. Invergany, 18. — 25. Inverness, 30. — 26. Inverness district Asylum. — 27. Kilmorach. — 28. Kraigora, 4. — 29. Loch Aber. — 30. Loch Ness, 3. — 31. Loch Ness (Extrémité nord du —). — 32. Strathglass. — 33. Sutherland County. — 34. Teanassie. — 35. Torbreck, 4. — 36. Fort William, 4.

5° *Versant nord des Grampians*

Cette région forme l'angle N.-E. de l'Écosse et est limitée à la troncature Duncan Ness-Kinnairds Head. Le rivage nord est parallèle à l'arête des Grampians du Dalwhinnie à Stonehaven, et le rivage oriental l'est au Grand Glen. Tout le territoire appartient à l'ancien massif calédonien, sauf une petite surface de vieux grès rouge à l'ouest et près du cap Kinnairds Head, et qui appartient au même golfe dévonien qui a auréolé de ses dépôts la côte du golfe d'Inverness. Aussi pour la même raison que pour le Caithness, cette région est parfaitement stable. Quelques rares séismes peuvent être attribués aux cassures où coulent la Spey et l'Ythan. Les terrasses que l'on remarque dans ces vallées témoignent qu'elles ont participé à un mouvement récent d'exhaussement, aussi bien éteint d'ailleurs que celui d'immersion de la mer du Nord.

1. Aberdeenshire. — 2. Abernez. — 3. Crathes. — 4. Dalwhinnie, 2. — 5. Tureff, 2.

6° *Grampians du nord, ou Perthshire*

Cette région comprend la partie la plus compacte des Highlands. Sa limite méridionale court de l'ouest à l'est, du Ben Lui au Fife Ness, en empruntant une partie des Ochrill Hills et en séparant les eaux du Firth of Tay de ceux du Firth of Forth. Les terrains primaires de la chaîne Calédonienne et les hauteurs de cette chaîne s'arrêtent à une grande dislocation, orientée N.N.E.-S.S.W., et qui courant d'Aberdeen à Greenock s'en va traverser l'île d'Arran. Dès les temps dévoniens et carbonifériens cette cassure existait, car les sédiments de ces deux époques se sont accumulés sur son flanc sud en s'y appuyant. Elle ne paraît pas encore parfaitement consolidée vers son extrémité orientale, car elle se présente tout naturellement à l'esprit pour expliquer les séismes assez

fréquents de Perth et de ses environs. Disons tout de suite que cette suggestion ne semble pas devoir être partagée par Davison. Il vaut donc mieux laisser la question en suspens.

D'autres fractures transversales, mais secondaires, affectent le massif primaire des Grampians. Celle du Leoch Eearn est bien connue des sismologues par la série de secousses si nombreuses qui ont tant agité Comrie et ses environs de 1838 à 1850 et ont été étudiées par Mac-Farlane. Elle a d'ailleurs joué à bien d'autres reprises, mais avec moins d'intensité et de durée toutefois. Davison ne pense pas qu'il faille attribuer les séismes de Comrie à la grande faille bordière qui passe seulement à un mille au sud de cette localité, mais je ne vois point qu'il donne de cette négation une raison bien définie. En tout cas on peut bien aussi se référer à la faille transversale du Loch Earn, d'autant plus que plus à l'ouest d'autres cassures secondaires et transversales aussi, Ben Voirlich et Loch Tay, ont donné lieu à quelques séismes. Quoi qu'il en soit, Comrie est certainement le point le plus instable les Iles Britanniques.

Un dernier centre secondaire d'instabilité se montre dans les Ochrill Hills. De ce que les épicentres sont placés latéralement à la faille principale de ce nom, Davison en infère qu'ils ne lui sont pas dus, mais bien à quelque faille hypothétique non relevée encore par le Geological Survey. On peut ici répéter ce qui a été dit pour le Grand Glen et restituer ces secousses à ladite faille.

1. Amulrie. — 2. Ardvoirlich. — 3. Ballenloan, 2. — 4. Ben Voirlich. — 5. Clathreck. — 6. Comrie, 443. — 7. Crieff, 5. — 8. Dunnichen. — 9. Dunning. — 10. Fillian (St). — 11. Firth of Tay. — 12. Green Loaning. — 13. Lawers. — 14. Loch Earn, 2. — 15. Logierait. — 16. Ochrill Hills, 5. — 17. Perth, 5. — 18. Perthshire. — 19. Pittochrie. — 20. Strathearn. — 21. Tromperran. — 22. Upper Strathearn, 4.

7° *Grampians du sud et Cantyre*

Cette région bornée à l'ouest, au nord et à l'est par les troisième, quatrième et sixième régions, est limitée — à l'est par une ligne qui partant du Ben Voirlich dans les Grampians longe le Loch Lon à l'ouest — puis au sud-est par la ligne de partage des eaux entre le Firth of Clyde et le Solway Firth du Cairn Table à la Corsewall Point (Wigtonshire).

Tout le nord de la région jusqu'à la dislocation Aberdeen-Greenock-Arran, dont on a déjà parlé, appartient au massif Calédonien. Le Grand Glen s'y continue par le Loch Linnhue et l'Oronsay Passage. Cette extrémité sud du Grand Glen est bien plus stable que sa partie nord (quatrième région). Toutefois des séismes ont agité l'île Lismore, et d'autres ont eu leurs épicentres aux environs de celle de Colonsay. La cassure de même direction du Loch Awe a aussi été le théâtre de quelques secousses. Il en est aussi de même pour les fractures transversales secondaires des Loch Lewis, Etyve et Gilp. Ces Lochs et tout particulièrement le second présentent un profil longitudinal très irrégulier, descendant, comme le Loch Ness, fort au-dessous du fond de la mer voisine, accusant ainsi l'effet d'intenses dislocations sur le bord sud-ouest du massif, dont cependant l'équilibre est à peu près atteint maintenant, puisque au demeurant l'ensemble de la région est assez stable.

L'Ayrshire fait partie de la dépression des Firth of Clyde et Firth of Forth, connue sous le nom des Lowlands d'Écosse, et que nous savons exister depuis les temps dévoniens si éloignés. Comme eux, il est parfaitement stable en dépit des mouvements d'affaissement qui y ont eu lieu depuis les temps historiques.

Les éruptions permiennes de porphyrites, qui ont jailli des nombreux cônes de ce comté, pas plus que celles beaucoup plus récentes de trapps et de basaltes des îles Arran, Ailsa Craig et Bass, n'ont laissé, sous forme de tremblements de terre, aucune trace des dislocations qui les ont accompagnées.

1. Ile d'Arran. — 2. Colonsay et Phadda (entre les îles —). 3. Connal. — 4. Inverhallen. — 5. Kelly Harbour. — 6. Kimelford, 2. — 7. Loch Awe. — 8. Loch Leven. — 9. Oban, 3. — 10. Rothesay. — 11. Ile Scarba, 2

8° *Dépression des Firth of Clyde et Firth of Forth, ou Lowlands*

Cette dépression s'appuie au nord sur la grande faille bordière Aberdeen-Greenock déjà décrite et au sud sur une crête irrégulière qui, partant du White Hill, rejoint la mer du Nord par les collines de Lammermuir un peu au N.-W. de Sint Abbs Head. Sa direction générale est à peu près parallèle à cette dislocation et elle comprend le talus septentrional des Southern Uplands

d'Écosse. Cette aire a été déprimée très anciennement puisque les couches dévoniennes et carbonifériennes s'y sont déposées. Les intrusions éruptives anciennes y sont très importantes et jouent un certain rôle dans le relief du pays, leur dureté leur ayant permis de résister, mieux que les sédiments voisins et encaissants, aux agents extérieurs de destruction, érosion et dénudation. C'est ainsi que les collines du Pentland sont restées en saillie.

Des symptômes d'exhaussement moderne s'y montrent en plusieurs points et sous diverses formes : terrasses marines horizontales et en escalier des estuaires du Forth, de la Clyde et du Tay; restes de baleines, de phoques, de marsouins, etc., aux environs de Glascow; arrêt de la Grande Muraille d'Antonin loin de la côte actuelle, alors qu'elle avait certainement été construite de mer à mer à ses deux extrémités. Pour donner une idée de l'amplitude de ce mouvement d'exhaussement, il suffit de rappeler que d'après les études de Geykie sur les fondations romaines du port de Falkirk (Alaterra), la différence de niveau atteindrait $7^{m},50$. D'ailleurs cet exhaussement n'est pas tout à fait général, puisque la côte du Fifeshire montre des forêts et des tourbières submergées, indices d'un mouvement contraire d'affaissement.

On pourrait donc s'attendre à une certaine instabilité sismique dans une région qui, après avoir été pendant de si longues périodes géologiques une zone d'affaissement, tend visiblement à se relever maintenant, ou tout au moins s'est relevée à une époque récente, d'autant plus que ce mouvement est en sens inverse de la submersion pléistocène de la mer du Nord. Il n'en est rien : les séismes y sont plutôt rares, et très certainement Édimbourg n'a dû qu'à son importance de capitale le privilège de se voir attribuer des tremblements de terre qui avaient leur épicentre ailleurs, par exemple dans le Perthshire.

On connaît cependant des secousses vraiment propres à cette ville. Mais Ralph Richardson observe qu'on ne peut les mettre en relation avec les nombreuses failles qui s'y croisent et ont été injectées de dykes de trapp. C'est donc qu'elles seraient maintenant parfaitement consolidées ou que les efforts tectoniques qui les ont produites sont maintenant absolument éteints. Ce n'est point du tout l'opinion de Davison. Ce sismologue montre que les environs d'Édimbourg sont très disloqués, que plusieurs failles

parallèles aux Pentland Hills, courant donc N.E.-S.W., traversent la région épicentrale des secousses de janvier 1889, et qu'enfin d'autres secondaires recoupent orthogonalement les premières. L'une de celles-là, sur le côté N.-W. de l'axe de cette région épicentrale, va de la tête de la vallée de Logan à la colline North Black, avec rejet vers le N.-W., et Davison est porté à lui faire jouer un rôle prépondérant dans le cas des secousses précitées. Il y a évidemment lieu de se ranger à son opinion.

Comme toujours, les éruptions permiennes du Fifeshire ont laissé ce comté parfaitement stable.

Quelques tremblements de terre ont aussi agité les Campsie Hills et leurs environs. Il faut probablement les attribuer à la cassure du Loch Lomond, ou à la grande dislocation bordière, qui passe non loin au nord.

Quelques séismes du district minier de Kilsyth doivent tout particulièrement attirer l'attention. Ils ont pour caractère d'être très locaux et très faibles. Ce que l'on en va dire s'appliquera exactement à ceux de Pendleton, près de Manchester et de la vallée de Rhondda, dans le Glamorganshire, et l'on n'a qu'à reproduire l'opinion de Davison à leur sujet en s'y ralliant complètement.

Dans les districts miniers, et surtout d'ancienne exploitation, on sait qu'il se produit des affaissements et des chutes de roches qu'on a pu souvent constater et qui se traduisent au dehors par des dépressions du sol sus-jacent. Jičinski a fait de ces phénomènes une très intéressante étude. Quoique dans le cas des petites secousses sus-visées, ces chutes de roches ou de couches n'aient pas été observées directement, il n'est pas antiscientifique d'admettre qu'elles aient eu lieu réellement et assez brusquement pour causer ces légers séismes, sans avoir eu assez d'importance pour se manifester, au moins immédiatement, par une dépression superficielle. On peut d'ailleurs supposer ici que le sol ait conservé un soutien suffisant. D'autre part, on sait combien en général les couches de houille sont faillées et disloquées dans tous les sens. Ainsi les tremblements de terre en question peuvent-ils être considérés comme artificiels, puisqu'ils dérivent des travaux de l'homme, et en même temps aussi comme naturels, puisqu'ils sont concomitants de mouvements dans les failles, mouvements provoqués, il est vrai, par ces mêmes travaux. On doit ajouter qu'en

ce qui concerne plus spécialement Kilsyth, l'exploitation a lieu au-dessus d'une faille d'une certaine importance.

En résumé, il se trouve qu'une dépression ou zone d'affaissement très ancienne, soumise à des mouvements modernes d'affaissement et surtout de soulèvement de grande amplitude, et en outre injectée de roches éruptives plus ou moins anciennes a acquis actuellement une grande stabilité sismique.

1. Blitherwood. — 2. Bridstone. — 3. Campsie Hills, 4. — 4. Dumbarton, 2. — 5. Dumblane. — 6. Dumferline. — 7. Edinburgh, 4. — 8. Gare Loch. — 9. Gore Bridge. — 10. Kilsith, 4. — 11. Stirling. — 12. Tynehead.

9° *Southern Uplands écossais et Cheviots*

Séparés du reste de la chaîne primaire calédonienne par la dépression des Lowlands, ses derniers fragments sud-orientaux se montrent là de mer à mer entre le canal du Nord et la mer du Nord sous la forme d'une écharpe E.N.E.-W.S.W. Les plis, très anciens, sont souvent masqués, surtout dans l'est par des épanchements éruptifs postérieurs que l'érosion et la dénudation ont moins touchés que les autres roches sédimentaires plus tendres. Les plus remarquables plissements se montrent dans la curieuse presqu'île du Rinn of Galloway, mais où la stabilité acquise montre qu'ils sont complètement morts.

La région est bornée au nord par les 7e et 8e régions, et au sud par l'arête des Cheviots, à peu près en prolongement de la côte sud du Solway Forth. Avec cette région se termine la partie écossaise de la chaîne Calédonienne.

L'activité sismique y est très faible et surtout localisée aux environs d'Anandale, et au Dumfrieshire, où on peut l'attribuer à des dislocations locales, mais sans faire intervenir, comme l'a fait Davison pour le premier cas, une faille encore inconnue sous Carlisle. La faille bordière des terrains dévoniens et carbonifériens des Lowlands n'est pas rectiligne comme celle du nord et ne suit pas du tout l'arête montagneuse. C'est l'indice de violentes dislocations ultérieures dont la Ninth a profité pour couper deux fois la faille, et auxquelles on doit peut-être attribuer les secousses de Wanlock Head.

1. Anandale. — 2. Cargen. — 3. Corrie. — 4. Dumfries, 3. — 5. Eshadlemuir. — 6. Galashiels. — 7. Milk. — 8. Wanlock Head, 4.

10° *Irlande septentrionale*

D'une façon générale l'Irlande est constituée par une dépression centrale, la basse plaine du Shannon, correspondant exactement à celle des Lowlands d'Écosse, et qui, encadrée au nord et au sud par deux massifs montagneux, s'étend de mer à mer, de Galway à Dublin. Si l'on trace de Drogheda à Galway la limite septentrionale du bassin de ce fleuve, on sépare du reste de l'île le Connaught du N.-W. et l'Ulster, qui forment la région dont on parle ici. Cette même limite est aussi grossièrement celle des terrains primaires et archéens du nord et de ceux plus récents, surtout carbonifériens de la plaine. L'île de Man doit être rattachée à cette région à cause de ses terrains cambriens.

Le N.-W. de l'Irlande est la continuation directe et indéniable des Highlands d'Écosse. C'est donc un fragment de la chaîne Calédonienne, dont l'histoire géologique est indentiquement la même. L'effondrement atlantique s'y révèle par les fjords de l'ouest, dans le Donegal et le Mayo, tandis que d'immenses nappes basaltiques tertiaires recouvrent l'Antrim, et sont les restes de celles des Hébrides et de l'Atlantique du N.-W., démantelées par l'érosion marine et l'affaissement qui ont ouvert le Canal du Nord vers l'époque pléistocène. Un important massif granitique d'âge assez récent forme les monts Mourne sur la côte orientale de l'Armagh.

De même qu'aux Lowlands, les sédiments carbonifériens se sont déposés dans l'ancienne dépression en s'appuyant aux plissements calédoniens et, par suite de leur moindre dureté, ont été ensuite complètement rabotés par la dénudation qui n'y a laissé subsister qu'une plaine basse.

Des mouvements assez récents semblent s'être produits. C'est ainsi qu'Issel considère les Lough Neagh et Lough Stranford comme d'anciens bras de mer à fond soulevé, tandis que Lyell attribue à un lent tassement d'un sol tourbeux la submersion de cabanes et de troncs d'arbres sur la côte du Donegal.

Quoi qu'il en soit, les glens ou cassures toutes semblables à celle des Highlands d'Écosse, les phénomènes éruptifs mentionnés plus haut, les plissements calédoniens, l'effondrement atlantique de l'ère pléistocène, et enfin les mouvements modernes n'ont laissé aucune trace d'instabilité sismique dans cette région qui

occupe par rapport à la plaine du Shannon exactement la même position que le Perthshire si instable (Comrie) par rapport aux Lowlands d'Écosse. Il est vrai que les documents et les observations font bien un peu défaut. Mais on ne peut supposer dans la région de points vraiment instables, à comparer, même de loin, à ceux de Comrie ou même du reste du Perthshire. Cette stabilité semble provenir de ce qu'ici les terrains primaires et archéens du nord et les carbonifériens du sud ne sont pas séparés par une grande dislocation bordière correspondant à celle d'Aberdeen-Greenock, et cette remarque pourrait à elle seule corroborer l'opinion que cette dernière entre en jeu dans les tremblements du Perthshire.

Deux séismes seulement sont connus; peut-être peuvent-ils être attribués aux cassures qui ont ouvert les fjords et les glens.

Quant aux deux chocs de l'île de Man, une faille y existe qui suffit pour en rendre compte.

1. Ballymore. — 2. Innishoven. — 3. Ile de Man, 2.

11° *Plaine du Shannon*

La région est d'une stabilité absolue. On aurait cependant pu s'attendre à y voir signaler quelques séismes en raison des rivières souterraines qui, profitant des diaclases ou fentes de la base du carboniférien, y peuvent produire des effondrements par dissolution ou entraînement. Il n'en est pas ainsi. On sait d'ailleurs que ces phénomènes ne suffisent pas toujours à donner de l'instabilité à une région. Par exemple, si des régions karstiques comme la Carniole ou l'Istrie sont instables et si les catavothres de la Grèce ou de la Sabine donnent lieu à des séismes, par contre rien de semblable ne s'observe ni dans le Yucatan, ni dans les causses du sud du plateau central français. Une intense circulation souterraine ne suffit donc pas à elle seule à amener de l'instabilité sismique.

Quelques chocs ont bien été signalés à Dublin, mais je pense que certainement leurs épicentres se trouvaient dans la région suivante.

12° *Irlande méridionale*

Cette région montagneuse est située au sud d'une ligne qui, partant de la côte nord de la baie de Tralee, aboutit au canal

d'Irlande près et au nord de Kiston. C'est une crête irrégulière suivant à peu près le bord de la cuvette carboniférienne et franchie seulement en son centre par la rivière Nore. A l'est, une bande granitique s'étend du N.-E. au S.-W. sur les monts du Wicklow et y perce le silurien et les schistes métamorphiques. Dans les comtés de Wicklow, Carlow et Wexford, les dépôts paléozoïques sont affectés de plis S.S.W.-N.N.E., qui font évidemmennt partie de la chaîne calédonienne et correspondent à ceux des Southern Uplands d'Écosse. Dans le sud-ouest de la région de profonds rias indentent la côte entre les caps Dunmore Head au nord et Clear au sud. Ce sont des plissements dont la mer a érodé les synclinaux. Ces plissements affectent le vieux grès rouge et le carboniférien et datent de la fin de cette dernière époque. De direction W.S.W.-E.N.E., qui devient graduellement W.-E., ils disparaissent sous la mer au delà du comté de Waterford. Ces plis, différant d'âge et de direction avec ceux de la chaîne Calédonienne, ne lui appartiennent donc pas, mais bien à une seconde chaîne plus méridionale du vieux continent atlantique, la chaîne Armoricaine.

Quelques rares séismes se localisent à l'est dans les plis calédoniens, sans trahir aucune relation avec les phénomènes éruptifs du Wexford. Quelques autres, tout aussi rares, secouent l'extrémité orientale des plis armoricains du côté vers lequel ils disparaissent sous la mer. On pourrait donc, sans faire une hypothèse trop téméraire, les attribuer aux actions relativement récentes, qui ont rompu leur continuité avec le Pays de Galles. Enfin les rias de l'ouest n'apportent aucune instabilité, même faible, dans leur voisinage. C'est que cet accident résulte d'une action toute superficielle, et non de fractures, comme les fjords. Aussi des séismes les secouent bien plus rarement que ceux-ci.

Là encore pas de grande dislocation bordière pour causer des tremblements de terre.

1. Mont Caldeen. — 2. Charleville. — 3. Cork, 3. — 4. Cork County, 3. — 5. Dublin (*), 3. — 6. Irlande (**). — 7. Kanturk et Mallow. — 8. Kingston. — 9. Kinsale. — 10. Tinahelly. — 11. Wexford. — 12. Wicklow.

(*) On a dit plus haut que les séismes de Dublin devaient être rapportés à cette région, sa situation de capitale les lui ayant fait attribuer indûment.

(**) Probablement méridionale.

13° *Pays de Galles*

Cette région a pour limite orientale la ligne de partage des eaux de la presqu'île de Birkenhead à la baie de Newport, en passant par les monts Berwynn, Plynlimnion, Tregaron, Mynyd Epym et Black Forest.

Au point de vue de la constitution géologique la région déborderait notablement cette limite à l'est, mais on a préféré conserver les anciennes bornes géographiques qu'on lui avait données dans la première description sismique des Iles Britanniques.

Le pays de Galles est le dernier fragment de la chaîne Calédonienne démantelée. Ce massif cambrien, relevé à l'ouest sur la mer d'Irlande, a subi les plissements calédoniens antérieurs au vieux grès rouge. Ces plissements sont dans l'île d'Anglesey et dans les comtés de Caernarvon et de Merioneth parallèles à ceux des Highlands d'Écosse, mais ils s'infléchissent de plus en plus vers le sud à mesure que l'on descend dans les Comtés de Cardigan et de Pembroke, où ils finissent par prendre la direction W.-E., tangente à celle des plis armoricains qui, dans le sud du Pembrokeshire, font suite à ceux du Waterford, après leur disparition sous la mer.

Cette région montagneuse et tourmentée a été à de nombreuses époques injectée de matières éruptives diverses, et malgré leur antiquité certains paysages volcaniques y ont encore conservé une grande fraîcheur.

C'est dans la presqu'île d'Harverfordwest que se fait le contact des plis calédoniens ou prédévoniens et armoricains ou postcarbonifériens. Ces derniers ne font qu'effleurer le sud de la région et se prolongent en direction W.-E. au travers des baies de Caesmarthen et de Swansea en passant près de Cardiff, et en franchissant l'estuaire de la Severn pour se relier au bord septentrional des Mendip-Hills dans le Sommerset. Dans le sud-est du massif le cambrien fait place au silurien, tandis que le carboniférien occupe la plus grande partie de la côte méridionale entre les plis calédoniens et armoricains.

L'activité sismique est relativement assez grande dans la presqu'île de Pembroke. Elle peut s'expliquer par la rencontre des deux systèmes de plissement et être ainsi un critérium d'un reste de survivance des plissements armoricains seulement, car on a vu

que partout les plissements calédoniens sont éteints, au contraire de ce qu'on verra dans la suite de ce travail se passer pour les premiers. On peut aussi, et probablement avec tout autant de raison, invoquer les nombreuses et importantes failles qui coupent cette presqu'île. C'est l'opinion de Davison pour les tremblements de terre d'Harverfordwest.

Les séismes de la côte sud peuvent être attribués aux plissements armoricains ou aux failles locales du carboniférien. La fracture du détroit de Menai peut suffire à expliquer quelques rares secousses dans le N.-W. de la région, sans cependant qu'on puisse l'affirmer formellement. Quelques chocs légers ont été signalés dans le district minier de la vallée de Rhondda. On peut répéter exactement ce qui a déjà été dit de ceux de Kilsith.

Ni les importants phénomènes éruptifs anciens, ni les indices que montrent de submersions modernes les côtes du Cardigan et du Pembroke n'ont laissé de trace d'instabilité sismique.

Avec cette région se termine la chaîne calédonienne, ainsi que l'influence sismique, non de ses plissements, mais de plusieurs de ses fractures. Il ne faut point oublier toutefois que le pays de Galles et le sud de l'Irlande font en même temps partie de la chaîne Armoricaine. D'ailleurs un petit fragment de la première se trouve aussi dans le Shropshire. Mais pour si peu, on n'a pas cru devoir modifier le tracé des anciennes divisions sismiques.

1. Anglesey (sud de l'île). — 2. Bala. — 3. Bangor, 2. — 4. Ile Bardsey. — 5. Barmouth, 2. — 6. Caermarthen, 2. — 7. Chester. — 8. Vallée de la Clwyd. — 9. Downing. — 10. Fiskguard. — 11. Glamorganshire, 2. — 12. Harverfordwest, 18. — 13. Holywell, 2. — 14. Llandstephan. — 15. Llandwest, 2. — 16. Merthyr-Tydill. — 17. Monmontshire, 2. — 18. Monmontshire oriental. — 19. Newport. — 20. Norwescent. — 21. Pentir. — 22. Rhiwfrank. — 23. Rhondda Valley, 3. — 24. Swansea.

CHAPITRE II

Chaîne Armoricaine

14° *Cornouailles*

Cette région a pour limite orientale une ligne qui partant du sommet de l'estuaire de la Severn aboutit à la Manche près et à l'ouest de l'île de Wight, en séparant les Malborough Hills du plateau de Salisbury et en traversant le New Forest.

La vallée de l'Ex limite à l'est les terrains paléozoïques de l'ouest. Ces terrains, surtout dévoniens, sont affectés par les plis postcarbonifériens de la chaîne Armoricaine, qui se perdent à l'est sous les terrains secondaires. Le sud de la presqu'île de la Cornouailles est en outre injecté de nombreux laccolithes granitiques, dont le plus important est celui de Dartmoor Forest. Ces masses s'alignent le long des plis. Les îles Scilly sont un fragment granitique démantelé par l'érosion marine. D'ailleurs, toute la presqu'île est un reste du continent atlantique contre le rivage oriental duquel les sédiments postérieurs se sont successivement appliqués. De même que dans l'ouest du comté de Cork, les plis armoricains sont, dans l'extrémité de la Cornouailles, infléchis vers le S.-W. Le gneiss d'Eddystone et les schistes anciens de la Cornouailles S.-W. représentent les plus anciennes parties de la chaîne Armoricaine, relevée à l'ouest comme la chaîne Calédonienne. Les roches éruptives proprement dites ne se montrent qu'au cap Lizard. De nombreux filons métallifères ont rempli et même consolidé les failles dues au plissement ou au mouvement de bascule vers l'ouest.

La Cornouailles présente, surtout au N.-W., de nombreuses traces d'affaissement moderne, ainsi que les îles Scilly et l'espace maritime intermédiaire. Partout se voient des preuves d'un récent démantèlement par l'océan.

La diversité des manifestations dynamiques auxquelles la région

a été soumise suffit pour la faire considérer comme présentant un ensemble de conditions géologiques favorables à l'instabilité sismique et, en effet, les tremblements de terre y sont assez fréquents.

Davison a mis un certain nombre de séismes de la région en relation avec des failles locales. Pour ce qui est du nord de la Cornouailles et en particulier du tremblement du 7 octobre 1889, il constate que l'axe de l'aire ébranlée est bien parallèle aux plissements de la région, mais que, n'y existant pas de faille connue, l'évidence tirée du phénomène sismique ne permet pas d'aller plus loin que la détermination de la direction de la faille présumée qui a donné naissance aux séismes. Combien n'est-il pas plus simple et plus rationnel de s'en tenir exclusivement au plissement, accident patent et constaté, plutôt que de supposer une faille inconnue. Le même sismologue a pu au contraire avec la plus grande vraisemblance attribuer les chocs de Blisland et de Wendron à un reste de mobilité dans les failles qui ont été cependant remplies par des dykes parallèles d'elvan.

L'Exmoor est un plissement armoricain parallèle au canal de Bristol. D'après le Dr Hicks, une grande faille chevauchée s'étend le long de la bordure septentrionale des Morte-Slates depuis la côte près d'Ilfracombe jusqu'à la haute vallée de l'Ex. Au sud une autre faille se montre également et d'à peu près même direction. Enfin la mer découvre de longues plages avec des vestiges de forêts submergées. Le concours de tant d'efforts dynamiques, plissements, failles, affaissements modernes, suffit largement à expliquer plusieurs séismes, que Davison attribue exclusivement à la grande faille chevauchée du nord.

De Torquay à Teignmouth la côte est sujette à quelques séismes. Et justement là même on voit des traces de forêts submergées, tandis que dans l'intérieur d'anciennes terrasses marines avec des restes de l'industrie humaine préhistorique témoignent d'un mouvement contraire de surrection. N'y a-t-il pas dans l'opposition de mouvements presque contemporains et récents de quoi expliquer les séismes dont il s'agit ?

Le Poole, le New-Forest et la côte de Dorsetshire ne sont pas complètement indemnes de tremblements de terre. N'y faut-il pas voir un reste de vitalité dans les actions de plissement armoricain

qui ont donné lieu à un synclinal qui se prolonge jusqu'en France à travers la Manche et à l'anticlinal correspondant qui passe au nord de Weymouth? D'ailleurs, Davison a étudié là deux importantes failles, courant à peu près W.-E., et qui, probablement liées au mouvement de plissement, peuvent aussi jouer un rôle sismogénique : faille de Ridgway, d'Abbotsbury à Winfrith; faille d'Osmington, qui avec quelques interruptions par la mer s'étend du sud d'Abbotsbury au nord de la baie de Swanage.

La baie de Penzance et la côte d'alentour sont assez souvent le théâtre de marées anormales. Parfois au moins, sinon toujours, ces phénomènes peuvent avoir pour origine des tremblements de terre sous-marins, et justement il ne manque pas de séismes qui agitent les côtes anglaises et françaises de la Manche, et dont les épicentres tout à fait inconnus gisent peut-être quelque part sous mer au large du Finistère et de la Cornouailles.

Le trait sismique caractéristique de la région reste la dispersion de nombreux épicentres, tous assez pauvres en nombres de séismes. On doit donc supposer une cause générale, mais peu intense, d'instabilité. Ce ne peut être que l'effort continué du plissement armoricain, sans pouvoir, pour cela, nier toute influence locale à plusieurs failles. Et cette suggestion est d'autant plus plausible que les mêmes circonstances vont se représenter dans la région suivante, Bretagne et Vendée, dont l'histoire géologique est à peu de chose près la même, et qui constituent un autre fragment de la chaîne Armoricaine, aujourd'hui bien déchue, de l'ancien continent atlantique.

1. Altamon. — 2. Arlington. — 3. Austell (S[t]). — 4. Bampton et Tiverton. — 5. Barnstaple. — 6. Blisland. — 7. Bostcastle. — 8. Bournemouth. — 9. Bridgewater. — 10. Bristol, 3. — 11. Callington. — 12. Camelford, 3. — 13. Camelford (4. M. 35° E. de-). — 14. Challacombe. — 15. Cheddar, 2. — 16. Chedsey. — 17. Cornwall county, 7. — 18. Cornwall S.-W. — 19. Dartmoor. — 20. Devonshire county. — 21. Drewsteignton. — 22. Druits. — 23. East Budleig. — 24. Exmoor. — 25. Falmouth, 2. — 26. Fovant. — 27. Helston (3 M. 1/2 au nord de —), 2. — 28. Ilcester. — 29. Kelly. — 30. Launceston. — 31. Liskeard, 2. — 32. Lyme Regis, 2. — 33. Mabe. — 34. Entre Mabe et Wendron, 2. — 35. S[t] Mary (I. Scilly). — 36. S[t] Michel (M[t]), 3. — 37. Newham in Sancred. — 38. Padstow, 2. — 39. Parret valley, 2. — 40. Penzance. — 41. Poole. — 42. Redruth. — 43. Saltash. — 44. Schaftesbury. — 45. Scilly, 1. — 46. Skepton Mallet, 2. — 47. Sommersetshire County, 4. — 48. Stalbridge. — 49. Sturminster. — 50. Taunton, 3.

— 51. Teign (Haute). — 52. Truro. — 53. Trusham. — 54. Watertown. — 55. Wells, 4. — 56. Wendron. — 57. Weston-super-Mare. — 58. Wimborne Minster.

15° *Bretagne, Cotentin et Vendée ou massif armoricain français*

La Bretagne, le Cotentin et la Vendée constituent le fragment le plus vaste de l'ancien continent atlantique et de sa chaîne Armoricaine effondrée en partie et démantelée par les vagues de l'océan. En avant de la côte de nombreuses îles, îles anglo-normandes, les sept îles, Batz, Ouessant, Sein, les Glenans, Groix, Belle-Ile, Houat, Hoedic, Noirmoutiers et Yeu, ne sont, comme les îles Scilly, que les débris de terres qui s'avançaient dans l'ouest à une distance tout à fait inconnue. On distinguerait même deux phases dans le démantèlement du littoral; le récif de Rochebonne et les îles d'Yeu, Noirmoutiers et Belle-Ile seraient le vestige du plus ancien et plus méridional.

Contre ce massif antépermien, les sédiments postérieurs sont venus s'appliquer, exactement comme en Angleterre, en dessinant d'étroites bandes successives qui se recouvrent mutuellement. La vallée de l'Ex est ici représentée par une ligne en zigzag; de la baie de Carentan à la forêt d'Écouves vers les sources de l'Orne; de là à Angers en longeant la haute Sarthe et la chaîne du Coëvron; puis la limite orientale du massif granitique de la haute Sèvre Nantaise jusqu'à Parthenay; et enfin de là à l'océan vers les Sables-d'Olonne. Il est très remarquable que le premier segment de cette ligne, en direction S.E.-N.W., de la forêt d'Écouves à la baie de Carentan, passe près de La Hague et vienne ficher en Angleterre juste à Exeter, où commence la limite orientale des terrains primaires de la Cornouailles, mais en se relevant droit au nord.

La presqu'île du Cotentin est un " horst „ de formations paléozoïques, dont la fixité très ancienne est attestée par la présence, aux environs de Valognes, de sédiments littoraux des âges les plus divers. Sa côte occidentale a subi une érosion marine des plus violentes, sous l'action des vagues et surtout des courants. Les îles anglo-normandes en sont aussi des fragments. L'érosion marine suffit à expliquer les empiétements successifs de la mer depuis les temps historiques, sans qu'il soit nécessaire de faire

intervenir des affaissements insuffisamment démontrés de la côte au moyen âge.

Entre les derniers schistes précambriens et le poudingue pourpré du cambrien supérieur, l'île de Jersey a été le théâtre d'importants phénomènes éruptifs, qui correspondent exactement à ceux du Trégorois. Il y a donc eu là à cette époque si reculée une ligne de moindre résistance.

Si maintenant on considère la presqu'île Armoricaine proprement dite, on voit qu'elle est caractérisée par deux anticlinaux principaux, orientés à peu près W.-E., mais légèrement divergents à mesure qu'on s'éloigne vers l'est. Ils résultent d'un plissement de la fin du carboniférien, c'est-à-dire armoricain, qui a affecté tous les dépôts antérieurs. Cela sans préjudice d'autres plissements à peu près orthogonaux et postérieurs.

L'anticlinal du nord commence à l'île d'Ouessant et au pays de Léon, pour se poursuivre jusqu'à Alençon. Il borde les intrusions granitiques des montagnes d'Arrée et des collines du Maine. Il est très intéressant de noter que l'ancienne ligne éruptive Tréguier-Jersey, dont on a parlé plus haut, est précisément parallèle à l'axe des montagnes d'Arrée, au nord desquelles elle se trouve. Cet anticlinal du nord est principalement archéen. Cette coïncidence de direction entre le plissement et la ligne éruptive de moindre résistance ne peut être fortuite; c'est d'ailleurs un fait d'ordre très général.

L'anticlinal du sud, surtout paléozoïque, part de l'île de Sein, passe par la pointe du Raz et les Montagnes Noires, et se développe par les landes de Lanveaux le long du Morbihan, en s'infléchissant au S.-E., et finit par se terminer dans la Gâtine Vendéenne. Les intrusions granitiques y sont aussi importantes que pour celui du nord.

Le principal synclinal intermédiaire comprend les bassins du Finistère et de Laval.

Les rias de l'extrémité occidentale de la presqu'île bretonne sont uniquement dus à l'érosion marine qui a profité des synclinaux secondaires pour entamer profondément les schistes les plus tendres. Ils correspondent donc exactement à ceux de l'ouest du Comté de Cork, et sont comme ceux-ci précédés d'îles éparses, vestiges plus résistants de terres anciennes disparues.

De Nantes au pays de Coislin le sillon de Bretagne est un immense filon de quartz qui, parallèle au plissement, a sur 140 kilomètres de longueur résisté à la dénudation et en partie couvert de sa protection les terrains avoisinants.

Dans le sud, de petits bassins houillers (Chantonnay, Vouvant, etc.), sont tombés dans une faille qu'on peut suivre jusqu'au lac de Grand-Lieu, et dont la direction est à peu près parallèle au plissement armoricain du Bocage.

L'embouchure de La Loire est une dépression par où a pu pénétrer un golfe de la mer tertiaire qui s'étendait au S.-W. du continent calédonien et armoricain.

En de nombreux points les côtes de Bretagne présentent des signes manifestes d'affaissements modernes : Morlaix; Sainte-Anne au Goulet de Brest; estuaire de la Villaine; vallée de la Rance; archipel des Glenans; golfe du Morbihan, etc. Il est inutile d'entrer ici dans les détails d'un phénomène bien connu. Et il est plus important de parler de la séparation de l'Angleterre et de la France par l'effondrement postpléistocène de la Manche. Dans les deux pays les côtes qui se font face sont de constitution identique. De plus, le littoral y est jusqu'à l'isobathe de 25 mètres formé par une terrasse de limons fluviaux qui montrent qu'à l'époque pléistocène, la Manche formait une vallée prolongeant celle de la Seine, où un maître fleuve collectait toutes les petites rivières qui s'y jettent maintenant et qui avait son embouchure quelque part au large des îles Scilly et du Finistère. Comme la mer du Nord servait aussi de basse vallée au Rhin prolongé, il est possible que les bancs de Goodwin soient un reste non déblayé du seuil entre les deux fleuves.

Tels sont les principaux traits qui peuvent intéresser la sismologie dans la constitution géologique du massif archéen et primaire du N.-W. de la France. Voyons maintenant comment l'instabilité se répartit sur ce territoire, la plus vaste des subdivisions sismiques établies dans ce travail, mais que l'on a dû conserver entière à cause de l'uniformité de son histoire géologique.

On voit tout d'abord qu'un assez grand nombre d'épicentres se montrent aux îles normandes et tout autour du golfe. Peut-être certains séismes qui ont ébranlé simultanément la Bretagne et les Cornouailles peuvent avoir eu leur foyer quelque part dans la mer

du voisinage. Or, si depuis les temps primaires les environs de Valognes ont été peu dérangés, il n'en est pas moins vrai que dans la presqu'île du Cotentin les terrains anciens sont affectés de plis armoricains secondaires parallèles : Bruyères de Clécy, ride de Vire, ride de Domfront, tous trois en direction E.S.E.-W.N.W. C'est transversalement à cette direction que s'est manifestée l'antique ligne de moindre résistance Tréguier-Jersey, parallèle elle-même au plissement des montagnes d'Arrée. Il n'en faut pas plus que cette complexité d'actions dynamiques diverses pour rendre compte de l'instabilité des îles normandes et des côtes environnantes, sans faire intervenir, comme on l'a fait, ni les actions superficielles de démantèlement, qui d'ailleurs nulle part ne correspondent à des régions instables, en dehors tout au moins de toute autre cause efficiente, ni de problématiques et douteux indices d'affaissement moderne le long des côtes.

Mais il en va tout autrement si l'on considère l'effondrement postpléistocène de la Manche en bloc. Il s'agit là d'un incident géologique d'assez grande envergure pour laisser des traces d'instabilité et, avec au moins autant de titres que le plissement armoricain, il pourrait revendiquer sa part d'influence sur les séismes de la côte nord de la Bretagne, sur ceux de la côte sud de la Cornouailles, et surtout sur ceux dont le foyer sous-marin assez indéterminé se trouve au large de l'Angleterre et de la France. Or si l'effondrement de la Manche a ainsi une influence sismogénique bien définie, comment se fait-il que les côtes orientales de l'Angleterre, soumises également à l'influence de l'effondrement de la mer du Nord, ne connaissent pour ainsi dire pas les tremblements de terre. C'est que les conditions extérieures de l'effondrement ne sont pas tout à fait identiques de part et d'autre. Le profil transversal de la Manche est à peu près régulier, c'est-à-dire que cette mer représente une sorte de synclinal. La mer du Nord est bien aussi à fond plat, mais elle est séparée des côtes scandinaves opposées par une fosse marine relativement profonde, qui n'a point son analogue pour la Manche. Le contraste ne s'arrête point là. La Manche correspond à une cassure du continent paléozoïque et archéen, tandis que les côtes anglaises de la mer du Nord sont en pleins terrains tertiaires et mésozoïques qui se poursuivent sans interruption vers l'ouest pour venir s'appuyer à

la chaîne pennine. Il semblerait donc que la Manche résulte d'un affaissement d'un voussoir limité à deux cassures correspondant aux côtes de la Bretagne et de la Cornouailles, d'où séismes tout le long d'elles, tandis que la mer du Nord proviendrait d'un mouvement de bascule du territoire compris entre la chaîne pennine et le bord oriental de la fosse sous-marine de la mer du Nord le long des côtes scandinaves, et dans ce cas la côte n'est que l'intersection géométrique du plan d'eau avec un plan incliné, et par suite n'est définie par aucun incident géologique qui puisse la doter d'instabilité. Ces suggestions feraient donc disparaître une opposition jusqu'ici inexplicable entre les côtes de mers ouvertes à peu près, sinon tout à fait, à la même époque.

En résumé, nous avons pour expliquer les séismes de la côte nord de la Bretagne, soit le plissement armoricain, soit l'effondrement postpléistocène de la Manche, ou plutôt une survivance des efforts tectoniques correspondants, suivant que ces séismes ont leurs épicentres plus ou moins loin du littoral, ou même au large.

Brest et ses environs ont donné un certain nombre de séismes. L'importance de cette ville les lui a fait attribuer exclusivement, alors qu'ils avaient leurs épicentres à quelque distance au N.-E. ou au N.-W. On doit les expliquer par le plissement du Léon et des montagnes d'Arrée.

Le plissement méridional du massif, Landes de Lanveaux et de Questembert, rend compte de quelques séismes dans l'ouest du département du Morbihan. Observant que la région ainsi ébranlée est justement placée entre deux zones d'affaissement stables de l'archipel des Glenans et du Morbihan avec l'embouchure de la Villaine, on doit en conclure que ces séismes, indépendants de ces phénomènes, doivent être attribués au seul plissement.

Plus à l'est, Nantes est un centre d'instabilité notable, mais sans que cette ville ait toujours été le foyer des séismes signalés. Comme cette ville est au milieu du plissement qui accompagne le sillon de Bretagne et qui au delà de la Loire se continue par celui de la Gâtine, jalonné de quelques épicentres jusqu'à son extrémité à Parthenay souvent ébranlée, on peut dire que le plissement armoricain de Parthenay à Nantes survit sous forme de séismes, mais qu'au delà, consolidé par le sillon de Bretagne, il redevient parfaitement stable.

Un autre plissement armoricain, mais secondaire, et avec une direction plus accentuée vers le sud, affecte l'ouest de la Vendée. Il paraît plus stable que le précédent sans toutefois être dénué d'épicentres.

Il est évident que bien des tremblements de terre de Vendée sont en relation directe avec la faille des terrains carbonifériens de Chantonnay, Vouvant et Grand-Lieu dont on a déjà parlé, la position de leurs épicentres en fait foi, mais d'autres séismes, par exemple ceux de Laroche-sur-Yon, dont on ne connaît pas exactement les épicentres, ne peuvent pas être attribués à cette faille plutôt qu'au plissement de la Vendée sud-occidentale.

Cette faille de Chantonnay a une importance considérable. Ouverte d'abord à l'époque mésozoïque, après le Callovien, elle s'est réouverte plus tard, après le crétacé et en tout cas avant l'éocène moyen. S'appuyant sur l'indépendance constatée entre les lignes d'érosion marine des îles du fond nord-oriental du Golfe de Gascogne et les lignes directrices de leur constitution géologique, M. Barrois soupçonne que cette faille se prolonge au N.-W. et que masquée par 30 mètres d'eau, elle forme la rade des Coureaux de Belle-Ile. Et si cette faille entame ainsi le bord du massif breton, il faut renoncer à cette idée chère aux anciens géologues que la Bretagne est restée immobile pendant toute l'époque secondaire. Si cette mobilité, manifestée par les seconds mouvements postcrétacés de la faille de Chantonnay, n'est pas absolument éteinte, quoi d'étonnant qu'elle se révèle encore dans sa partie sud ou Vendéenne par d'assez nombreuses secousses. Un tremblement de terre récent, octobre 1902, est venu, en ébranlant Belle-Ile, confirmer en quelque sorte ces suggestions de M. Barrois, et les conséquences sismogéniques, qui en ont été tirées. Il n'est pas inutile de remarquer que la direction de cette faille est 130° (N.-S. par l'est), celle du faisceau des plis de la Cornouailles bretonne étant de 125°. Cette presque identité a sa signification : c'est la probable identification des efforts tectoniques correspondants. Et si ceux de la faille de Chantonnay ont eu une exacerbation postcrétacée, n'est-il pas rationnel que les plissements armoricains aient pu de nos jours déceler par des séismes un reste de survivance des efforts tectoniques auxquels ils ont dû naissance. L'on voit combien étroitement se tiennent toutes ces considérations d'histoire géologique.

En remontant au nord on retrouve une instabilité notable à Angers et dans ses environs. On peut en rechercher la cause dans les plissements énergiques qui y ont donné au silurien une allure si tourmentée. Mais, comme il n'est pas certain que les séismes en question aient eu leur épicentre dans cette ville, on peut chercher à les expliquer, comme ceux de Cholet, de Montrevault et de leurs environs, par un autre accident géologique du voisinage. Au S.-W. d'Angers se montre, en effet, une traînée S.E.-N.W. de petits paquets carbonifériens qui, pincés entre deux plissements, traversent la Loire à Ancenis et s'étendent jusqu'à Nort, en suivant une nouvelle grande faille. On les attribuerait alors aux plissements qui ne règnent qu'au sud de cette dislocation, et non à la faille, dont la partie nord au delà du fleuve est notoirement stable.

Le grand synclinal, qui s'étend du département de la Mayenne au bassin du Finistère en franchissant le plateau granitique de Rostrenen, est très stable. On y rencontre seulement quelques épicentres sporadiques comme il n'en manque pour ainsi dire nulle part à la surface du globe, et dont il faut chercher la raison dans des dislocations très locales. Cette stabilité du synclinal médian vient bien à l'appui de l'opinion émise ici, d'après laquelle l'instabilité en Bretagne est en relation avec le plissement, car on conçoit bien que dans le système formé par deux anticlinaux de premier ordre comprenant un synclinal, ce dernier soit au contraire des deux autres dénué de toute mobilité.

Les îles d'Ouessant, de Sein, etc., occupent par rapport à la Bretagne exactement la même position que les Scilly par rapport à la Cornouailles. La constitution et l'histoire géologique sont identiques de part et d'autre. Cependant on connaît quelques séismes pour les îles anglaises et aucun pour les îles françaises. Vouloir expliquer cette différence pour des îles homologues serait vouloir tomber dans des hypothèses illusoires.

1. St-Aignan. — 2. Ancenis. — 3. Angers, 10. — 4. Anjou, 3. — 5. Arrée (extrémité E. de la montagne d'—). — 6. Auray. — 7. Beaufou. — 8. Beaupréau. — 9. Belle-Ile-en-Mer. — 10. Bouaye, 2. — 11. Borchemaine. — 12. Bourgneuf, 2. — 13. Brest, 9. — 14. Bretagne, 2. — 15. Brieuc (St), 4. — 16. Brouzils et Chavannes. — 17. Cancale. — 18. Caumont, 2. — 19. Chantoceaux. — 20. La Chapelle-sur-Erdre. — 21. Château Giron, 3. — 22. Cheffois. — 23. Cherbourg, 3.

— 24. Cholet. — 25. Concarneau. — 26. Conception (La). — 27. Coutances, 4. — 28. Le Croizic. — 29. Cuguen, 2. — 30. S[t] Denis de Gastines. — 31. Dinan. — 32. Dol, 3. — 33. Donjes. — 34. Douarnenez. — 35. Érigné. — 36. Ernée, 2. — 37. Eynesse. — 38. Fougères. — 39. Cap Fréhel. – 40. Les Gardes. — 41. Granville, 2. — 42. Groix (en mer, entre — et Quiberon). — 43. Guérande. — 44. Guernesey, 6. — 45. Guiler, 2. — 46. Guipavas. — 47. Hennebont. — 48. S[t] Jean de Boiseau. — 49. Jersey, 5. — 50. Josselin. — 51. Laroche-sur-Yon, 4. — 52. Laval. — 53. Locmaria-Flouzane. — 54. Loge-Fougereuse. — 55. Basse-Loire, 3. — 56. Lorient, 3. — 57. S[t] Malo, 3. — 58. Dép[t] de la Manche. — 59. Marcillé-Robert. — 60. S[t] Maurice-le-Girard. — 61. Collines de Mayenne. — 62. S[t] Méen. — 63. Mont S[t] Michel. — 64. Montaigut. — 65. Montrevault. — 66. Morbihan. — 67. Nantes, 17. — 68. Noirmoutiers. — 69. Iles Normandes, 4. — 70. Paimbœuf. — 71. Parthenay, 5. — 72. Passais. — 73. Le Pellerin. — 74. Mont Pinson. – 75. La Planche. — 76. Pleurtuit. — 77. La Ramée. — 78. Rieux. — 79. Saligny. — 80. S[t]-Servant. — 81. Vannes, 2. — 82. Vendée, 2. — 83. Vire. — 84. Vallée de la Vire, au sud de S[t]-Lô. — 85. Vitré. — 86. Ile d'Yeu.

Ce très grand nombre d'épicentres pauvres est un point de similitude de plus avec la Cornouailles anglaise et donne à penser que la cause des séismes doit être la même de part et d'autre. Elle doit donc être cherchée dans un trait géologique commun, qui ne peut guère être que le plissement armoricain.

CHAPITRE III

Les plaines orientales anglaises

Le versant anglais de la mer du Nord est une succession de sédiments qui depuis les temps carbonifériens se sont déposés dans des mers ouvertes à l'est en s'appuyant aux chaînes calédonienne et armoricaine et en se recouvrant successivement en retrait les uns par rapport aux autres, de telle sorte qu'ils apparaissent en bandes étroites, plus ou moins grossièrement parallèles. Les alternatives d'émersion et d'immersion ont été nombreuses, et en particulier la chaîne Pennine qui coupe l'Angleterre du nord au sud, de l'isthme de Solvay à Exeter, date d'une époque peu postérieure au carboniférien. Ce qu'on en voit maintenant est un bien faible reste de ce qu'elle a été avant sa dénudation. Mais ce vestige suffit pour que les territoires, dont il s'agit ici, descendent en pente douce sur la mer du Nord et la Manche, en montrant les terrains secondaires et postérieurs en bandes successives dont les rides ont leurs plus roides talus tournés vers l'ouest, comme la chaîne Pennine ellemême. La dernière immersion qui ait pour nous quelque importance est celle qui à l'époque pléistocène a sous les yeux de l'homme ouvert la mer du Nord et la Manche, de sorte que les fleuves anglais ne sont plus que des tronçons des anciens cours d'eau.

Cette esquisse de l'histoire et de la constitution géologiques de ces territoires doit *à priori* faire prévoir une grande stabilité, et c'est bien en effet ce qui se réalise. D'une façon générale les tremblements de terre n'y seront que des phénomènes sans importance dont il faudra chercher la cause dans des dislocations locales plus ou moins anciennes, mais non dans des accidents géologiques d'ordre général, comme cela s'est présenté dans les régions calédoniennes et armoricaines étudiées plus haut.

En maints endroits les côtes présentent des indices d'affaissement récent. Faibles souvenirs des grands mouvements pléisto-

cènes, il ne semble pas qu'ils introduisent nulle part un élément d'instabilité sismique et on a eu à expliquer la différence que montrent à ce point de vue les côtes de la mer du Nord et de la Manche.

Quant aux phénomènes d'abrasion de falaises, si fréquents le long de ces côtes, on ne doit pas s'attendre à les voir en relation avec des séismes, car ils résultent d'actions trop superficielles.

16° *Région des lacs*

Cette région est limitée : à l'est par l'arête de la chaîne Pennine entre le Bradschaw Hill et le High Peak; au S.-E. par la ligne de partage des eaux entre les bassins de la Severn et de la Mersey jusqu'à l'angle S.-E. du Flintshire; et enfin à l'ouest par la mer et par l'axe de la presqu'île de Birkenhead, entre les estuaires de la Dee et de la Mersey. Géographiquement cette région appartient au versant occidental de l'Angleterre, mais comme géologiquement elle est composée par les mêmes sédiments que ceux qui se sont déposés le long de la côte orientale du vieux continent atlantique, force nous est bien de l'étudier dans ce troisième chapitre où, après ces explications, il ne semble plus aussi paradoxal de la voir placée.

Le sud de la région est couvert par les dépôts carbonifériens et triasiques, tandis qu'au nord se montre le district volcanique ancien et si pittoresque des Lacs. On conçoit que les mouvements qui ont relevé la pénéplaine anglaise vers l'ouest ont d'autant plus disloqué les terrains qu'ils étaient plus rapprochés de l'obstacle, c'est-à-dire de la chaîne calédonienne. Aussi le versant occidental de la chaîne Pennine, qui en est en même temps le plus roide, est-il le plus instable.

Les séismes sont relativement assez fréquents dans le trias du Lancashire et dans le houiller de Manchester. Dans chaque cas particulier des dislocations locales ne manquent pas pour les expliquer. C'est ainsi que la faille de l'Irwell, reconnue de Poynton à Bolton, sur plus de 20 milles de long, de direction N.N.W.-S.S.E., avec un rejet de plus de 1000 mètres en certains points, et recoupée par plusieurs autres diaclases moins importantes de direction E.-W., intervient nettement dans les séismes de ce

territoire. Davison la met aussi en relation avec les secousses du district minier de Pendleton, et il n'y a pas de raison à ne pas se conformer à cette opinion.

Le district des Lacs s'étend sur l'ouest des Comtés de Cumberland et de Westmoreland. Il est enserré entre le Solway Forth et la Morecambe Bay. De Whitehaven à l'île Walney il est bordé de grès rouges triasiques et permiens, tandis que tout le reste de son périmètre est formé de carboniférien, au milieu duquel il émerge. C'est un bloc de terrains anciens et éruptifs où de nombreuses et très profondes dislocations convergentes ont donné des Tarns, ou Lochs, dont le fond tombe quelquefois brusquement bien au-dessous de celui de la mer voisine. Les plus importantes de ces fractures, celles de Windermere et de Thirimere se font face de part et d'autre du massif en se prolongeant l'une l'autre en direction N.N.W.-S.S.E. C'est là le véritable axe sismique de cette région, assez instable. Il n'y a pas le moindre doute que ce ne soit à un reste de mobilité de ces cassures qu'il faille attribuer les séismes qu'on y ressent et non à une activité volcanique éteinte depuis le silurien moyen (ordovicien supérieur).

Les affaissements récents qu'on aurait relevés dans les estuaires de la Dee et de la Mersey ne donnent lieu à aucun mouvement sismique.

1. Ambleside, 2. — 2. Arnside. — 3. Atsbury. — 4. Bolton. — 5. Bowness. — 6. Cheadle. — 7. Chorley. — 8. Clitheroe. — 9. Colne. — 10. Coniston. — 11. Crosthwaite, 8. — 12. Cumberland County. — 13. Dalton. — 14. Everton. — 15. Furness (Presqu'île de), 4. — 16. Hazlingdon, 2. — 17. Iston. — 18. Kendal. — 19. Knutsford. — 20. Lancashire County, 4. — 21. (Nord de) Manchester, 4. — 22. Maryport. — 23. Morecambe-Bay. — 24. Ormskirk. — 25. Pendleton, 3. — 26. Preston, 2. — 27. Rochdale, 4. — 28. Rydal. — 29. Settle. — 30. Troutbeck. — 31. Waterloo. — 32 Whitehaven. — 33. Wigam.

17° *Des Cheviots à l'Humber*

Cette région est la première de celles qui appartiennent en même temps géographiquement et géologiquement au versant oriental. Appuyée à l'ouest à la chaîne Pennine, elle est bornée au sud par une faible arête qui, partant du High Peak, court d'abord au S.-E. jusque près d'Alfreton, puis remonte au N.-E. jusqu'à l'estuaire de l'Humber en séparant les eaux de la Trent et du

Don. Les roches éruptives modernes se montrent dans le nord (Northumberland et Durham), tandis qu'au S.-E les dépôts jurassiques et crétacés se relèvent le long de la côte par les North et South York Moors, ces dernières collines en prolongement des Lincoln Wolds de la région suivante. A l'ouest le carboniférien atteint une grande extension.

La région est très stable. Quelques rares et pauvres épicentres se montrent çà et là, qu'on peut expliquer par des dislocations locales, sans que rien d'intéressant soit à signaler.

1. Boston-Spa. — 2. Doncaster. — 3. Dunston. — 4. Gateshead. — 5. Great Whernside. — 6. Halifax. — 7. Holderness. — 8. Knottingley. — 9. Malton. — 10. Methley. — 11. Ripon, 2. — 12. Rotherham. — 13. Ryhill. — 14. Scarborough. — 15. Sheffield. — 16. York, 5. — 17. Yorkshire. — 18. Whalton. — 19. Wharfe.

18° *Charnwood Forest et hauteurs de Lincolnshire*

Cette région est bornée à l'ouest par la ligne de partage des eaux de la mer du Nord et du canal de Bristol, qui part du High Peak dans la chaîne Pennine, et au sud par celle d'entre Welland et Trent au nord et Nen au sud.

Les séismes y sont relativement peu fréquents. Dans le S.-W. se voit aux environs de Birmingham un groupe d'épicentres au milieu du carboniférien. Leur instabilité relative peut être attribuée aux dislocations locales et nombreuses résultant du relèvement de ce terrain contre les derniers vestiges de la chaîne Pennine, dès longtemps rabotée par la dénudation.

D'après les études de Davison les séismes de Leicester sont dus à une faille anticlinale de date précarboniférienne et dont les glissements n'auraient pas encore cessé.

Le même sismologue attribue le tremblement de terre du 28 janvier 1898 au groupe de failles de Kelton et de Duddington, tangentes à l'aire ébranlée. Cela me paraît très problématique. J'ai bien montré ailleurs (*Essai sur le rôle sismogénique des principaux accidents géologiques*, Beiträge zur Geophysik, Bd. VI. 1903) que dans certains cas un effort tectonique peut ne pas coïncider avec une faille qu'il a ouverte ou avec une ligne d'épicentres à laquelle il donne naissance, mais on ne saurait aller jusqu'à

admettre entre l'effort et l'aire ébranlée un écart tel que celui-là soit tout juste tangent à celle-ci.

1. Abbots Bromley. — 2. Barnage. — 3. Beaston, 2. — 4. Brewood, 2. — 5. Burley. — 6. Burton-on-Trent. — 7. Camphill. — 8. Charnwood Forest. — 9. Corby. — 10. Derby. — 11. Dudley. — 12. East Retford. — 13 Glanford. — 14. High Peak. — 15. Iverness. — 16. Kirton-in-Lindsay, 2. — 17. Lincoln, 2. — 18. Lincolnshire. — 19. Mansfield. — 20. Nottingham, 2. — 21. Staffordshire. — 22. Stamford, 4. — 23. Wallsall. — 24. Willenham, 2. — 25. Wolverhampton. — 26. Woodhouse Eaves, 2.

19° *Bassin de la Severn*

Géographiquement cette région est bien définie; mais géologiquement elle l'est beaucoup moins bien, puisque le terrain carbonifère y repose sur le silurien et qu'une bande de vieux grès rouge, dépendant en réalité de la chaîne calédonienne, l'accompagne dans les comtés d'Hereford et de Brednock.

D'importants séismes à grande aire d'action se sont plusieurs fois manifestés dans les comtés d'Hereford et de Shrop. A défaut des derniers plissements calédoniens, qui viennent mourir dans l'ouest de la région, et qui éteints partout ne sauraient être invoqués ici, les dislocations du terrain carbonifère relevé contre eux suffisent à donner raison de cette instabilité, sans aucune intervention des efforts tectoniques correspondant aux anciens et importants phénomènes éruptifs du pays de Galles. A propos du grand tremblement de terre du 17 décembre 1896, Davison met en jeu un relèvement de deux anticlinaux siluriens, celui de Woodhope au N.-E. du foyer d'Hereford et celui de May Hill au sud de celui de Ross.

On a signalé un exhaussement moderne des terres basses de l'estuaire de la Severn, mais ce phénomène ne paraît avoir aucune relation sismique.

1. Bredwardine. — 2. Broseley, 4. — 3. Bytown. — 4. Coalbrook-Dale. — 5. Galway, 6. — 6. Glocester. — 7. Glocestershire. — 8. Glousow, 2. — 9. Hereford, 13. — 10. Herefordshire. — 11. Kinnaston. — 12. Leamington. — 13. Ledbury. — 14. Middle. — 15. Pembridge, 2. — 15. Shrewsbury. — 17. Shropshire. — 18. Stretton. — 19. Wenlock. — 20. Worcester.

20. — *Anglican Heights.*

Cette région comprend le bassin de l'Ouse et des autres rivières qui se jettent dans le sud du Walsh. Aussi participe-t-elle à la très grande stabilité des plaines orientales anglaises, doucement relevées contre les derniers et insignifiants reliefs méridionaux de la chaîne Pennine rabotée. Comme partout ailleurs, quelques séismes doivent leur origine à des dislocations locales dont l'étude doit être réservée aux sismologues indigènes, sans pouvoir entrer dans un travail d'ensemble comme celui-ci.

Le Walsh et les Fens sont les vestiges d'un grand estuaire marin. Mais à l'époque glaciaire, le pays était émergé et faisait partie d'une plaine continue de débris réunissant l'Angleterre et l'Allemagne du Nord et au travers de laquelle s'est ouverte la mer du Nord. Ces derniers mouvements n'ont laissé aucune trace d'instabilité sismique, comme on l'a déjà fait remarquer bien des fois.

1. Beccles. — 2. Bedford. — 3. Cambridge. — 4. Crick. — 5. Ely, 2. — 6. Hopton. — 7. Northampton, 2. — 8. Iaxley.

21° *Weald et Downs. Ile de Wight.*

Cette région comprend le bassin de la Tamise et la côte de la Manche depuis Folkestone jusqu'à l'extrémité occidentale de l'île de Wight.

Au point de vue géologique, elle est caractérisée par le bombement du Weald et par des plis armoricains qui s'étendent des Mendip Hills au Boulonnais par dessous le Pas-de-Calais, détroit qui n'est qu'une tranchée ouverte à une époque très récente entre la France et l'Angleterre et au travers de terrains qui se correspondent exactement de rive à rive. Cette continuité géologique entre ces deux pays, déjà soupçonnée dès 1855 par Godwin-Austin, qui y voyait la possibilité et même la probabilité de retrouver les couches de houille sous Londres et ses environs, a été depuis complètement confirmée par de nombreux et éminents géologues. Les Downs sont ces ridements armoricains qui enserrent le Weald et présentent leur talus abrupt vers le

nord. Et ces plissements ont affecté les sédiments postcarbonifériens qui dans le S.-E. de l'Angleterre et le N.-W. de la France se sont déposés dans une mer ouverte à l'est et baignent la côte orientale du vieux continent atlantique. Ces terrains ont subi de nombreuses vicissitudes dont la plus remarquable est celle du bombement wéaldien, postérieurement arasé et dénudé. Les Downs du nord et du sud sont les plus importantes de ces rides armoricaines et leur direction s'infléchit de plus en plus vers le S.-E. à mesure qu'on s'avance vers le sud.

Il est manifeste sur la carte que les centres d'instabilité sont liés à ces plissements et cela d'autant plus clairement que leurs prolongements français dans le pays de Bray et le Boulonnais renferment aussi des épicentres d'une certaine importance, comme on le verra dans la seconde partie de ce travail.

En outre, des failles transversales traversent le Weald, et l'une d'elles, au moins celle dite de Medina dans l'île de Wight, a pu être très vraisemblablement considérée comme ayant donné lieu à d'importants séismes conjointement avec le plissement armoricain qui traverse cette île. C'est dans ce sens qu'on peut admettre l'opinion d'O'Reilly qu'une importante ligne sismique traverse l'Angleterre sud-orientale en reliant la côte méridionale du Pays de Galles à l'embouchure de la Somme. Cette ligne est précisément le prolongement des Mendip Hills par l'intermédiaire des South-Downs.

Londres, comme capitale, accuse un assez grand nombre de secousses à épicentres véritablement inconnus, mais qui venaient probablement des North Downs ou du Weald.

En résumé, les séismes de cette dernière région reconnaissent trois causes efficientes principales; les plissements armoricains prolongés jusqu'en France sous toute la série sédimentaire; les failles transversales qui les disloquent; enfin le bombement wéaldien. L'influence particulière des plissements est confirmée par ce fait que leurs prolongements continentaux jusqu'à l'Erz-Gebirge et la Bohême, où ils sont connus sous le nom d'hercyniens ou de varisciques, sont jalonnés d'épicentres, jouissant partout, comme en Cornouailles et en Bretagne, du caractère d'être plus nombreux que riches en secousses.

1. Abingdon. — 2. Adderbury. — 3. Aford-House, 2. — 4. St-Albans. — 5. Arundel. — 6. Bromby. — 7. Chelsea. — 8. Chichester, 9. — 9. Chichester Harbour, 2. — 10. A quelques milles au N.-W. de Chichester. — 11. Chulford. — 12. Dorking. — 13. Eltham, 2. — 14. Ennsworth. — 15. Essex County. — 16. Folkestone. — 17. Gosport, 2. — 18. Headley. — 19. Hampshire County. — 20. Hastings. — 21. Havervill. — 22. Hertfordshire, 2. — 23. Horsham. — 24. Kent County, 2. — 25. Leden. — 26. Lewes. — 27. Lindfield et East Grinstead. — 28. Londres, 12. — 29. Malborough Hills. — 30. Maresfield, 2. — 31. Molesby. — 32. Oxfordshire. — 33. Portsmouth, 2. — 34. Sandwich. — 35. South Downs. — 36. Stepney. — 37. Sudbury, 2. — 38. Sussex County. — 39. Waltham. — 40. Worthing, 3. — 41. Wivenhoe.

NOTE

Le tableau récapitulatif ci-joint fait ressortir les nombres de tremblements de terre et d'épicentres relatifs à chacune des trois grandes divisions géologiques et des 21 régions sismiques particulières. Plusieurs de ces dernières ont donc dû être partagées, puisque pour les raisons données au début elles ne coïncident pas exactement avec les unités géologiques. Si l'on compare les résultats numériques en défalquant les 443 séismes de Comrie, cas tout à fait exceptionnel et anormal de nature à masquer la vue d'ensemble de la répartition des phénomènes, on a le tableau suivant :

		Épicentres.	Séismes.
Territoire des plissements	Armoricains	185	335
	Calédoniens	132	333
Plaines orientales anglaises		117	168

Les plissements armoricains sont caractérisés par des épicentres nombreux et moyennement riches en séismes, jalonnant leurs principales rides ; ils se répartissent assez régulièrement sur toute la surface occupée. Au contraire, les territoires des plissements calédoniens se distinguent par des épicentres moins nombreux et parmi eux un certain nombre très riches en séismes sont en relation évidente avec les principales fractures. En outre de grandes aires sont absolument indemnes de tout choc. Enfin les plaines orientales anglaises présentent des épicentres assez régulièrement disséminés, mais tous très pauvres en séismes et partant sans importance.

La carte schématique confirme ces conclusions, toutes en concordance avec les considérations détaillées exposées dans le

texte, la signification des chiffres n'ayant guère de valeur au regard de la répartition.

Tableau du nombre d'épicentres et séismes correspondants

	Régions séismiques.	Épicentres.	Séismes.		Régions séismiques.	Épicentres.	Séismes.
Territoire des plissements calédoniens.	I	2	5	Territoire des plissements armoricains	XII (**)	5	9
	II				XIII (**)	14	35
	III	11	14		XIV	58	88
	IV	36	168		XV	86	166
	V	5	7		XXI (**)	22	37
	VI	22	481			185	335
	VII	11	15	Territoire des plaines orientales anglaises	XVI	33	58
	VIII	12	22		XVII	19	24
	IX	8	13		XVIII (**)	25	36
	X	3	4		XIX (*)	13	17
	XI				XX	8	9
	XII (*)	6	8		XXI (*)	19	34
	XIII (*)	10	14			117	168
	XIV (**)	7	25	Mal déterminés.		3	104
		133	776	Totaux		438	1383

(*) Nord de la région.
(**) Sud de la région.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos 216
La chaîne Calédonienne 220
La chaîne Armoricaine 221
Les plaines orientales Anglaises 222

CHAPITRE PREMIER

La chaîne Calédonienne

1° Les îles Shetlands 223
2° Les Hébrides 224
3° Rivage oriental du Minch, ou versant occidental des Highlands . . 225
4° Canal Calédonien, ou Grand Glen, ou Loch Ness 227
5° Versant nord des Grampians 230
6° Grampians du nord, ou Perthshire 230
7° Grampians du sud et Cantyre 231
8° Dépression des Firth of Clyde et Firth of Forth, ou Lowlands . . . 232
9° Southern Uplands écossais et Cheviots 235
10° Irlande septentrionale 236
11° Plaine du Shannon 237
12° Irlande méridionale 237
13° Pays de Galles 239

CHAPITRE II

La chaîne Armoricaine

14° Cornouailles 241
15° Bretagne, Cotentin et Vendée, ou massif armoricain français. . . . 244

CHAPITRE III

Les plaines orientales Anglaises

16° Région des lacs 253
17° Des Cheviots à l'Humber 354
18° Charnwood Forest et hauteurs du Lincolnshire 255
19° Bassin de la Severn 256
20° Anglican Heights 257
21° Weald et Downs. Ile de Wight 257
Tableau du nombre d'épicentres et de séismes correspondants 261

Carte schématique de l'Instabilité dans l'Europe du Nord-Ouest. (Iles-Britanniques. Bretagne-Vendée) par le Comte de Montessus de Ballore.

MÉMOIRE

SUR UNE CLASSE

DE

QUADRATURES DE FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR RAPPORT A LEUR MODULE

PAR

M. le Vte de SALVERT
Docteur ès-sciences
Professeur à la Faculté libre des sciences de Lille

La notion des intégrales elliptiques envisagées comme fonctions de leur module joue, comme on le sait, un rôle considérable dans l'Analyse. Aussi tous les traités complets de cette Science rapportent-ils, dans cet ordre d'idées, plusieurs formules importantes déduites de la différentiation de ces fonctions par rapport à leur module. Mais par contre, sinon tous, du moins les plus répandus, ne font mention d'aucune formule explicite qui provienne de l'intégration des mêmes fonctions par rapport à ce module.

Or, la connaissance exacte de l'expression des composantes de l'Attraction, sur un point quelconque, du Solide que, par une métaphore expressive ayant pour but et pour excuse d'abréger le langage, nous avons appelé *Parallélipipède Ellipsoïdal* (*), se

---

(*) Nous voulons dire le Solide à surfaces courbes délimité par trois couples de surfaces homofocales appartenant tous trois à un même Système Ellipsoïdal.

ramène à la détermination de certaines intégrales doubles que l'on peut interpréter comme les quadratures, par rapport à leur module, du produit d'intégrales elliptiques de première et de deuxième espèces par certaines fonctions algébriques très simples de ce module, ainsi qu'on peut le constater déjà à propos du cas particulier intéressant traité dans le premier Chapitre de notre *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal* (*).

Cela étant, ayant entrepris l'étude de ce problème difficile de Mécanique, nous nous sommes trouvé contraint, en présence du silence des traités d'Analyse à notre connaissance sur toute question de l'ordre que nous venons de dire, à imaginer et créer de toutes pièces une méthode rationnelle pour la détermination de la classe de quadratures du genre sus-indiqué qui s'imposait ainsi à notre attention, et nous avons été assez heureux, après de longs efforts, pour arriver à des résultats très nets et très précis à ce sujet.

Nous croyons donc intéressant d'exposer ici à part, dans ce nouveau Mémoire, à titre de problème d'Analyse pure, la série des déductions assez laborieuses qui nous ont amené définitivement à ces résultats, c'est-à-dire comme conclusion, à la forme explicite de l'expression des quadratures en question.

Comme la route que nous aurons à parcourir pour y arriver sera longue et hérissée de nombreux obstacles, nous avons cru devoir, pour faciliter l'intelligence de l'exposition, la fractionner en six étapes (ou paragraphes) successives, dont nous résumerons pour chacune le résultat acquis, en le formulant par l'énoncé d'une proposition ou Théorème d'Analyse, lesquels Théorèmes formeront comme l'ossature ou la synthèse de notre théorie, en sorte qu'une fois la lecture achevée, leur simple récapitulation permettra très aisément à l'esprit du Lecteur de se remémorer et d'embrasser d'un seul coup d'œil tout l'ensemble du chemin parcouru.

Une dernière observation en terminant cette Introduction.

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, T. XXI (1897), 2e Partie, pp. 131-250.

Comme le point de départ de cette recherche, de même que la question elle-même, est emprunté au premier chapitre de notre Mémoire précité sur l'*Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal,* nous nous trouverons dans l'obligation de faire de très fréquents emprunts ou renvois au premier Chapitre en question et, dès lors, pour éviter au Lecteur la répétition incessante de la même désignation, fastidieuse par sa fréquence autant que par sa longueur, il sera entendu une fois pour toutes que cette locution : " notre Chapitre I " signifiera le Chapitre I du susdit *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal,* dont le présent travail était, à vrai dire, destiné primitivement à faire partie intégrale si nous ne nous étions pas trouvé contraint par la complication et la difficulté de la question à lui donner une pareille étendue.

I

Nous avons déterminé dans le dit Chapitre I, par le moyen d'un changement de variables, l'expression explicite des intégrales doubles que nous désignions par le symbole $I^{(\varpi)}$ défini par l'équation (28) de ce Chapitre, après avoir fait remarquer, pour légitimer ce changement de variables (pp. 30-31), que si l'on n'a pas recours à ce moyen, les dites quantités se présentent en l'état sous l'aspect d'une combinaison linéaire d'intégrales, par rapport au module, du produit de fonctions elliptiques de première et de deuxième espèces par certaines fonctions algébriques très simples de ce module.

Or, comme nous avons ainsi obtenu dans ce même chapitre, pour les mêmes quantités $I^{(\varpi)}$, une expression remarquable [formule (86)] constituée par la somme algébrique de huit fonctions elliptiques de troisième espèce, dont l'argument, le paramètre et le module étaient pour chacune une certaine fonction rationnelle très simple (à numérateur et dénominateur linéaires) des variables proposées, ou plus exactement de leurs limites données, il suit donc du rapprochement de ces deux faits que, bien que chacune des intégrales spécifiées tout à l'heure, dont l'introduction s'imposait ainsi dans l'expression des quantités précitées $I^{(\varpi)}$, paraisse appartenir isolément à une catégorie analytique beaucoup plus compliquée et sur laquelle les divers traités d'Analyse ne fournissent aucune indication, néanmoins certaine combinaison linéaire de semblables fonctions se réduit à une somme de fonctions elliptiques répondant aux conditions que nous avons dites : absolument de même que pour les fonctions elliptiques de deuxième ou de troisième espèce, leurs formules d'addition nous montrent qu'une somme algébrique de semblables fonctions de certains arguments s'exprime, dans le premier cas, par un produit

de fonctions elliptiques de première espèce de ces arguments, et dans le second par le logarithme d'une fraction rationnelle de fonctions de première espèce des dits arguments, c'est-à-dire par conséquent dans l'un et l'autre cas par des fonctions plus simples (*) que les fonctions envisagées elles-mêmes (**).

Le résultat emprunté au Mémoire précité fait donc ainsi ressortir, à propos de ces fonctions inétudiées jusqu'ici, comme un nouveau cas d'une sorte de fait analytique de caractère plus général qu'il nous a semblé intéressant de mettre en lumière à propos de toute une classe d'intégrales semblables (nous voulons dire encore de quadratures, par rapport au module, du produit de fonctions elliptiques par certaines fonctions algébriques très simples de ce module), en montrant que l'on pourra former une infinité de combinaisons linéaires déterminées de telles intégrales qui s'exprimeront à l'aide de combinaisons linéaires de fonctions elliptiques dont nous déterminerons tous les éléments (module, argument et paramètre), et de fonctions algébriques dont nous mettrons en évidence toutes les irrationalités.

Cette propriété des dites intégrales ainsi établie nous fournira alors, comme on le verra, d'une façon toute naturelle, leur expression générale, simplement au moyen des fonctions elliptiques de deux seuls modules ou arguments nouveaux et d'un terme algé-

---

(*) Ce mot *simple* vise ici, dans notre pensée, l'ordre dans lequel les diverses fonctions transcendantes sont successivement engendrées par le Calcul Intégral, les divers degrés de complication croissante correspondant ainsi, le premier aux fonctions circulaires, arcs de cercle, exponentielles et logarithmes; le second aux fonctions elliptiques; le troisième aux fonctions hyperelliptiques; le quatrième aux fonctions abéliennes, etc.

(**) Les formules d'addition que nous rappelons sont, comme on le sait, les suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} Z(\varphi+\psi)-Z(\varphi)-Z(\psi)=k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}\psi \operatorname{sn}(\varphi+\psi), \\ \Pi(\varphi+\psi,h)-\Pi(\varphi,h)-\Pi(\psi,h)=\frac{1}{4}\log\frac{MN}{PQ}, \end{array}\right.$$

les symboles M, N, P, Q tenant lieu des quatre expressions :

$$M = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi - h)\operatorname{sn}^2\psi, \qquad N = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2(\psi - h),$$

$$P = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi + h)\operatorname{sn}^2\psi, \qquad Q = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2\varphi \operatorname{sn}^2(\psi + h).$$

brique proportionnel à un seul et même radical pour toutes, l'autre facteur étant une fonction entière du module et de l'argument primitifs, nous voulons dire ceux qui figurent dans l'élément des intégrales considérées elles-mêmes.

La première chose à faire pour atteindre le but que nous venons d'indiquer consiste évidemment, en considérant d'abord le fait sus-mentionné qui doit ressortir de la façon spécifiée tout à l'heure des résultats établis dans le Mémoire précité, à dégager l'égalité qui l'exprimera des notations spéciales à la question de Mécanique qui nous a procuré ces résultats, de manière à présenter alors la dite égalité comme une formule générale (ou théorème) d'Analyse ayant intrinsèquement sa signification et son intérêt propres, complètement indépendants dès lors du problème spécial d'Attraction qui nous l'aura révélée.

Pour cela, nous reportant à la définition ci-dessus rappelée des intégrales doubles $I^{(\varpi)}$ précitées [formule (28) du Chap. I], nous commencerons par substituer, respectivement à la constante ϖ et aux deux variables s et t, les constantes complémentaires g^2 ou g'^2 et les variables x et k définies séparément par les équations

$$(1)\qquad g^2+g'^2=1,\quad g'^2=1-g^2,\quad \varpi=m^2g'^2=m^2(1-g^2),$$

$$(2)\qquad s=l^2+m^2x^2,\qquad t+\varpi+n^2=-m^2k^2,$$

ou bien, quant à la seconde variable, en tenant compte de la relation fondamentale (5),

$$(2^{\text{bis}})\left\{\begin{aligned} t &= -(\varpi+n^2+m^2k^2)=-[m^2(1-g^2)+n^2+m^2k^2]\\ &= -(l^2+m^2+n^2)+[l^2+m^2(g^2-k^2)]=l^2+m^2(g^2-k^2)\end{aligned}\right.$$

en convenant en même temps de faire correspondre aux valeurs initiales s_1 et t_1 et aux valeurs finales s_2 et t_2 de s et t, respectivement les valeurs initiales 0 et g, et les valeurs finales x et k elles-mêmes pour x et k, de telle sorte que l'on aura alors à la fois :

$$(2^{\text{ter}})\qquad s_1=l^2,\qquad t_1=l^2,\qquad \text{et}\qquad s_2=s,\qquad t_2=t.$$

Cela posé, l'ensemble de ces définitions, jointes à celles des symboles f, S et T [formules (14) et (29) du Chap. I], donnant sans

peine, en tenant compte de nouveau de la relation fondamentale (5) $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, successivement les valeurs

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
& ds = m^2.\,2x\,dx, \qquad dt = -\,m^2.\,2k\,dk, \\
& s - t = (l^2 + m^2x^2) - [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = m^2(x^2 + k^2 - g^2), \\
& l^2 - s = -\,m^2x^2, \\
& n^2 + s = n^2 + (l^2 + m^2x^2) = -\,m^2 + m^2x^2 = -\,m^2(1 - x^2), \\
& s + t + \varpi - f = s + t + \varpi - (l^2 - n^2) \\
& \qquad = (t + \varpi + n^2) - (l^2 - s) \\
& \qquad = -\,m^2k^2 + m^2x^2 = -\,m^2(k^2 - x^2), \\
& \mathrm{S} = (l^2 - s)(n^2 + s) = -\,m^2x^2[-\,m^2(1 - x^2)] = m^4x^2(1 - x^2), \\
& n^2 + t = -\,\varpi - m^2k^2 = -\,m^2g'^2 - m^2k^2 = -\,m^2(g'^2 + k^2), \\
& l^2 - t = l^2 - [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = -\,m^2(g^2 - k^2), \\
& \mathrm{T} = (l^2 - t)(n^2 + t) = -\,m^2(g^2 - k^2)[-\,m^2(g'^2 + k^2)] \\
& \qquad = m^4(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2), \\
& \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}} = \frac{m^2.\,2x\,dx}{m^2x\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \\
& \frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} = \frac{-\,m^2.\,2k\,dk}{m^2\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}} = \frac{-\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}},
\end{aligned}
\right.
$$

si nous convenons dès maintenant pour toute l'étendue de ce Mémoire, d'introduire les deux notations abrégées

$$
(4) \qquad \mathrm{X} = (1 - x^2)(k^2 - x^2), \qquad \mathrm{K} = (g^2 - k^2)(g'^2 + k^2),
$$

l'élément de l'intégrale double en question I^{ϖ}, que nous y désignerons simplement par le symbole I, deviendra, étant exprimé à l'aide des nouvelles constantes g et g' et des nouvelles variables x et k,

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\,\frac{s - t}{\sqrt{s + t + \varpi - f}}\,\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\,\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}} \\
& = \frac{1}{4}\,\frac{m^2(x^2 + k^2 - g^2)}{im\sqrt{k^2 - x^2}}\,\frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}\,\frac{-\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}} \\
& = im(x^2 + k^2 - g^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}},
\end{aligned}
\right.
$$

et dès lors cette intégrale double elle-même, dans l'élément de laquelle nous supposons expressément les deux radicaux pris avec la détermination positive, ainsi que tous ceux que nous envisagerons par la suite, pourra s'écrire à l'aide de ces symboles

$$(6)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \mathrm{I}^{(\varpi)} = \displaystyle\int_g^k \int_0^x im\,(x^2 + k^2 - g^2)\,\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} \\ \quad = im\left[\displaystyle\int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}} - \int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right)(g^2 - k^2)\,\frac{k\,dk}{\sqrt{\mathrm{K}}}\right]. \end{cases}$$

Or, si maintenant nous convenons de nouveau de représenter respectivement par les symboles $\mathrm{F}_1(z, k)$ et $\mathrm{F}_2(z, k)$, quelque signification que l'on attribue d'ailleurs à k, les deux intégrales elliptiques *normales* (*) de première et de deuxième espèces, c'est-à-dire les fonctions

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{F}_1(z, k) = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \\ \mathrm{F}_2(z, k) = \displaystyle\int_0^z \frac{k^2 z^2\,dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \end{cases}$$

comme, en faisant $z = \frac{x}{k}$ ou $kz = x$, l'on aura par ces définitions et les précédentes (4)

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \frac{\frac{dx}{k}}{\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)(1-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(k^2-x^2)(1-x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$(8)\quad \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \qquad \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k}, k\right) = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

(*) Nous désignons par cette appellation d'*intégrales elliptiques normales de première et de deuxième espèces,* d'une part quant à la première, la fonction ω inverse du sinus d'amplitude z, savoir Arg sn (z, k), et d'autre part, quant à la seconde, ce que devient la fonction de deuxième espèce $\mathrm{Z}(\omega, k)$ étant exprimée semblablement au moyen de la variable z.

l'égalité ci-dessus (6) nous donnera donc pour la quantité I cette première valeur, obtenue en effectuant les intégrations à l'aide des variables x et k elles-mêmes :

$$(9)\quad I = im\left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)(g^2-k^2)\frac{k\,dk}{\sqrt{K}}\right].$$

Ce premier résultat acquis, nous aurons évidemment une seconde expression de la même quantité en nous reportant à la valeur, déjà rappelée, que nous avons trouvée pour elle dans notre Chapitre I [formule (86) et tableau A qui la précède (p. 65)], en substituant pour les intégrations au système des variables s et t le système des variables ω et θ définies par les équations (35), à la condition, bien entendu, d'effectuer dans ces résultats les mêmes changements de notations que nous venons d'opérer tout à l'heure pour arriver au résultat précédent, à savoir : de remplacer dans tout le tableau A précité à la fois ϖ, s, t, s_1 et t_1, par les valeurs indiquées par les équations (1), (2), (2^{bis}) et (2^{ter}) ci-dessus, savoir :

$$(10)\left\{\begin{aligned} &\varpi = m^2g^2, \quad && s_1 = l^2, && t_1 = l^2, \\ & && s_2 = l^2 + m^2x^2, && t_2 = l^2 + m^2(g^2-k^2). \end{aligned}\right.$$

Effectuant donc cette opération, si nous portons alors en premier lieu notre attention sur les groupes (I) et (III) du tableau en question, dont les valeurs correspondantes ne diffèrent entre elles que par le changement de s_1 en t_1, nous constatons tout d'abord que, par suite de la valeur commune $s_1 = t_1 = l^2$ que nous venons d'écrire, les dites valeurs correspondantes sont identiques dans ces groupes, et qu'en en considérant seulement les premières lignes, on aura de cette façon :

$$\left\{\begin{aligned} &k_1^2 = k_3^2 = 1 + \frac{m^2}{\varpi + l^2 + n^2} = \frac{(\varpi + l^2 + n^2) + m^2}{\varpi + l^2 + n^2} = \frac{\varpi}{\varpi + l^2 + n^2}, \\ &\operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = \operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = 1 + \frac{l^2 + n^2}{\varpi} = \frac{\varpi + l^2 + n^2}{\varpi} = \frac{1}{k_1^2} = \frac{1}{k_3^2}. \end{aligned}\right.$$

Or, comme les deux relations ainsi obtenues, savoir $\operatorname{sn}^2(h_1, k_1) = \frac{1}{k_1^2}$ et $\operatorname{sn}^2(h_3, k_3) = \frac{1}{k_3^2}$, entraînent dès lors les conditions

$\mathrm{dn}(h_1, k_1) = 0$ et $\mathrm{dn}(h_3, k_3) = 0$, il résulte immédiatement de là, en vertu de la définition même de la fonction $\Pi(\varphi, h, k)$, savoir

$$(10^{\text{bis}}) \qquad \Pi(\varphi, h, k) = \int_0^{\varphi} \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\, h \,\mathrm{cn}\, h \,\mathrm{dn}\, h}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2 h \,\mathrm{dn}^2 \varphi} \mathrm{sn}^2 \varphi \, d\varphi,$$

que l'on aura, pour un argument φ quelconque, $\Pi(\varphi, h_1, k_1) = 0$, et $\Pi(\varphi, h_3, k_3) = 0$: d'où il suit que, sur les huit fonctions Π qui composent l'expression en question [formule (86) du Chap. I], il y en a quatre qui disparaîtront et que, par conséquent, en y introduisant également la valeur (1) ou (10) de ϖ, elle se réduira alors simplement à :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I} = mg' \big[&- \{ \Pi(\varphi_2^{(2)}, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_2^{(1)}, h_2, k_2) \} \\ &+ \{ \Pi(\varphi_4^{(2)}, h_4, k_4) - \Pi(\varphi_4^{(1)}, h_4, k_4) \} \big]. \end{aligned} \right.$$

Calculant donc à présent, toujours à l'aide des mêmes procédés, les deux autres groupes (II) et (IV) de ce même tableau A, lesquels sont ainsi seuls à considérer, et faisant attention, d'abord quant au premier de ces deux groupes, que les valeurs (10) de ϖ et de s_2 donnent, d'une part,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi + s_2 - l^2 &= m^2 g'^2 + (l^2 + m^2 x^2) - l^2 = m^2 (g'^2 + x^2), \\ \varpi + s_2 + n^2 &= m^2 (1 - g^2) + (l^2 + m^2 x^2) + n^2 \\ &= - m^2 g^2 + m^2 x^2 = m^2 (x^2 - g^2), \end{aligned} \right.$$

nous obtiendrons donc ainsi successivement, en ayant égard aux autres valeurs (10) de t_1 et t_2, pour ce premier groupe (II), les valeurs

$$\left\{ \begin{aligned} k_2^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + s_2 + n^2} = 1 + \frac{m^2}{m^2 (x^2 - g^2)} \\ &= 1 + \frac{1}{x^2 - g^2} = \frac{(x^2 - g^2) + 1}{x^2 - g^2} = \frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}, \\ \mathrm{sn}^2(h_2, k_2) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi} = \frac{\varpi + s_2 + n^2}{\varpi} = \frac{m^2 (x^2 - g^2)}{m^2 g'^2} = \frac{x^2 - g^2}{g'^2}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) &= 1 + \frac{t_1 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2} = 1 + \frac{l^2 + n^2}{m^2(g'^2 + x^2)} = 1 + \frac{-m^2}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{g'^2 + x^2} = \frac{(1 - g^2 + x^2) - 1}{g'^2 + x^2} = \frac{x^2 - g^2}{x^2 + g'^2} = \frac{1}{k_2^2}, \\
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi + s_2 - l^2} = 1 + \frac{[l^2 + m^2(g^2 - k^2)] + n^2}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{(l^2 + m^2 + n^2) - m^2(1 - g^2 + k^2)}{m^2(g'^2 + x^2)} \\
&= 1 + \frac{-(g'^2 + k^2)}{g'^2 + x^2} = \frac{x^2 - k^2}{x^2 + g'^2}.
\end{aligned}\right.$$

Et de même, en observant, quant au second groupe (IV), que les mêmes valeurs (10) de ϖ et de t_2 donnent, d'autre part,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi + t_2 + n^2 &= m^2(1 - g^2) + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] + n^2 = -m^2k^2, \\
\varpi + t_2 - l^2 &= m^2(1 - g^2) + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] - l^2 = m^2(1 - k^2),
\end{aligned}\right.$$

nous trouverons semblablement, eu égard aux valeurs (10) de s_1 et de s_2, pour le second groupe (IV),

$$\left\{\begin{aligned}
k_4^2 &= 1 + \frac{m^2}{\varpi + t_2 + n^2} = 1 + \frac{m^2}{-m^2k^2} \\
&= 1 + \frac{1}{-k^2} = \frac{1 - k^2}{-k^2}, \\
\operatorname{sn}^2(h_4, k_4) &= 1 + \frac{t_2 + n^2}{\varpi} = \frac{\varpi + t_2 + n^2}{\varpi} = \frac{-m^2k^2}{m^2g'^2} = \frac{-k^2}{g'^2},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) &= 1 + \frac{s_1 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2} = 1 + \frac{l^2 + n^2}{m^2(1 - k^2)} = 1 + \frac{-m^2}{m^2(1 - k^2)} \\
&= 1 + \frac{-1}{1 - k^2} = \frac{(1 - k^2) - 1}{1 - k^2} = \frac{-k^2}{1 - k^2} = \frac{1}{k_4^2}, \\
\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) &= 1 + \frac{s_2 + n^2}{\varpi + t_2 - l^2} = 1 + \frac{(l^2 + m^2x^2) + n^2}{m^2(1 - k^2)} \\
&= 1 + \frac{-m^2 + m^2x^2}{m^2(1 - k^2)} = 1 + \frac{-1 + x^2}{1 - k^2} = \frac{x^2 - k^2}{1 - k^2}.
\end{aligned}\right.$$

C'est-à-dire, en récrivant, pour plus de clarté, simplement les résultats que nous venons d'obtenir, que les divers éléments qui interviennent dans l'expression demandée (11) seront définis séparément pour chacun des deux groupes, par les deux systèmes d'équations :

$$\text{(II)}\quad \left\{ \begin{aligned} k_2^2 &= \frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}, & \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) &= \frac{x^2-g^2}{g'^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) &= \frac{1}{k_2^2}, & \operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2) &= \frac{x^2-k^2}{x^2+g'^2}; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(IV)}\quad \left\{ \begin{aligned} k_4^2 &= \frac{1-k^2}{-k^2}, & \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) &= \frac{-k^2}{g'^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) &= \frac{1}{k_4^2} & \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) &= \frac{x^2-k^2}{1-k^2}. \end{aligned} \right.$$

Or, parmi ces définitions, deux surtout attirent à première vue l'attention, savoir les deux valeurs

$$\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(1)}, k_2) = \frac{1}{k_2^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(1)}, k_4) = \frac{1}{k_4^2},$$

parce qu'en donnant le droit de prendre pour les deux arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$ respectivement les valeurs

$$(14) \qquad \varphi_2^{(1)} = K_2 + iK'_2, \qquad \varphi_4^{(1)} = K_4 + iK'_4,$$

K_2, K'_2, K_4, K'_4 étant les fonctions complètes relatives aux modules k_2 et k_4, elles font voir que chacune des deux accolades qui figurent à l'intérieur des crochets dans l'expression (11) en question, est à présent, en sous-entendant, pour les trois éléments à la fois, l'indice 2 ou 4, une différence de la forme

$$\Pi(\varphi^{(2)}, h, k) - \Pi(K + iK', h, k),$$

et pourra dès lors être ramenée à ne plus contenir qu'une seule fonction Π, dont l'argument sera très facile à définir à nouveau par le moyen des égalités (II) ou (IV) que nous venons d'obtenir.

En effet, considérons la formule suivante, que nous avons établie sous le numéro (4) dans la Note I de l'Appendice de notre *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal*, comme

cas particulier de la formule d'addition des arguments relative à la fonction Π, savoir :

$$\Pi[\varphi - (K + iK'), h] = \Pi(\varphi, h) - [\Pi(h) + i\Pi'(h)] + \frac{1}{4}\log\frac{\text{cn}^2(\varphi - h)}{\text{cn}^2(\varphi + h)}.$$

En y écrivant simplement $\varphi^{(2)}$ au lieu de φ, puis mettant en évidence le module dans l'algorithme des différentes fonctions elliptiques, et nous souvenant enfin que, par la définition même des fonctions complètes $\Pi(h)$ et $\Pi'(h)$, l'on a

$$\Pi(h) + i\Pi'(h) = \Pi(K + iK', h),$$

cette formule donnera alors immédiatement :

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Pi(\varphi^{(2)}, h, k) - \Pi(K + iK', h, k) \\ &= \Pi[\varphi^{(2)} - (K + iK'), h, k] - \frac{1}{2}\log\frac{\text{cn}(\varphi^{(2)} - h, k)}{\text{cn}(\varphi^{(2)} + h, k)}. \end{aligned} \right.$$

Or, si maintenant, tenant compte des valeurs précédentes (14) des arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$, nous appliquons cette dernière formule aux deux accolades précitées, à savoir celles envisagées tout à l'heure dans l'expression (11), lesquelles sont caractérisées chacune respectivement par l'indice inférieur 2 ou 4 affectant à la fois tous les éléments qui figurent dans la dite accolade, il sera aisé de reconnaître, ainsi que nous allons le faire voir, que la fonction soumise au signe logarithme aura exactement la même valeur dans les deux accolades, en sorte que les deux logarithmes en question ne pourront différer que par un multiple de $2i\pi$: d'où il résultera immédiatement alors que les termes logarithmiques ne laisseront d'autre trace à l'intérieur des crochets de la dite formule (11), qu'une constante additive de la forme $C = ni\pi$.

Pour le montrer, ayant évidemment

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\text{cn}(\varphi^{(2)} - h)}{\text{cn}(\varphi^{(2)} + h)} &= \frac{\text{cn}\,\varphi^{(2)}\,\text{cn}\,h + \text{sn}\,\varphi^{(2)}\,\text{sn}\,h\,\text{dn}\,\varphi^{(2)}\,\text{dn}\,h}{\text{cn}\,\varphi^{(2)}\,\text{cn}\,h - \text{sn}\,\varphi^{(2)}\,\text{sn}\,h\,\text{dn}\,\varphi^{(2)}\,\text{dn}\,h} \\ &= \frac{1 + \dfrac{\text{sn}\,\varphi^{(2)}\,\text{dn}\,\varphi^{(2)}}{\text{cn}\,\varphi^{(2)}}\,\dfrac{\text{sn}\,h\,\text{dn}\,h}{\text{cn}\,h}}{1 - \dfrac{\text{sn}\,\varphi^{(2)}\,\text{dn}\,\varphi^{(2)}}{\text{cn}\,\varphi^{(2)}}\,\dfrac{\text{sn}\,h\,\text{dn}\,h}{\text{cn}\,h}}, \end{aligned} \right.$$

il suffira donc de faire voir, qu'avec les indices inférieurs, soit 2 soit 4 affectant à la fois $\varphi^{(2)}$ et h, le produit $\frac{\operatorname{sn}\varphi^{(2)}\operatorname{dn}\varphi^{(2)}}{\operatorname{cn}\varphi^{(2)}}\frac{\operatorname{sn}h\operatorname{dn}h}{\operatorname{cn}h}$ présentera exactement la même expression dans les deux cas.

Or, avec l'indice 2 d'abord, les définitions (II) (p. 274) donnent : d'une part quant à h, en tenant compte de la relation $g^2+g'^2=1$,

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2(h_2,k_2) &= \frac{x^2-g^2}{g'^2},\\
\operatorname{cn}^2(h_2,k_2) &= 1-\operatorname{sn}^2(h_2,k_2) = 1-\frac{x^2-g^2}{g'^2} = \frac{g'^2-(x^2-g^2)}{g'^2} = \frac{1-x^2}{g'^2},\\
\operatorname{dn}^2(h_2,k_2) &= 1-k_2^2\operatorname{sn}^2(h_2,k_2) = 1-\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{x^2-g^2}{g'^2}\\
&= 1-\frac{x^2+g'^2}{g'^2} = \frac{-x^2}{g'^2},
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(17)\qquad \frac{\operatorname{sn}^2(h_2,k_2)\operatorname{dn}^2(h_2,k_2)}{\operatorname{cn}^2(h_2,k_2)} = \frac{\dfrac{x^2-g^2}{g'^2}\,\dfrac{-x^2}{g'^2}}{\dfrac{1-x^2}{g'^2}} = \frac{-x^2(x^2-g^2)}{g'^2(1-x^2)};$$

et d'autre part quant à $\varphi^{(2)}$,

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2) &= \frac{x^2-k^2}{x^2+g'^2},\\
\operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2) &= 1-\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2) = 1-\frac{x^2-k^2}{x^2+g'^2} = \frac{g'^2+k^2}{x^2+g'^2},\\
\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2) &= 1-k_2^2\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2)\\
&= 1-\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{x^2-k^2}{x^2+g'^2} = \frac{(x^2-g^2)-(x^2-k^2)}{x^2-g^2}\\
&= \frac{-(g^2-k^2)}{x^2-g^2},
\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2)\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2)}{\operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)},k_2)} &= \frac{\dfrac{x^2-k^2}{x^2+g'^2}\,\dfrac{-(g^2-k^2)}{x^2-g^2}}{\dfrac{g'^2+k^2}{x^2+g'^2}}\\
&= \frac{-(x^2-k^2)(g^2-k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)};
\end{aligned}\right.$$

et par conséquent, en multipliant entre elles ces deux valeurs (17) et (19):

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)} \dfrac{\operatorname{sn}^2(h_2, k_2)\operatorname{dn}^2(h_2, k_2)}{\operatorname{cn}^2(h_2, k_2)} \\ = \dfrac{-(x^2-k^2)(g^2-k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)} \dfrac{-x^2(x^2-g^2)}{g'^2(1-x^2)} = \dfrac{x^2}{g'^2}\dfrac{x^2-k^2}{1-x^2}\dfrac{g^2-k^2}{g'^2+k^2}. \end{cases}$$

Et de même, avec l'indice 4, les définitions analogues (IV) (p. 274), donneront: d'une part quant à h,

$$\begin{cases} \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = \dfrac{-k^2}{g'^2}, \\ \operatorname{cn}^2(h_4, k_4) = 1 - \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = 1 - \dfrac{-k^2}{g'^2} = \dfrac{g'^2+k^2}{g'^2}, \\ \operatorname{dn}^2(h_4, k_4) = 1 - k_4^2\operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = 1 - \dfrac{1-k^2}{-k^2}\dfrac{-k^2}{g'^2} \\ \qquad = 1 - \dfrac{1-k^2}{1-g^2} = \dfrac{-g^2+k^2}{g'^2}, \end{cases}$$

d'où

$$(21)\quad \frac{\operatorname{sn}^2(h_4, k_4)\operatorname{dn}^2(h_4, k_4)}{\operatorname{cn}^2(h_4, k_4)} = \frac{\dfrac{-k^2}{g'^2}\dfrac{-g^2+k^2}{g'^2}}{\dfrac{g'^2+k^2}{g'^2}} = \frac{k^2(g^2-k^2)}{g'^2(g'^2+k^2)};$$

et d'autre part quant à $\varphi^{(2)}$,

$$(22)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = \dfrac{x^2-k^2}{1-k^2}, \\ \operatorname{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - \operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - \dfrac{x^2-k^2}{1-k^2} = \dfrac{1-x^2}{1-k^2}, \\ \operatorname{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) = 1 - k_4^2\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4) \\ \qquad = 1 - \dfrac{1-k^2}{-k^2}\dfrac{x^2-k^2}{1-k^2} = \dfrac{-k^2-(x^2-k^2)}{1-k^2} = \dfrac{x^2}{k^2}, \end{cases}$$

d'où

$$(23) \qquad \frac{\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)\operatorname{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \frac{\dfrac{x^2-k^2}{1-k^2}\dfrac{x^2}{k^2}}{\dfrac{1-x^2}{1-k^2}} = \frac{(x^2-k^2)\,x}{(1-x^2)\,k^2};$$

et par conséquent, en multipliant encore entre elles ces deux valeurs (23) et (21),

$$\frac{\operatorname{sn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)\operatorname{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)} \cdot \frac{\operatorname{sn}^2(h_4, k_4)\operatorname{dn}^2(h_4, k_4)}{\operatorname{cn}^2(h_4, k_4)}$$
$$= \frac{(x^2-k^2)\,x^2}{(1-x^2)\,k^2}\,\frac{k^2(g^2-k^2)}{g'^2(g'^2+k^2)} = \frac{x^2}{g'^2}\,\frac{x^2-k^2}{1-x^2}\,\frac{g^2-k^2}{g'^2+k^2},$$

valeur identique à celle (20) déjà rencontrée tout à l'heure quant à l'indice 2.

En désignant dès lors par Ω la racine carrée de cette même quantité, c'est-à-dire l'expression

$$(24) \qquad \Omega = \frac{x}{g'}\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},$$

comme il résulte de là que, en omettant le membre intermédiaire, les égalités (16) donneront alors

$$(24^{\text{bis}}) \qquad \frac{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}-h_2, k_2)}{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}+h_2, k_2)} = \frac{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}-h_4, k_4)}{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}+h_4, k_4)} = \frac{1+\Omega}{1-\Omega},$$

la forme de chacune des deux accolades en question se réduira donc ainsi, par le moyen de la formule ci-dessus (15), comme nous l'avons annoncé, à cette autre forme plus simple

$$(24^{\text{ter}}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Pi\,[\varphi^{(2)} - (\mathrm{K} + i\mathrm{K}'), h, k] - \frac{1}{2}\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega} \\ &\qquad = \Pi\,(\varphi, h, k) - \frac{1}{2}\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega}, \end{aligned} \right.$$

le nouvel argument $\varphi = \varphi^{(2)} - (K + iK')$ de l'unique fonction Π restante étant, en conséquence, donné maintenant par l'équation

$$\operatorname{sn}(\varphi, k) = \operatorname{sn}[\varphi^{(2)} - (K + iK'), k] = -\frac{\operatorname{dn}(\varphi^{(2)}, k)}{k \operatorname{cn}(\varphi^{(2)}, k)},$$

ou, en élevant au carré :

$$\operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi^{(2)}, k)}{k^2 \operatorname{cn}^2(\varphi^{(2)}, k)}.$$

En appliquant cette dernière formule aux deux arguments $\varphi_2^{(2)}$ et $\varphi_4^{(2)}$, ce qui se fera en y affectant à la fois tous les symboles de l'indice inférieur, soit 2, soit 4, puis tenant compte à cet effet des expressions (18) et (22) ainsi que des valeurs (II) et (IV) trouvées ci-dessus (p. 274) pour les modules k_2 et k_4, nous obtiendrons donc ainsi, pour définir les nouveaux arguments φ_2 et φ_4 des deux fonctions Π seules subsistantes désormais dans notre formule (11) qu'il s'agissait de transformer, les nouvelles équations,

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(\varphi_2, k_2) &= \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{k_2^2 \operatorname{cn}^2(\varphi_2^{(2)}, k_2)} = \frac{\dfrac{-(g^2 - k^2)}{x^2 - g^2}}{\dfrac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}\,\dfrac{g'^2 + k^2}{x^2 + g'^2}} = \frac{-(g^2 - k^2)}{g'^2 + k^2}, \\ \operatorname{sn}^2(\varphi_4, k_4) &= \frac{\operatorname{dn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{k_4^2 \operatorname{cn}^2(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \frac{\dfrac{x^2}{k^2}}{\dfrac{1 - k^2}{-k^2}\,\dfrac{1 - x^2}{1 - k^2}} = \frac{-x^2}{1 - x^2}; \end{aligned}\right.$$

de telle sorte que, en rapprochant, pour plus de clarté, ces deux valeurs de celles des premières lignes des groupes correspondants précités (II) ou (IV), les deux seules fonctions Π restantes auront alors leurs éléments définis respectivement par les deux nouveaux groupes :

$$\text{(II')} \quad k_2^2 = \frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2}, \quad \operatorname{sn}^2(h_2, k_2) = \frac{x^2 - g^2}{g'^2}, \quad \operatorname{sn}^2(\varphi_2, k_2) = \frac{-(g^2 - k^2)}{g'^2 + k^2};$$

$$\text{(IV')} \quad k_4^2 = \frac{1 - k^2}{-k^2}, \quad \operatorname{sn}^2(h_4, k_4) = \frac{-k^2}{g'^2}, \quad \operatorname{sn}^2(\varphi_4, k_4) = \frac{-x^2}{1 - x^2}.$$

Et avec les valeurs ainsi définies, la formule en question (11) se réduira ainsi, la différence des deux termes logarithmiques étant, comme nous l'avons dit, $C = ni\pi$, à la forme très simple

$$(25) \qquad I = mg' [-\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) + \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) + C],$$

dont la comparaison avec l'expression antérieure (9) de la même quantité, obtenue en effectuant l'intégration à l'aide des variables x et k elles-mêmes, fournira dès lors l'égalité

$$im\left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)(g^2 - k^2)\frac{k\,dk}{\sqrt{K}}\right]$$
$$= mg' [-\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) + \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) + C],$$

ou, en multipliant les deux membres par $-\frac{2i}{m}$:

$$\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$
$$= 2ig' [\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) - C].$$

Or si, dans cette formule, on suppose en même temps $g = k$ et $x = 0$, l'on aura à la fois par les définitions précédentes (II') et (IV')

$$\operatorname{sn}(\varphi_2, k_2) = 0 \quad \text{d'où} \quad \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) = 0,$$

et

$$\operatorname{sn}(\varphi_4, k_4) = 0 \quad \text{d'où} \quad \Pi(\varphi_4, h_4, k_4) = 0,$$

en sorte que la dite formule se réduira à $0 = 2ig'(-C)$, ce qui fait voir que la constante C est nulle.

En vue de permettre à l'esprit du Lecteur de se représenter plus aisément l'ensemble de ce résultat, nous l'énoncerons, de même que tous ceux que nous établirons dans la suite de ce Mémoire, sous la forme d'un Théorème d'Analyse, en écrivant seulement pour la symétrie, maintenant que les calculs sont achevés, φ_1, h_1, k_1 à la place de φ_4, h_4, k_4, et nous aurons alors, de cette façon, le premier Théorème, dans lequel la constante g est supposée recevoir une valeur quelconque :

THÉORÈME I. — *Si l'on convient de représenter par les symboles* $F_1(z, k)$ *et* $F_2(z, k)$ *les deux intégrales elliptiques* normales (*) *de première et de deuxième espèces, savoir*

$$(26)\quad F_1(z,k)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\quad F_2(z,k)=\int_0^z \frac{k^2z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et, conformément à la notation de JACOBI, *par* $\Pi(\varphi, h, k)$ *la fonction elliptique de troisième espèce, on aura la formule de quadrature*

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}}-\int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &\qquad = 2ig'[\Pi(\varphi_2, h_2, k_2)-\Pi(\varphi_1, h_1, k_1)], \end{aligned}\right.$$

dans laquelle g *et* g' *désignant deux paramètres arbitraires sous la condition* $g^2+g'^2=1$, *les six éléments* φ_1, h_1, k_1; φ_2, h_2, k_2 *sont définis séparément par les égalités suivantes :*

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &k_1=\frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, && \mathrm{sn}\,(h_1, k_1)=\frac{ik}{g'}, && \mathrm{sn}\,(\varphi_1, k_1)=\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \\ &k_2=\frac{\sqrt{x^2+g'^2}}{\sqrt{x^2-g^2}}, && \mathrm{sn}\,(h_2, k_2)=\frac{\sqrt{x^2-g^2}}{g'}, && \mathrm{sn}\,(\varphi_2, k_2)=\frac{i\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}. \end{aligned}\right.$$

On remarquera la présence dans cette formule des paramètres g et g', lesquels, remplissant dans la seconde intégration en k un rôle analogue à celui de k et de k' dans la première intégration en x, semblent appelés à recevoir à cause de cela la dénomination de *modules complémentaires du second ordre.*

Voyons maintenant ce que deviendra ce résultat pour les valeurs limites corrélatives $g=1$, $g'=0$ de ces paramètres, pour lesquelles $\mathrm{sn}\,(h_1, k_1)$ et $\mathrm{sn}\,(h_2, k_2)$ étant simultanément infinis d'après les définitions qui précèdent, h_1 et h_2 pourront être considérés alors comme égaux l'un à iK'_1 et l'autre à iK'_2.

(*) Voir la note de la page 270 ci-dessus.

Il suffira pour cela de remarquer que, pour des éléments φ, h, k quelconques, la fonction $\Pi(\varphi, h, k)$ donnant, si l'on y fait $h = h' + iK'$,

$$\frac{1}{\operatorname{sn} h}\Pi(\varphi, h, k) = \int_0^\varphi \frac{k^2 \operatorname{cn} h \operatorname{dn} h . \operatorname{sn}^2\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 h \operatorname{sn}^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \frac{k^2 \operatorname{cn}(h' + iK') \operatorname{dn}(h' + iK'). \operatorname{sn}^2\varphi}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(h' + iK') \operatorname{sn}^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \frac{k^2 \dfrac{-i \operatorname{dn} h'}{k \operatorname{sn} h'} \dfrac{-i \operatorname{cn} h'}{\operatorname{sn} h'} \operatorname{sn}^2\varphi}{1 - k^2 \dfrac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 h'} \operatorname{sn}^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \frac{-k \operatorname{dn} h' \operatorname{cn} h' \operatorname{sn}^2\varphi}{\operatorname{sn}^2 h' - \operatorname{sn}^2\varphi}\, d\varphi,$$

l'on aura par conséquent pour la limite $h' = 0$ ou $h = iK'$,

$$\lim \left[\frac{1}{\operatorname{sn} h}\Pi(\varphi, h, k)\right]_{h=iK'} = \int_0^\varphi \frac{-k \operatorname{sn}^2\varphi}{-\operatorname{sn}^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^\varphi k\, d\varphi = k\varphi.$$

Appliquant dès lors cette formule aux deux fonctions $\Pi(\varphi_1, h_1, k_1)$ et $\Pi(\varphi_2, h_2\, k_2)$ dont les paramètres h_1 et h_2 donnent séparément, d'après les définitions (28),

$$g' = \frac{ik}{\operatorname{sn}(h_1, k_1)}$$

et

$$g' = \frac{\sqrt{x^2 - g^2}}{\operatorname{sn}(h_2, k_2)} = \frac{\sqrt{x^2 + g'^2}}{\dfrac{\sqrt{x^2 + g'^2}}{\sqrt{x^2 - g^2}}} \frac{1}{\operatorname{sn}(h_2, k_2)} = \frac{\sqrt{x^2 + g'^2}}{k_2} \frac{1}{\operatorname{sn}(h_2, k_2)},$$

l'on trouvera, pour la limite relative à $g = 1$ ou $g' = 0$ du second membre de la formule en question (27), en tenant compte de nouveau, à plusieurs reprises, de ces mêmes définitions (28) :

$$
(28^{\text{bis}})\quad \left\{
\begin{aligned}
& \lim \left[2ig' \left\{ \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1) \right\} \right]_{g'=0} \\
&= 2i \left\{ \lim \left[g' \Pi(\varphi_2, h_2, k_2)\right]_{g'=0} - \lim \left[g' \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\right]_{g'=0} \right\} \\
&= 2i \left\{ \lim \left[\frac{\sqrt{x^2 + g'^2}}{k_2} \frac{1}{\operatorname{sn}(h_2, k_2)} \Pi(\varphi_2, h_2, k_2)\right]_{g'=0} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \lim \left[\frac{ik}{\operatorname{sn}(h_1, k_1)} \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\right]_{g'=0} \right\} \\
&= 2i \left(\frac{x}{k_2} k_2 \varphi_2 - ik . k_1 \varphi_1\right) = 2i \left(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2} . \varphi_1\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Or, les dites définitions se réduisant, pour la même limite $g = 1$ ou $g' = 0$, à celle-ci

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
& k_1 = \frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \\
& k_2 = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{-x^2}{1 - x^2}} = \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \\
& \operatorname{sn}(\varphi_1, k_1) = \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}} = t_1, \\
& \operatorname{sn}(\varphi_2, k_2) = \frac{i\sqrt{1-k^2}}{-k} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{ik} = t_2,
\end{aligned}
\right.
$$

cette dernière expression (28^{bis}), et par conséquent la quantité envisagée elle-même, se réduira donc à la suivante :

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2i \left(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2}\, \varphi_1\right) \\
&= 2i \left[x \int_0^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2 t^2)}} - \sqrt{1-k^2} \int_0^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2 t^2)}}\right] \\
&= 2i \left[x \mathrm{F}_1(t_2, k_2) - \sqrt{1-k^2}\, \mathrm{F}_1(t_1, k_1)\right] \\
&= 2i \left[x \mathrm{F}_1\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}\, \mathrm{F}_1\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Tel sera donc dans ce cas le second membre de la formule en question, duquel on pourra, si l'on aime mieux, faire disparaître

les imaginaires, en employant par exemple, parmi plusieurs autres, la substitution suivante

$$(31)\qquad t=\frac{iz}{\sqrt{1-z^2}}\qquad\text{ou}\qquad z=\frac{-it}{\sqrt{1-t^2}},$$

les limites de cette nouvelle variable z, correspondantes à celles t_1 et t_2 de la variable t, étant dès lors, d'après les valeurs précédentes (29) de t_1 et t_2 :

$$(32)\quad\left\{\begin{aligned} z_1&=\frac{-it_1}{\sqrt{1-t_1^2}}=-i\,\frac{\dfrac{ix}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)+x^2}}=x,\\ z_2&=\frac{-it_2}{\sqrt{1-t_2^2}}=\frac{-i\,\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{ik}}{\sqrt{1+\dfrac{1-k^2}{k^2}}}=\frac{-\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{k^2+(1-k^2)}}=-\sqrt{1-k^2}.\end{aligned}\right.$$

En effet, cette substitution (31) donnant, en ayant toujours égard aux mêmes définitions (28),

$$\left\{\begin{aligned} dt&=i\,\frac{\sqrt{1-z^2}+\dfrac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}}{1-z^2}\,dz=i\,\frac{(1-z^2)+z^2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz=\frac{idz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}},\\ 1-t^2&=1+\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{(1-z^2)+z^2}{1-z^2}=\frac{1}{1-z^2},\\ 1-k_1^2t^2&=1-\frac{1-k^2}{-k^2}\,\frac{-z^2}{1-z^2}=\frac{k^2(1-z^2)-(1-k^2)z^2}{k^2(1-z^2)}=\frac{k^2-z^2}{k^2(1-z^2)},\\ 1-k_2^2t^2&=1-\frac{-x^2}{1-x^2}\,\frac{-z^2}{1-z^2}=\frac{(1-x^2)(1-z^2)-x^2z^2}{(1-x^2)(1-z^2)}\\ &=\frac{1-x^2-z^2}{(1-x^2)(1-z^2)}=\frac{1-\dfrac{z^2}{1-x^2}}{1-z^2},\end{aligned}\right.$$

l'on aura donc séparément, eu égard aux valeurs précédentes (32) de z_1 et z_2, ainsi qu'aux expressions (4) et (8),

$$
(33)\quad
\begin{cases}
\varphi_1 = F_1(t_1, k_1) = \displaystyle\int_0^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_1^2t^2)}} = \int_0^{z_1} \frac{\dfrac{idz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1-z^2}\,\dfrac{k^2-z^2}{k^2(1-z^2)}}} \\[2ex]
\qquad = i\displaystyle\int_0^{z_1} \frac{k\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}} = ik\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{X}} \\[2ex]
\qquad = ik\,F_1\left(\dfrac{x}{k}, k\right);
\end{cases}
$$

$$
(34)\quad
\begin{cases}
\varphi_2 = F_1(t_2, k_2) = \displaystyle\int_0^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2t^2)}} \\[2ex]
\qquad = \displaystyle\int_0^{z_2} \frac{\dfrac{idz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{1-z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z^2}\left(1-\dfrac{z^2}{1-x^2}\right)}} \\[2ex]
\qquad = i\displaystyle\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{z^2}{1-x^2}\right)}} \\[2ex]
\qquad = iF_1\left(z_2, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\,iF_1\left(-z_2, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\[2ex]
\qquad = -\,iF_1\left(\sqrt{1-k^2}, \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right),
\end{cases}
$$

valeurs qui donneront, pour celle du dernier membre des égalités (28^{bis}) :

$$
\begin{aligned}
&2i\,(x\varphi_2 - \sqrt{1-k^2}\,\varphi_1) \\
&= 2i\left[-\,ix\,F_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}\,.\,ik\,F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\right] \\
&= 2\left[x\,F_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k\sqrt{1-k^2}\,F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\right].
\end{aligned}
$$

Cette dernière expression, ou la précédente (30), représentant ainsi indifféremment, comme le montrent les dites égalités (28^{bis}), ce que devient, dans le cas limite $g = 1$, le second membre de la formule (27) qui exprimait notre Théorème I, nous avons donc établi de cette façon, comme conséquence du dit Théorème, la proposition subsidiaire (ou Corollaire) que nous allons énoncer :

Corollaire. — *Les mêmes définitions étant admises que dans le Théorème* I, *la formule y relatée, pour la valeur limite de la constante* $g = 1$, *prendra la forme exceptionnelle*

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_1^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ &= x\,\mathrm{F}_1\left(\sqrt{1-k^2}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right), \end{aligned} \right.$$

formule que l'on pourra, si l'on aime mieux, écrire encore sous cette autre forme

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_1^k \mathrm{F}_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{dk}{\sqrt{1-k^2}} - \int_1^k \mathrm{F}_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\sqrt{1-k^2}\,dk \\ &= i\left[x\,\mathrm{F}_1\left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}, \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{F}_1\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{\sqrt{1-k^2}}{ik}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

dont le second membre présente, quant à la fonction F_1, *une particularité analogue à celle relative à la fonction* Π, *de la formule dite* de l'échange de l'argument et du paramètre.

Le Lecteur trouvera, s'il le préfère, une autre démonstration *a posteriori* du Théorème I ci-dessus, purement analytique et au moyen de la seule différentiation, dans le Tome XXI des Annales de la Société scientifique de Bruxelles (Première Partie, pp. 120-126), démonstration plus laborieuse à la vérité que celle développée dans ce premier paragraphe, mais démonstration, par contre, plus directe, en ce qu'elle n'emprunte plus, comme la précédente, son point de départ à la question de Mécanique traitée antérieurement par nous dans le *Mémoire sur l'Attraction du Parallélipipède Ellipsoïdal.*

II

On comprend dès maintenant, sans que nous puissions encore entrer dans aucun détail à ce sujet, que la répétition des mêmes procédés fournira autant que l'on voudra de formules analogues à celle établie dans le paragraphe précédent, à la condition d'adopter à chaque fois comme point de départ un nouveau type d'intégrale double convenablement choisi pour jouer le rôle de l'intégrale I dans le calcul qui nous a conduit au Théorème I^{er} ci-dessus. Comme premier pas dans cette voie, nous établirons encore deux autres formules semblables qui introduiront dans leur partie intégrée, conjointement avec des termes algébriques, au lieu de la fonction elliptique de troisième espèce, la fonction de deuxième espèce et la fonction inverse de première espèce (ou argument) relatives toujours aux deux mêmes séries d'éléments φ_1, k_1 et φ_2, k_2, qui intervenaient déjà dans le précédent résultat : formules qui seront d'ailleurs manifestement distinctes, comme introduisant chacune successivement un ou plusieurs éléments analytiques qui n'intervenaient pas dans les précédentes.

A cet effet, considérons d'abord le type d'intégrale double, voisin de celui pris comme point de départ du calcul dans le paragraphe précédent,

$$(37) \qquad I^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t)\,[3\,(s+t-f)+2\varpi]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

les différents symboles ayant toujours la même signification que dans notre Chapitre I et le § I ci-dessus ; puis reprenons, à propos de cette nouvelle intégrale double, toute la série des procédés au moyen desquels nous sommes arrivés dans le dit Chapitre I à l'expression explicite (86) de l'intégrale $I^{(\varpi)}$ alors envisagée. Il est clair alors que l'introduction à la place de s et t des nouvelles

variables θ et ω (35) transformera d'abord l'intégrale double $I^{(\varpi)}$ actuellement proposée, eu égard à la valeur (37) du déterminant fonctionnel $\frac{\delta(s,t)}{\delta(\theta,\omega)}$ ainsi qu'à celle (38^{bis}) du produit ST, dans la suivante, l'indication des limites des nouvelles variables étant omise pour un instant,

$$I^{(0)} = \frac{1}{2}\iint \frac{(s-t)(3\theta+2\varpi)}{\sqrt{\theta+\varpi}} \frac{\pm\,\delta(s,t)}{\delta(\theta,\omega)} \frac{d\omega\,d\theta}{\sqrt{ST}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\theta+\varpi}} \frac{d\omega\,d\theta}{\sqrt{\Omega}} = \frac{1}{2}\int\left(\int\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\,d\theta,$$

laquelle deviendra ensuite, après qu'on y aura introduit les limites des variables θ et ω, comme dans notre Chapitre I pour l'expression (56) de $I^{(\varpi)}$, par le moyen de la formule de quadrature (60) et des formules (61) et (62),

$$(38)\quad \begin{cases} I^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f}\left(\int_{\Theta}^{E+\epsilon\theta}\frac{d\omega}{\sqrt{\Omega}}\right)\frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\,d\theta \\ \quad = \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f}[2\log F(\theta) - F(\Theta,\theta)]\frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\,d\theta \\ \quad = \sum_{\epsilon} \pm \frac{1}{2}\int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} 2\log F(\theta)\frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}}\,d\theta, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale double correspondant au second terme $F(\Theta,\theta)$ de la parenthèse, lequel ne contient ni ϵ ni η, disparaissant en vertu du Théorème général démontré dans le même Chapitre (pp. 60 et 61).

Cela fait, si pour calculer cette dernière intégrale, nous employons encore le procédé de l'intégration par parties, la différentiation donnant dans le cas actuel

$$\frac{d}{d\theta}(2\theta\sqrt{\varpi+\theta}) = 2\sqrt{\varpi+\theta} + 2\theta\frac{1}{2\sqrt{\varpi+\theta}}$$

$$= \frac{2(\varpi+\theta)+\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} = \frac{3\theta+2\varpi}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

d'où l'on conclura inversement, en ne considérant que les deux membres extrêmes et les intervertissant,

$$\int \frac{3\theta + 2\varpi}{\sqrt{\varpi + \theta}}\, d\theta = 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} + \text{const.},$$

l'intégration par parties donnera donc dans ce cas, en ayant égard à la formule (68^{bis}) du dit Chapitre I,

$$\int 2 \log F(\theta) . \frac{3\theta + 2\varpi}{\sqrt{\varpi + \theta}}\, d\theta$$

$$= 2 \log F(\theta) . 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} - \int 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} . 2\,\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}\, d\theta$$

$$= 4 \log F(\theta) . \sqrt{\varpi + \theta} - \int 2\theta\sqrt{\varpi + \theta} . \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\right) d\theta$$

$$= \Psi(\theta) + 2\sqrt{E}\int \frac{\sqrt{\varpi + \theta}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\, d\theta,$$

l'ensemble des termes représentés par le symbole $\Psi(\theta)$ participant évidemment de la propriété de symétrie que nous avons reconnue à la fonction $F(\theta)$ dans le même Chapitre I (p. 59), c'est-à-dire étant tel qu'il se changera en une fonction symétrique de ϵ et de η, si l'on remplace θ par $\epsilon + \eta - f$: d'où il résulte immédiatement, en vertu du Théorème général précité, que pour la formation de l'expression en question (38) de $I^{(0)}$, la dite fonction $\Psi(\theta)$ ne fournira encore aucun terme dans la sommation en ϵ, après qu'on y aura introduit les limites données de θ, et pourra dès lors être négligée de nouveau, en sorte que la dite expression se réduira simplement à la suivante

$$(39) \qquad I^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{E} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\varpi + \theta}}{\sqrt{l^2 - \epsilon + \theta}\sqrt{n^2 + \epsilon - \theta}}\, d\theta,$$

en désignant pour abréger, ainsi que nous le ferons dorénavant, par θ_1 et θ_2 les deux limites de la variable θ, savoir

$$(40) \qquad \theta_1 = \epsilon + \eta_1 - f, \qquad \theta_2 = \epsilon + \eta_2 - f,$$

et le radical $\sqrt{E}$ étant supposé pris avec la détermination positive.

Cela posé, pour calculer l'intégrale définie qui figure dans cette expression, l'analogie conduisant naturellement à introduire à cet effet de nouveau les mêmes éléments φ et k définis par les formules (74) de notre Chapitre I à l'occasion d'un calcul tout semblable, nous conviendrons, pour abréger, de faire dans ce but à la fois

$$(41)\quad \begin{cases} L = \varpi - l^2 + \epsilon, \qquad N = \varpi + n^2 - \epsilon, \\ \Delta\theta = \sqrt{(\varpi + \theta)(l^2 - \epsilon + \theta)(n^2 + \epsilon - \theta)}, \end{cases}$$

et alors les dites formules s'écrivant avec ces notations

$$(42)\qquad k^2 = \frac{L}{N}, \qquad \operatorname{sn}^2(\varphi, k) = \frac{\varpi + \theta}{L},$$

donneront

$$\begin{cases} \operatorname{cn}^2(\varphi, k) = 1 - \operatorname{sn}^2(\varphi, k) = 1 - \dfrac{\varpi + \theta}{L} \\ \qquad = \dfrac{1}{L}[(\varpi - l^2 + \epsilon) - (\varpi + \theta)] = \dfrac{-(l^2 - \epsilon + \theta)}{L}, \\ \operatorname{dn}^2(\varphi, k) = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k) = 1 - \dfrac{L}{N}\dfrac{\varpi + \theta}{L} \\ \qquad = \dfrac{1}{N}[(\varpi + \epsilon - \theta) - (\varpi + \theta)] = \dfrac{n^2 + \epsilon - \theta}{N}; \end{cases}$$

en sorte que l'on aura simultanément

$$(43)\quad \begin{cases} \varpi + \theta = L \operatorname{sn}^2(\varphi, k), \qquad l^2 - \epsilon + \theta = - L \operatorname{cn}^2(\varphi, k), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n^2 + \epsilon - \theta = \quad N \operatorname{dn}^2(\varphi, k), \end{cases}$$

et par conséquent, d'une part, en vertu de la définition (41) du radical $\Delta\theta$,

$$(44)\quad \begin{cases} (\Delta\theta)^2 = (\varpi + \theta)(l^2 - \epsilon + \theta)(n^2 + \epsilon - \theta) \\ \qquad = L \operatorname{sn}^2 \varphi . (- L \operatorname{cn}^2 \varphi) . N \operatorname{dn}^2 \varphi \\ \qquad = - NL^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \operatorname{cn}^2 \varphi \operatorname{dn}^2 \varphi, \end{cases}$$

et, d'autre part, en différentiant la première des équations précédentes (43),

$$(45)\qquad \frac{d\theta}{\Delta\theta} = \frac{\mathrm{L}\,.\,2\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi\,d\varphi}{i\,\mathrm{L}\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{cn}\,\varphi\,\mathrm{dn}\,\varphi} = \frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{\mathrm{N}}},$$

puis de là, en ayant égard aux valeurs (41) et (42), la formule suivante, analogue à celle (73) de notre Chapitre I :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\varpi}^{\theta} \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-\epsilon+\theta}\sqrt{n^2+\epsilon-\theta}}\,d\theta = \int_{-\varpi}^{\theta}(\varpi+\theta)\frac{d\theta}{\Delta\theta} \\ &= \int_0^{\varphi}\mathrm{L}\,\mathrm{sn}^2\varphi\,\frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{\mathrm{N}}} = -\,2i\sqrt{\mathrm{N}}\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}\,\mathrm{sn}^2\varphi\,d\varphi \\ &= -\,2i\sqrt{\mathrm{N}}\int_0^{\varphi}k^2\,\mathrm{sn}^2\varphi\,d\varphi = -\,2i\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{Z}(\varphi, k). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, quant aux limites de l'intégration envisagées dans l'expression (39), si, par analogie avec ce que nous avons fait dans notre tableau A du même Chapitre (p. 65) pour chacun des quatre modules qui y figurent, nous convenons de désigner en général par les symboles $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ les limites de l'argument φ correspondant respectivement aux deux limites de θ (40), cette dernière formule nous donnera donc

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-\epsilon+\theta}\sqrt{n^2+\epsilon-\theta}}\,d\theta \\ &= -\,2i\sqrt{\mathrm{N}}\,[\mathrm{Z}(\varphi^{(2)}, k) - \mathrm{Z}(\varphi^{(1)}, k)]\,; \end{aligned}\right.$$

et si, de plus, nous adoptons le symbole $\overline{\mathrm{E}}$ pour représenter le produit $\sqrt{\mathrm{E}\,\mathrm{N}}$ qui reviendra très fréquemment dans le cours de ce Mémoire, c'est-à-dire si nous faisons désormais

$$(48)\qquad \overline{\mathrm{E}} = \sqrt{(l^2-\epsilon)(n^2+\epsilon)(\varpi+n^2+\epsilon)},$$

avec les mêmes conventions relatives aux différentes déterminations de ϵ que pour la quantité E [formules (53) du Chap. I],

l'expression obtenue tout à l'heure (39) pour $I^{(0)}$ s'écrira donc, sous forme condensée, par le moyen des deux égalités précédentes,

$$(49)\qquad I^{(0)} = -2i\sum_{\epsilon} \pm \overline{\mathrm{E}}\,[Z(\varphi^{(2)}, k) - Z(\varphi^{(1)}, k)]_{\epsilon}$$

l'indice ϵ inscrit au bas du second crochet ayant pour signification de rappeler que les trois éléments $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ et k des fonctions qui figurent à l'intérieur de ces crochets dépendent à la fois d'une certaine détermination de ϵ : c'est-à-dire, explicitement, qu'en tenant compte de la signification admise pour le double signe à l'occasion de la formule (55) du Chapitre I, nous aurons la formule suivante, homologue de celle (86) du dit Chapitre :

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} I^{(0)} = -2i\,[\overline{S}_1 &\{ Z(\varphi_1^{(2)}, k_1) - Z(\varphi_1^{(1)}, k_1) \} \\ -\overline{S}_2 &\{ Z(\varphi_2^{(2)}, k_2) - Z(\varphi_2^{(1)}, k_2) \} \\ -\overline{T}_1 &\{ Z(\varphi_3^{(2)}, k_3) - Z(\varphi_3^{(1)}, k_3) \} \\ +\overline{T}_2 &\{ Z(\varphi_4^{(2)}, k_4) - Z(\varphi_4^{(1)}, k_4) \}]. \end{aligned}\right.$$

Or, les hypothèses et notations spéciales au présent Mémoire, savoir celles exprimées par les égalités (10) du § I, donnant en particulier

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} & l^2 - s_2 = -m^2x^2, \\ & n^2 + s_2 = n^2 + (l^2 + m^2x^2) = -m^2 + m^2x^2 = -m^2(1 - x^2), \\ & \varpi + n^2 + s_2 = m^2(1 - g^2) - m^2(1 - x^2) = -m^2(g^2 - x^2), \\ & (l^2 - s_2)(n^2 + s_2)(\varpi + n^2 + s_2) = -m^2x^2[-m^2(1 - x^2)][-m^2(g^2 - x^2)] \\ & \qquad\qquad = -m^6x^2(1 - x^2)(g^2 - x^2), \\ & l^2 - t_2 = -m^2(g^2 - k^2), \\ & n^2 + t_2 = n^2 + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] = -m^2 + m^2(g^2 - k^2) \\ & \qquad\qquad = -m^2(g'^2 + k^2), \\ & \varpi + n^2 + t_2 = m^2g'^2 - m^2(g'^2 + k^2) = -m^2k^2, \\ & (l^2 - t_2)(n^2 + t_2)(\varpi + n^2 + t_2) = -m^2(g^2 - k^2).[-m^2(g'^2 + k^2)](-m^2k^2) \\ & \qquad\qquad = -m^6k^2(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2), \end{aligned}\right.$$

il résulte donc, tant de ces hypothèses (10) que de ces dernières valeurs jointes à la définition précédente (48) du symbole $\overline{\mathrm{E}}$, que les quatre coefficients algébriques des fonctions elliptiques correspondant aux quatre déterminations de ϵ auront, dans la question actuelle, respectivement pour expressions

$$(52)\quad \begin{cases} \bar{S}_1 = \sqrt{(l^2 - s_1)(n^2 + s_1)(\varpi + n^2 + s_1)} = 0, \\ \bar{S}_2 = \sqrt{(l^2 - s_2)(n^2 + s_2)(\varpi + n^2 + s_2)} = im^3 x \sqrt{1 - x^2}\sqrt{g^2 - x^2}, \\ \bar{T}_1 = \sqrt{(l^2 - t_1)(n^2 + t_1)(\varpi + n^2 + t_1)} = 0, \\ \bar{T}_2 = \sqrt{(l^2 - t_2)(n^2 + t_2)(\varpi + n^2 + t_2)} = im^3 k \sqrt{g^2 - k^2}\sqrt{g'^2 + k^2}; \end{cases}$$

de telle sorte que la valeur ci-dessus (60) de $I^{(0)}$ se réduira tout d'abord aux deux seuls termes

$$(53)\quad \begin{cases} I^{(0)} = -2m^3 x \sqrt{1 - x^2}\sqrt{g^2 - x^2}\,[Z(\varphi_2^{(2)}, k_2) - Z(\varphi_2^{(1)}, k_2)] \\ \qquad + 2m^3 k \sqrt{g^2 - k^2}\sqrt{g'^2 + k^2}\,[Z(\varphi_4^{(2)}, k_4) - Z(\varphi_4^{(1)}, k_4)], \end{cases}$$

les valeurs des six éléments k_2, $\varphi_2^{(1)}$, et $\varphi_2^{(2)}$ d'une part, et k_4, $\varphi_4^{(1)}$, et $\varphi_4^{(2)}$ d'autre part, étant celles déjà envisagées dans le § I de ce travail, c'est-à-dire celles fournies respectivement par les formules (II), (IV) et (14) (p. 274), lesquelles représentent, comme on l'a vu, ce que deviennent, avec les hypothèses et les notations actuelles, les valeurs indiquées par les groupes correspondants (II) et (IV) du tableau A (p. 65) de notre Chapitre I.

Or, il résulte immédiatement des valeurs précitées (14) des deux arguments $\varphi_2^{(1)}$ et $\varphi_4^{(1)}$, qu'en sous-entendant les indices, tant inférieurs que supérieurs, ainsi que les modules, chacune des deux parenthèses de l'expression précédente de $I^{(0)}$ sera de la forme

$$Z(\varphi) - Z(K + iK')$$
$$= Z[\varphi - (K + iK')] + k^2 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}(K + iK') \operatorname{sn}[\varphi - (K + iK')]$$

en vertu de la formule connue d'addition de la fonction elliptique de deuxième espèce (*) : c'est-à-dire, en faisant attention que l'on a

$$(54)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}[\varphi - (K + iK')] = \operatorname{sn}[(\varphi + K + iK') - 2K - 2iK'] \\ \qquad = -\operatorname{sn}(\varphi + K + iK') = -\dfrac{\operatorname{dn}\varphi}{k \operatorname{cn}\varphi}, \end{cases}$$

(*) En effet, la dite formule, savoir

$$Z(x + \alpha) = Z(x) + Z(\alpha) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x + \alpha),$$

donne d'abord, en y changeant α en $-\alpha$, la fonction *sn* étant impaire,

$$Z(x - \alpha) = Z(x) - Z(\alpha) - k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x - \alpha),$$

puis de là :

$$Z(x) - Z(\alpha) = Z(x - \alpha) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(x - \alpha).$$

que les différences en question seront l'une et l'autre de la forme

$$(55)\quad \begin{cases} Z(\varphi) - Z(K + iK') = Z[\varphi - (K + iK')] + k^2 \operatorname{sn}\varphi \,.\, \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{-\operatorname{dn}\varphi}{k \operatorname{cn}\varphi} \\ \qquad = Z[\varphi - (K + iK')] - \dfrac{\operatorname{sn}\varphi \operatorname{dn}\varphi}{\operatorname{cn}\varphi}, \end{cases}$$

et par conséquent, en termes explicites, qu'elles auront respectivement pour expressions

$$(56)\qquad Z[\varphi_2^{(2)} - (K_2 + iK'_2)] - \frac{\operatorname{sn}(\varphi_2^{(2)}, k_2) \operatorname{dn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}$$

et

$$(57)\qquad Z[\varphi_4^{(2)} - (K_4 + iK'_4)] - \frac{\operatorname{sn}(\varphi_4^{(2)}, k_4) \operatorname{dn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}.$$

Nous avons déjà envisagé les divers éléments qui figurent dans ces deux expressions et calculé leurs valeurs dans le § I ci-dessus. En effet, quant aux seconds termes, composés de fonctions de première espèce seulement, si nous les désignons respectivement par Θ_2 et Θ_1, les égalités (19) et (23) nous donneront, en changeant dans la première expression le signe de deux facteurs,

$$(58)\quad \begin{cases} \Theta_1 = \dfrac{\operatorname{sn}(\varphi_4^{(2)}, k_4) \operatorname{dn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)}{\operatorname{cn}(\varphi_4^{(2)}, k_4)} = \sqrt{\dfrac{(x^2 - k^2)\, x^2}{(1 - x^2)\, k^2}} \\ \qquad = \dfrac{x}{k} \dfrac{\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \Theta_2 = \dfrac{\operatorname{sn}(\varphi_2^{(2)}, k_2) \operatorname{dn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)}{\operatorname{cn}(\varphi_2^{(2)}, k_2)} = \sqrt{\dfrac{(x^2 - k^2)(g^2 - k^2)}{(g^2 - x^2)(g'^2 + k^2)}} \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{g^2 - x^2}} \dfrac{\sqrt{g^2 - k^2}}{\sqrt{g'^2 + k^2}}; \end{cases}$$

et quant aux fonctions de deuxième espèce, leurs arguments sont encore exactement les mêmes que les arguments correspondants des fonctions de troisième espèce de l'expression (25), lesquelles provenaient dans le calcul précité d'une transformation analogue.

Donc en résumé, si nous convenons de désigner, ainsi que nous avons fait alors, par φ_2 l'argument de la nouvelle fonction ellip-

tique pour la première parenthèse, que nous venons de mettre sous la forme (56), et de même par φ_1 celui de la seconde parenthèse ramenée semblablement à la forme (57), en ayant soin d'écrire en même temps, pour la symétrie, k_1 à la place de k_4, ces deux parenthèses s'écriront alors respectivement

$$Z(\varphi_2, k_2) - \Theta_2 \qquad \text{et} \qquad Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1,$$

les quatre éléments φ_1, k_1 ; φ_2, k_2 étant précisément ceux définis par les équations (28) connexes de la formule qui fait l'objet de notre Théorème I. — Et par conséquent l'expression obtenue ci-dessus (53) pour notre intégrale actuelle $I^{(0)}$ sera elle-même, avec les hypothèses et les notations du présent Mémoire

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} I^{(0)} = &- 2m^3 x \sqrt{(1-x^2)(g^2-x^2)}\,[Z(\varphi_2, k_2) - \Theta_2] \\ &+ 2m^3 k \sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\,[Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1]. \end{aligned} \right.$$

Tel est donc le résultat auquel conduit, pour le calcul de l'intégrale double actuellement envisagée (37), le remplacement du système de variables s et t par le nouveau système de variables ω et θ introduit par les équations (35) de notre Chapitre I pour un objet tout semblable. Mais en conservant le système des variables proposées s et t, ou en termes plus précis, en employant de nouveau les variables x et k qui dépendent séparément de chacune d'elles, on arrive ainsi à un résultat de forme très différente, dont la comparaison avec le précédent nous fournira encore la nouvelle formule annoncée.

En effet, ayant, comme nous l'avons déjà trouvé, parmi les égalités (3), avec les variables x et k et les constantes g et g', définies par les équations (1) et (2),

$$(60)\qquad s + t + \varpi - f = - m^2 (k^2 - x^2),$$

nous en conclurons immédiatement pour la question actuelle

$$\begin{aligned} 3(s+t-f) + 2\varpi &= 3(s+t+\varpi-f) - \varpi \\ &= - 3m^2(k^2-x^2) - m^2 g'^2 \\ &= - m^2 [g'^2 + 3(k^2 - x^2)]; \end{aligned}$$

et dès lors, en tenant compte de l'égalité (5), l'on voit que l'élément de l'intégrale double actuellement envisagée (37) sera ainsi, étant exprimé à l'aide des variables et constantes précitées,

$$(60^{\text{bis}}) \quad \left\{ \begin{aligned} & - m^2 [g'^2 + 3(k^2 - x^2)] . im(x^2 + k^2 - g^2) \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ & = im^3 [(g'^2 + 3k^2) - 3x^2][(g^2 - k^2) - x^2] \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ & = im^3 \{(g'^2+3k^2)(g^2-k^2) - \{3(g^2-k^2)+(g'^2+3k^2)\} x^2 + 3x^4\} \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} ; \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, l'intégrale double elle-même aura alors pour expression :

$$(61) \quad I^{(0)} = im^3 \int_g^k \int_0^x [(g^2 - k^2)(g'^2 + 3k^2) - (g'^2 + 3g^2) x^2 + 3x^4] \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} .$$

Cela posé, pour effectuer la première intégration en x, déduisant successivement de notre définition (4) du symbole X

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} & X = (1 - x^2)(k^2 - x^2) = k^2 - (1 + k^2) x^2 + x^4, \\ & X' = -(1 + k^2) . 2x + 4x^3, \\ & \frac{d(x\sqrt{X})}{dx} = \sqrt{X} + x \frac{X'}{2\sqrt{X}} = \frac{X + x . \frac{1}{2} X'}{\sqrt{X}} \\ & \qquad = \frac{1}{\sqrt{X}} [k^2 - 2(1 + k^2) x^2 + 3x^4], \end{aligned} \right.$$

nous conclurons d'abord de cette dernière suite d'égalités, en n'en considérant que les membres extrêmes et la multipliant par dx, puis intégrant entre les limites 0 et x, la formule de réduction

$$x\sqrt{X} = k^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} - 2(1 + k^2) \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + 3 \int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}},$$

de laquelle nous tirerons :

$$(63) \quad 3 \int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}} = x\sqrt{X} - k^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + 2(1 + k^2) \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} .$$

Dès lors, nous trouverons sans peine, pour la quadrature en x de l'intégrale double ci-dessus (61),

$$(64)\left\{\begin{aligned}&\int_0^x [(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)-(g'^2+3g^2)x^2+3x^4]\frac{dx}{\sqrt{X}}\\&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-(g'^2+3g^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}+3\int_0^x\frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}}\\&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-(g'^2+3g^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\\&\quad+\left[x\sqrt{X}-k^2\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}+2(1+k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right]\\&\quad=x\sqrt{X}+\psi_2(k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-\psi_1(k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}},\end{aligned}\right.$$

en désignant, après réduction, par $\psi_1(k^2)$ et $\psi_2(k^2)$ les deux polynômes en k^2, dont l'indice marque le degré :

$$(65)\left\{\begin{aligned}\psi_1(k^2)&=(g'^2+3g^2)-2(1+k^2)=\{(1-g^2)+3g^2\}-2(1+k^2)\\&=-(1-2g^2)-2k^2,\\\psi_2(k^2)&=(g^2-k^2)(g'^2+3k^2)-k^2=\{g^2g'^2+(3g^2-g'^2)k^2-3k^4\}-k^2\\&=g^2g'^2+\{3g^2-(1-g^2)-1\}k^2-3k^4\\&=g^2g'^2-2(1-2g^2)k^2-3k^4.\end{aligned}\right.$$

En introduisant donc le résultat que nous venons de trouver (64) pour la quadrature en x dans l'expression ci-dessus (61) de l'intégrale double proposée, celle-ci deviendra

$$I^{(0)}=im^3\int_g^k\left[x\sqrt{X}+\psi_2(k^2)\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{X}}-\psi_1(k^2)\int_0^x\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right]\frac{2k\,dk}{\sqrt{X}},$$

c'est-à-dire, en remplaçant à présent, comme dans le § I, les quadratures en x par leurs expressions (8), puis développant :

$$(66)\quad \begin{cases} I^{(0)} = im^3 \Big[\displaystyle\int_g^k x\sqrt{X}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_2(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_1(k^2)\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \Big]. \end{cases}$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer la première de ces trois intégrales en k, laquelle est une fonction elliptique de deuxième espèce, ainsi qu'on l'aperçoit immédiatement en faisant $k^2 = y$; et cela fait, en égalant alors l'expression de $I^{(0)}$ ainsi obtenue à la précédente (59), on aura de cette façon la formule annoncée. Mais pour effectuer le calcul explicite de la dite intégrale, il sera plus commode d'employer le changement de variable que nous allons indiquer, lequel nous conduira très aisément, comme on va le voir, à ce résultat important, à savoir que la dite intégrale reproduit exactement (en tenant compte du coefficient constant im^3) le premier terme de l'expression antérieurement trouvée (59) pour la même quantité $I^{(0)}$, en sorte que ces deux termes égaux se détruiront dans l'égalité que nous venons de spécifier.

A cet effet, rappelant en premier lieu la première ligne des valeurs ci-dessus (51), ainsi que la définition (et conventions connexes) du symbole E [formule (55) du Chap. I], lesquelles donneront ensemble tout d'abord

$$(67)\quad S_2 = (l^2 - s_2)(n^2 + s_2) = -m^2x^2[-m^2(1 - x^2)] = m^4x^2(1 - x^2);$$

puis, en second lieu, la définition de la variable θ [formule (35) du Chap. I], et l'équation (60) ci-dessus, que nous allons récrire ici

$$(67^{\text{bis}})\qquad s + t - f = \theta, \qquad s + t + \varpi - f = -m^2(k^2 - x^2),$$

lesquelles étant rapprochées, en ayant égard à la valeur (1) de ϖ, établissent entre les variables θ et k les relations

$$(67^{\text{ter}})\qquad \theta + m^2g'^2 = -m^2(k^2 - x^2),$$

d'où

$$(68)\qquad k^2 = x^2 - g'^2 - \frac{\theta}{m^2}, \qquad \text{et} \qquad 2k\,dk = -\frac{d\theta}{m^2};$$

et exprimant alors la quadrature en question au moyen de la variable θ à la place de la variable k, nous constaterons tout d'abord que les deux limites θ_2 et θ_1 de la première, correspondant à celles k et g de la seconde, à savoir

$$(69)\quad \begin{cases} \theta_2 = \theta = -m^2(g'^2 + k^2 - x^2) \\ \theta_1 = -m^2(g'^2 + g^2 - x^2) = -m^2(1 - x^2), \end{cases}$$

coïncideront dès lors exactement avec celles de l'intégrale en θ qui correspond à la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ dans la somme (39), car ces dernières limites, définies avec cette hypothèse par les formules (40), ont pour expression, en vertu des valeurs (10) et de la définition de f [formule (14) du Chap. I],

$$(70)\quad \begin{cases} \theta_1 = s_2 + t_1 - f = (l^2 + m^2x^2) + l^2 - (l^2 - n^2) \\ \qquad = (l^2 + n^2) + m^2x^2 = -m^2(1 - x^2), \\ \theta_2 = s_2 + t_2 - f = (l^2 + m^2x^2) + [l^2 + m^2(g^2 - k^2)] - (l^2 - n^2) \\ \qquad = (l^2 + n^2) + m^2x^2 + m^2(g^2 - k^2) \\ \qquad = -m^2(1 - g^2) + m^2(x^2 - k^2) = -m^2(g'^2 + k^2 - x^2). \end{cases}$$

Cela posé, s'écrivant d'abord l'équation (67^{ter}) ainsi qu'il suit :

$$(70^{\text{bis}})\qquad m^2(k^2 - x^2) = -(m^2g'^2 + \theta) = -(\varpi + \theta),$$

puis déduisant successivement de l'expression (68) de k^2 et toujours des mêmes valeurs (10),

$$(71)\quad \begin{cases} g'^2 + k^2 = x^2 - \dfrac{\theta}{m^2}, \\ \text{d'où} \quad m^2(g'^2 + k^2) = m^2x^2 - \theta = -(l^2 - s_2 + \theta), \\ g^2 - k^2 = 1 - (g'^2 + k^2) = 1 - x^2 + \dfrac{\theta}{m^2}, \\ \text{d'où} \quad m^2(g^2 - k^2) = m^2(1 - x^2) + \theta = -(n^2 + s_2 - \theta), \end{cases}$$

les définitions (4) des quantités X et K donneront dès lors

$$\begin{cases} m^6\mathrm{X} = m^4(1-x^2).\,m^2(k^2-x^2) = m^4(1-x^2).\,[-(\varpi+\theta)], \\ m^4\mathrm{K} = m^2(g^2-k^2).\,m^2(g'^2+k^2) = (n^2+s_2-\theta)(l^2-s_2+\theta). \end{cases}$$

d'où en ayant égard à l'égalité (67), et prenant expressément la détermination positive des différents radicaux que nous allons écrire:

$$(72)\quad \begin{cases} m^3x\sqrt{\mathrm{X}} = x\sqrt{m^6\mathrm{X}} = x.\,m^2\sqrt{1-x^2}\,[\pm i\sqrt{\varpi+\theta}] \\ \qquad = \sqrt{\mathrm{S}_2}\,(\pm i\sqrt{\varpi+\theta}), \end{cases}$$

$$(73)\qquad m^2\sqrt{\mathrm{K}} = \sqrt{(l^2-s_2+\theta)(n^2+s_2-\theta)}.$$

Or, le signe qu'on doit prendre devant l'imaginaire i dans la première expression n'est point arbitraire, mais il est commandé ici, comme on va le voir, par un calcul antérieur. En effet, bien que ce symbole i représente par définition indifféremment $+\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, il est bien évident que la détermination que l'on aura adoptée arbitrairement pour sa signification à l'origine d'un calcul restera forcément la même pour toute la suite de ce calcul.

Or, ayant fait intervenir, pour écrire la suite d'égalités (60^{bis}), l'égalité antérieure (5) du § I, le signe qu'il faudra prendre dans ce calcul en extrayant de nouveau la racine de l'égalité (60) ou (67^{bis}) est donc forcément celui que nous avons adopté dans la dite égalité (5), alors que nous y avons pris

$$\sqrt{s+t+\varpi-f} = +\,im\sqrt{k^2-x^2},$$

ce qui revient à faire, en multipliant par $-i$ puis ayant égard encore à la définition (67^{bis}) de θ,

$$(74)\quad m\sqrt{k^2-x^2} = -\,i\sqrt{s+t+\varpi-f} = -\,i\sqrt{\varpi+\theta}\,;$$

d'où il suit que l'égalité ci-dessus (72) doit s'écrire, sans ambiguïté autre que celle inhérente à la signification du symbole i :

$$(75)\qquad m^3x\sqrt{\mathrm{X}} = -\,i\sqrt{\mathrm{S}_2}\,\sqrt{\varpi+\theta}.$$

En tenant compte alors de ces deux valeurs (75) et (73), ainsi que de celle (68) de $2k\,dk$, le premier terme en question de la nouvelle expression (66) de $I^{(0)}$ sera donc, avec la précision que nous venons de dire

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} im^3 \int_g^k x\sqrt{X}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} &= i\int_g^k m^3 x\sqrt{X}\,\frac{m^2.\,2k\,dk}{m^2\sqrt{K}} \\ &= i\int_{\theta_1}^{\theta_2}(-i\sqrt{S_2}\sqrt{\varpi+\theta})\,\frac{-d\theta}{\sqrt{(l^2-s_2+\theta)(n^2+s_2-\theta)}} \\ &= -\sqrt{S_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\sqrt{\varpi+\theta}}{\sqrt{l^2-s_2+\theta}\sqrt{n^2+s_2-\theta}}\,d\theta, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire exactement, eu égard à la signification convenue du double signe qui figure dans l'expression primitive (39) de $I^{(0)}$ (Chap. I, p. 45), le second terme de la dite somme, savoir celui correspondant à la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$, lequel terme représente bien à lui seul, comme il ressort du calcul ci-dessus, le premier des deux termes de l'expression postérieure (59) de la même quantité $I^{(0)}$.

Le terme en question disparaîtra donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé de l'égalité à provenir de la comparaison des deux expressions successives (59) et (66) de $I^{(0)}$, laquelle égalité se réduira dès lors à la suivante

$$im^3\left[\int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_2(k^2)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_1(k^2)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}\right]$$
$$= 2m^3k\sqrt{K}\,[Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1],$$

ou, en multipliant par $\frac{i}{m^3}$ et intervertissant simplement les deux termes de chaque membre,

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_1(k^2)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\psi_2(k^2)\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &\qquad = -2ik\sqrt{K}\,[\Theta_1 - Z(\varphi_1, k_1)], \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire enfin, eu égard à la signification des symboles K (4) et Θ_1 (58),

$$(78)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\psi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\psi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ = -2i\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[\dfrac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} - k\,Z(\varphi_1, k_1)\right], \end{cases}$$

les symboles $\psi_1(k^2)$ et $\psi_2(k^2)$ tenant lieu des polynômes (65) en k^2, et les éléments φ_1 et k_1 étant les mêmes que dans la formule analogue du Théorème I (p. 281).

On pourra sans grande peine, si l'on veut, vérifier encore cette formule *a posteriori* par la seule différentiation, au moyen d'un calcul analogue à celui mentionné plus haut (p. 286) pour notre Théorème I (*), mais cette fois bien plus simple et beaucoup plus facile.

Avant de formuler de nouveau en théorème le résultat auquel nous venons d'arriver, il nous sera utile pour la suite de ce travail de donner encore au second membre de la dite formule (78) une seconde forme composée d'éléments exclusivement réels, en introduisant, à la place des éléments φ_1 et k_1, les deux fonctions $F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)$ et $F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)$ elles-mêmes, ainsi que nous l'avons déjà fait dans le même but à l'occasion de la formule limite (36) ou (35) du Corollaire du Théorème I.

A cet effet, convenant de désigner par J le second membre en question, c'est-à-dire posant par conséquent

$$(79)\quad J = -2ik\sqrt{K}\,[\Theta_1 - Z(\varphi_1, k_1)] = 2ik\sqrt{K}\,[Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1],$$

si nous faisons de plus, pour abréger l'écriture,

$$(80)\qquad Z_1 = Z(\varphi_1, k_1) = \int_0^{\varphi_1} k_1^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_1, k_1)\,d\varphi_1,$$

(*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, T. XXI (1896-1897), 1re Partie, pp. 120-126.

nous aurons donc, quant à ce second membre :

$$(81)\qquad J = 2ik(Z_1 - \Theta_1), \qquad \frac{\delta J}{\delta x} = 2ik\sqrt{K}\left(\frac{\delta Z_1}{\delta x} - \frac{\delta\Theta_1}{\delta x}\right).$$

Or, comme, en empruntant à la suite d'égalités (33) du § I le premier et l'avant-dernier membre seulement, on aura

$$\varphi_1 = ik\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad \frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{ik}{\sqrt{X}},$$

on trouve donc, d'une part, pour le premier des deux termes, à l'intérieur de la parenthèse, de la seconde expression précédente, en ayant égard aux définitions (28) :

$$(82)\quad \frac{\delta Z_1}{\delta x} = k_1^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_1, k_1)\frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{1-k^2}{-k^2}\,\frac{-x^2}{1-x^2}\,\frac{ik}{\sqrt{X}} = \frac{i}{k}\,\frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)\sqrt{X}}.$$

D'autre part, quant au second terme, en prenant

$$\sqrt{k^2-x^2} = \sqrt{-(x^2-k^2)} = i\sqrt{x^2-k^2},$$

d'où

$$\sqrt{x^2-k^2} = -i\sqrt{k^2-x^2},$$

la définition (58) de Θ_1, en ayant égard à celle (4) de X, donnera successivement

$$\Theta_1 = \frac{x}{k}\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-i}{k}\frac{x\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{\delta\Theta_1}{\delta x} = \frac{-i}{k}\left(\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{-x}{\sqrt{k^2-x^2}} + x\sqrt{k^2-x^2}\,\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{-i}{k}\left(\frac{k^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} + \frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{k^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}}\right)$$

$$= \frac{-i}{k\sqrt{X}}\left[(k^2-x^2) + x^2\left(-1+\frac{k^2-x^2}{1-x^2}\right)\right] = \frac{-i}{k}\,\frac{k^2-2x^2+x^4}{(1-x^2)\sqrt{X}}.$$

Avec cette valeur et la précédente (82), la dérivée $\frac{\delta J}{\delta x}$ (81) deviendra donc

$$\frac{\delta J}{\delta x} = 2ik\sqrt{K}\left(\frac{i}{k}\frac{(1-k^2)x^2}{(1-x^2)\sqrt{X}} + \frac{i}{k}\frac{k^2-2x^2+x^4}{(1-x^2)\sqrt{X}}\right)$$

$$= -2\sqrt{K}\frac{(1-k^2)x^2+(k^2-2x^2+x^4)}{(1-x^2)\sqrt{X}} = -2\sqrt{K}\frac{k^2-(1+k^2)x^2+x^4}{(1-x^2)\sqrt{X}}$$

$$= -2\sqrt{K}\frac{(1-x^2)(k^2-x^2)}{(1-x^2)\sqrt{X}} = -2\sqrt{K}\frac{k^2-x^2}{\sqrt{X}},$$

valeur qui, étant multipliée par dx et intégrée de 0 à x, donnera alors, en ayant égard aux interprétations (8), pour nouvelle expression de la même quantité, J :

$$(83)\quad \begin{cases} J = -2\sqrt{K}\left[k^2\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} - \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}}\right] \\ \quad = -2\sqrt{K}\left[k^2 F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) - F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\right]. \end{cases}$$

La constante d'intégration est ici nulle, car si l'on fait $x=0$, d'une part, le second membre est manifestement nul, et d'autre part le premier membre J l'est aussi, en vertu de sa définition (79), jointe à celles (58) de Θ_1, attendu que sn (φ_1, k_1) l'est lui-même d'après sa définition (28). Et en introduisant dès lors dans la formule proposée (78) cette nouvelle expression de son second membre, on aura de cette façon la seconde forme exclusivement réelle de la même formule que nous voulions signaler à l'attention du Lecteur.

Comme conclusion de ce paragraphe, nous pouvons donc de nouveau formuler le Théorème suivant que nous y avons démontré rigoureusement par les calculs qui précèdent :

Théorème II. — *Les mêmes définitions, tant pour les symboles de fonctions* F_1 *et* F_2 *que pour les éléments* $\varphi_1, k_1,$ *et* $\varphi_2, k_2,$ *étant admises que dans le Théorème I précédent, si l'on représente en*

outre par ψ_1 *et* ψ_2 *les deux polynômes du premier et du second degré en* k^2,

$$(84)\quad \begin{cases} \psi_1(k^2) = -(1-2g^2) - 2k^2, \\ \psi_2(k^2) = g^2(1-g^2) - 2(1-2g^2)k^2 - 3k^4, \end{cases}$$

l'on aura la nouvelle formule de quadrature

$$(85)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ \displaystyle = -2i\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} - k\,Z(\varphi_1, k_1)\right], \end{cases}$$

que l'on pourra également présenter sous cette autre forme entièrement réelle :

$$(86)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{\psi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ \displaystyle = 2\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\left[F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) - k^2 F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\right]. \end{cases}$$

III

Considérons à présent le nouveau type d'intégrale double

$$(87)\qquad J^{(0)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{(s-t)\,[2st - m^2(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

dans l'élément duquel entre le produit st, tandis qu'il n'intervenait pas dans ceux des deux types envisagés respectivement dans les §§ I et II précédents, et transformons-le encore à l'aide des mêmes variables ω et θ définies par les équations (35) du Chapitre I. Toutefois, dans la seconde de ces équations, la constante g^2 qui représente, d'après la définition (14) du même Chapitre, le produit l^2n^2, pourra, tant en vue d'éviter ici la confusion des notations que de simplifier les calculs, être supposée nulle, puisque les trois constantes l^2, m^2, n^2 n'étant liées, en vertu de leur définition même [formules (4) du Chap. I], que par la seule relation $l^2 + m^2 + n^2 = 0$, l'on peut toujours à volonté admettre l'une des deux hypothèses $l^2 = 0$ ou bien $n^2 = 0$ (*).

Supposant donc $l^2 = 0$, et ayant ainsi à la fois par les égalités (5) et (14) précitées, puis (39) du dit Chapitre I,

$$(88)\qquad l^2 = 0,\quad m^2 = -n^2,\quad f = -n^2 = m^2,\quad g^2 = 0,$$

$$(89)\qquad st = \omega,\qquad \Omega = \omega(\omega + n^2\theta) = \omega^2 - m^2\theta.\,\omega,$$

l'intégrale double ci-dessus deviendra, étant exprimée en ω et θ, toujours en vertu des mêmes équations (35), (37) et (38^{bis}) du même

(*) Mais non pas la troisième hypothèse analogue $m^2 = 0$, car les formules (10) donnant alors $s_1 = s_2 = l^2$, $t_1 = t_2 = l^2$, nos trois intégrales doubles I, $I^{(0)}$, et $J^{(0)}$, successivement considérées seraient alors identiquement nulles, ainsi que toutes les autres que nous envisagerons dans la suite de ce travail.

Chapitre, et en omettant pour un instant l'indication des nouvelles limites,

$$J^{(0)} = \frac{1}{2}\iint \frac{(s-t)(2\omega - m^2\theta)}{\sqrt{\theta+\varpi}}\, \frac{\pm\,\partial(s,t)}{\partial(\omega,\theta)}\, \frac{d\omega\, d\theta}{\sqrt{\Omega}}$$
$$= \int\left(\int \frac{2\omega - m^2\theta}{2\sqrt{\Omega}}\, d\omega\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\theta+\varpi}} = \int\left(\int \frac{d.\sqrt{\Omega}}{d\omega}\, d\omega\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

puis, en introduisant les limites en question de la même façon que pour les intégrales doubles I et $I^{(0)}$ précédemment calculées :

$$(90)\qquad J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\epsilon+\eta_1-f}^{\epsilon+\eta_2-f} [\sqrt{\Omega}\,]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta}\, \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}}.$$

Or, si l'on se reporte, toujours dans le même Chapitre, aux définitions (39) et (53) des symboles Ω et E, et en même temps dans le § II précédent à celle (42) du symbole $\Delta\theta$, la valeur que prend le trinôme Ω pour $\omega = E + \epsilon\theta$ pourra s'écrire en général au moyen de ces symboles

$$\begin{aligned}
&[(E+\epsilon\theta) - l^2\theta]\,[(E+\epsilon\theta) + n^2\theta]\\
&= [E - (l^2-\epsilon)\,\theta]\,[E + (n^2+\epsilon)\,\theta]\\
&= (l^2-\epsilon)\,[(n^2+\epsilon) - \theta].\,(n^2+\epsilon)\,[(l^2-\epsilon)+\theta]\\
&= (l^2-\epsilon)\,(n^2+\epsilon).\,(l^2-\epsilon+\theta)\,(n^2+\epsilon-\theta)\\
&= E\,\frac{(\Delta\theta)^2}{\varpi+\theta},
\end{aligned}$$

et par conséquent on aura de même, en général,

$$[\sqrt{\Omega}\,]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} = \sqrt{E}\,\frac{\Delta\theta}{\varpi+\theta} - \sqrt{(\Theta - l^2\theta)\,(\Theta + n^2\theta)},$$

c'est-à-dire, dans la question actuelle, eu égard à l'hypothèse (88) :

$$(91)\qquad [\sqrt{\Omega}\,]_{\Theta}^{E+\epsilon\theta} = \sqrt{E}\,\frac{\Delta\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} - \sqrt{\Theta\,(\Theta - m^2\theta)}.$$

Avec cette expression, la valeur précédente (90) de $J^{(0)}$ sera, en introduisant de nouveau pour les limites de θ les notations (40),

$$J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\sqrt{E}\, \frac{\Delta\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}} - \sqrt{\Theta(\Theta - m^2\theta)} \right] \frac{d\theta}{\sqrt{\varpi+\theta}},$$

c'est-à-dire simplement, en vertu du Théorème des pages 60-61 de notre Chapitre I déjà tant de fois invoqué :

$$(92) \qquad J^{(0)} = \sum_{\epsilon} \pm \sqrt{E} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Delta\theta}{\varpi+\theta}\, d\theta.$$

Cela posé, pour calculer l'intégrale définie qui figure dans cette expression, introduisant de nouveau, comme dans le § II, les éléments φ et k définis par les équations (74) du Chapitre I, les égalités (42), (44) et (45) du présent travail nous donneront, quant à l'intégrale indéfinie tout d'abord,

$$(93) \quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\Delta\theta.\, d\theta}{\varpi+\theta} = \int \frac{(\Delta\theta)^2}{\varpi+\theta} \frac{d\theta}{\Delta\theta} = \int \frac{-\,NL^2\, \mathrm{sn}^2\varphi\, \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi}{L\, \mathrm{sn}^2\varphi} \frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{N}} \\ \displaystyle\qquad = 2iL\sqrt{N} \int \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi = 2i\,N^{\frac{3}{2}}.\, k^2 \int \mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Or, ayant d'une part

$$\mathrm{cn}^2\varphi\, \mathrm{dn}^2\varphi = (1 - \mathrm{sn}^2\varphi)(1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\varphi) = 1 - (1 + k^2)\, \mathrm{sn}^2\varphi + k^2\, \mathrm{sn}^4\varphi,$$

et d'autre part, la formule classique (*)

$$\mathrm{sn}^m\varphi\, \mathrm{cn}\,\varphi\, \mathrm{dn}\,\varphi = m \int \mathrm{sn}^{m-1}\varphi\, d\varphi - (m+1)(1+k^2) \int \mathrm{sn}^{m+1}\varphi\, d\varphi$$
$$+ (m+2)\, k^2 \int \mathrm{sn}^{m+3}\varphi\, d\varphi,$$

(*) Nous voulons dire, sous une autre forme, la formule classique

$$x^m \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$
$$= m \int \frac{x^{m-1}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - (m+1)(1+k^2) \int \frac{x^{m+1}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$+ (m+2)\, k^2 \int \frac{x^{m+3}\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dans laquelle on a fait $x = \mathrm{sn}\,\varphi$.

donnant pour $m = 1$, entre les limites 0 et φ,

$$3k^2 \int_0^\varphi \operatorname{sn}^4 \varphi \, d\varphi = \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi - \varphi + 2(1+k^2) \int_0^\varphi \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi,$$

et en multipliant par k^2,

$$(94) \quad 3k^4 \int_0^\varphi \operatorname{sn}^4 \varphi \, d\varphi = k^2 (\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi - \varphi) + 2(1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi),$$

on trouvera donc ainsi successivement

$$3k^2 \int_0^\varphi \operatorname{cn}^2 \varphi \operatorname{dn}^2 \varphi \, d\varphi = 3 \int_0^\varphi k^2 [1 - (1+k^2) \operatorname{sn}^2 \varphi + k^2 \operatorname{sn}^4 \varphi] \, d\varphi$$

$$= 3k^2 \int_0^\varphi d\varphi - 3(1+k^2) \int_0^\varphi k^2 \operatorname{sn}^2 \varphi \, d\varphi + 3k^4 \int_0^\varphi \operatorname{sn}^4 \varphi \, d\varphi$$

$$= 3k^2 \varphi - 3(1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi) + [k^2 (\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi - \varphi) + 2(1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi)]$$

$$= k^2 (\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi + 2\varphi) - (1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi)$$

$$= k^2 (\Phi + 2\varphi) - (1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi),$$

en convenant de faire désormais, pour abréger, avec un indice quelconque (inférieur ou supérieur) pour φ :

$$(95) \qquad \Phi = \operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi.$$

Si nous remettons alors cette dernière valeur au dernier membre des égalités précédentes (93), en adoptant encore pour les limites de φ les mêmes notations que dans le § II (pp. 291 et 292), nous obtiendrons de cette façon pour l'intégrale définie proposée l'expression :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Delta\theta}{\varpi + \theta} \, d\theta = \frac{2}{3} i \mathrm{N}^{\frac{3}{2}} . \, 3k^2 \int_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}} \operatorname{cn}^2 \varphi \operatorname{dn}^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2}{3} i \mathrm{N}^{\frac{3}{2}} \Big[k^2 (\Phi + 2\varphi) - (1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi) \Big]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}$$

$$= \frac{2}{3} \, i \mathrm{N}^{\frac{3}{2}} \Big[k^2 \Phi + \{ 2k^2 \varphi - (1+k^2) \operatorname{Z}(\varphi) \} \Big]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}}.$$

Par suite, en rappelant, d'une part, la définition (48) du symbole $\overline{\mathrm{E}}$ et, d'autre part, les valeurs (52) de ses quatre déterminations successives, l'expression ci-dessus (92) de $\mathrm{J}^{(0)}$ deviendra sous forme condensée

$$(96)\quad \mathrm{J}^{(0)} = \frac{2}{3}\sum_{\epsilon} \pm\, i\,\mathrm{N}\overline{\mathrm{E}}\left[k^2\Phi + \left\{2k^2\varphi - (1+k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi)\right\}\right]_{\varphi^{(1)}}^{\varphi^{(2)}},$$

ou, ce qui est la même chose sous forme explicite, en convenant de représenter respectivement par N_2 et N_4 les valeurs du coefficient N pour chacune des déterminations $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$ et $\epsilon = \epsilon_4 = t_2$, c'est-à-dire en désignant ainsi désormais les deux valeurs empruntées au tableau (51),

$$(97)\quad \begin{cases} \mathrm{N}_2 = \varpi + n^2 + s_2 = m^2(x^2 - g^2), \\ \mathrm{N}_4 = \varpi + n^2 + t_2 = -\, m^2k^2, \end{cases}$$

et tenant compte encore de la signification convenue pour le double signe,

$$(98)\quad \begin{cases} \mathrm{J}^{(0)} = -\dfrac{2}{3}\, i\,\mathrm{N}_2\overline{\mathrm{S}}_2\left[k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi, k_2)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \\ \qquad + \dfrac{2}{3}\, i\,\mathrm{N}_4\overline{\mathrm{T}}_2\left[k_4^2\Phi + \left\{2k_4^2\varphi - (1+k_4^2)\,\mathrm{Z}(\varphi, k_4)\right\}\right]_{\varphi_4^{(1)}}^{\varphi_4^{(2)}}, \end{cases}$$

valeur que nous écrirons en abrégé

$$(99)\quad \mathrm{J}^{(0)} = -\,\Omega_2 + \Omega\,,$$

en faisant encore, pour faciliter les transformations ultérieures (*):

$$(100)\quad \begin{cases} \Omega_2 = \dfrac{2}{3}\ \mathrm{N}_2\overline{\mathrm{S}}_2\left[k_2^2\Phi + \left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi, k_2)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}, \\ \Omega_4 = \dfrac{2}{3}\, i\,\mathrm{N}_4\overline{\mathrm{T}}_2\left[k_4^2\Phi + \left\{2k_4^2\varphi - (1+k_4^2)\,\mathrm{Z}(\varphi, k_4)\right\}\right]_{\varphi_4^{(1)}}^{\varphi_4^{(2)}}. \end{cases}$$

(*) L'exemple du calcul analogue du paragraphe précédent fait aisément prévoir que les fonctions elliptiques au module k_2, qui composent le premier des deux termes de cette dernière expression (99) ou (98), ou le second des précédentes (92) ou (90), se retrouveront également dans l'autre membre de l'équation à intervenir, et donneront lieu dès lors à des réductions qui ne

Occupons-nous d'abord du second de ces deux termes, lequel étant développé sera :

$$(101)\quad \left\{\begin{array}{l} \Omega_4 = \frac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2} \left[k_4^2 (\Phi_4^{(2)} - \Phi_4^{(1)}) + 2k_4^2 (\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)}) \right. \\ \qquad\qquad \left. - (1 + k_4^2) \left\{ Z(\varphi_4^{(2)}) - Z(\varphi_4^{(1)}) \right\} \right]. \end{array}\right.$$

Alors, si l'on se rappelle la valeur $\varphi_4^{(1)} = K_4 + iK_4'$ que nous avons trouvée dans le § I [formule (14)] et utilisée encore dans le § II, la définition (95) du symbole Φ, rapprochée de celle (58) du symbole Θ_1, nous donnera en premier lieu

$$(102)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_4^{(1)} = \operatorname{sn} \varphi_4^{(1)} \operatorname{cn} \varphi_4^{(1)} \operatorname{dn} \varphi_4^{(1)} = 0, \\ \Phi_4^{(2)} = \operatorname{sn} \varphi_4^{(2)} \operatorname{cn} \varphi_4^{(2)} \operatorname{dn} \varphi_4^{(2)} = \Theta_1 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)}, \end{array}\right.$$

et en second lieu, la différence $Z(\varphi_4^{(2)}) - Z(\varphi_4^{(1)})$, étant la même qui figure déjà au dernier terme de l'expression (53) de $I^{(0)}$, prendra donc encore la forme $Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1$, si nous convenons de faire comme alors (pp. 280 et 279) $k_4 = k_1$ et $\varphi_4^{(2)} - \varphi_4^{(1)} = \varphi_1$, en sorte que, pour tous ces motifs réunis, l'expression précédente (101) deviendra la suivante

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= \frac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2} \left[k_1^2 \Theta_1 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) \left\{ Z(\varphi_1, k_1) - \Theta_1 \right\} \right] \\ &= \frac{2}{3} i\, N_4 \overline{T_2} \left[\left\{ k_1^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + (1 + k_1^2) \right\} \Theta_1 + \left\{ 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) Z(\varphi_1, k_1) \right\} \right], \end{aligned}$$

que nous écrirons alors ainsi

$$(103)\quad \Omega_4 = \frac{2i}{3} \left[\Delta_4 + N_4 \overline{T_2} \left\{ 2k_1^2 \varphi_1 - (1 + k_1^2) Z(\varphi_1, k_1) \right\} \right],$$

en introduisant le symbole Δ_4 pour représenter la partie algébrique en x et k (au facteur constant $\frac{2i}{3}$ près) du développement de la dite quantité, savoir :

$$(104)\qquad \Delta_4 = N_4 \left\{ k_1^2 \operatorname{cn}^2 \varphi_4^{(2)} + (1 + k_1^2) \right\} \overline{T_2}\, \Theta_1.$$

---

s'offriront point à l'occasion du second terme des mêmes expressions. C'est pourquoi chacun de ces deux termes devant ainsi donner lieu à des transformations différentes, il convient, pour en faciliter le calcul, d'introduire un symbole spécial pour chacun d'eux.

Pour avoir l'expression explicite en x et k de cette dernière quantité, les valeurs (58) de Θ_1 et (52) de $\overline{T}_2$ donnant d'abord pour la valeur du produit $\overline{T}_2\,\Theta_1$

$$(104^{\text{bis}})\quad \left\{\begin{aligned} \overline{T}_2\,\Theta_1 &= im^3 k\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\cdot\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{k\sqrt{1-x^2}} \\ &= im^3\sqrt{K}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}\right.$$

il suffira dès lors de se reporter ensuite aux valeurs (28) de k_1^2 et (22) de $\operatorname{cn}^2\varphi_1^{(2)}$ ainsi qu'à celle (97) de N_4 pour obtenir ainsi successivement quant à l'expression de la dite quantité :

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_1 &= (-m^2k^2)\cdot\left[\frac{1-k^2}{-k^2}\,\frac{1-x^2}{1-k^2}+\left(1+\frac{1-k^2}{-k^2}\right)\right]\overline{T}_2\,\Theta_1 \\ &= m^2\left[(1-x^2)+\left\{-k^2+(1-k^2)\right\}\right] im^3\sqrt{K}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= im^5\left[2(1-k^2)-x^2\right]\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\,\frac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}\right.$$

Quant au premier terme Ω_2 de l'expression (99) ou (98), nous en déterminerons exactement de la même façon la valeur, mais seulement après réduction, dans l'égalité à intervenir, avec le terme de même nature qui s'introduira dans l'autre membre de la dite égalité que nous allons à présent calculer; à savoir l'expression en x et k de la même intégrale double proposée $J^{(0)}$, ainsi que nous l'avons fait déjà pour établir les deux Théorèmes précédents.

A cet effet, ayant supposé au début du présent paragraphe $l^2=0$, les valeurs de s et t, qui se confondent par hypothèse avec celles de s_2 et t_2, seront donc actuellement, d'après les formules (10),

$$(106)\quad s=m^2x^2 \quad\text{et}\quad t=m^2(g^2-k^2),\quad\text{d'où}\quad st=m^4(g^2-k^2)x^2,$$

et dès lors, tirant de l'égalité (60) la valeur

$$(107)\quad \left\{\begin{aligned} s+t-f &= -\varpi-m^2(k^2-x^2) \\ &= -m^2g'^2-m^2(k^2-x^2) \\ &= -m^2\left[(g'^2+k^2)-x^2\right], \end{aligned}\right.$$

on voit donc, qu'en tenant compte de l'égalité (5), l'élément de l'intégrale double envisagée (87) deviendra, étant exprimé en x et k à la place de s et t,

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{(s-t)\,[2st - m^2(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}} \\ &= 2\,[2st - m^2(s+t-f)]\cdot\frac{1}{4}\frac{s-t}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}} \\ &= 2\,[2m^4(g^2-k^2)\,x^2 + m^4\{(g'^2+k^2) - x^2\}]\times \\ &\qquad\qquad im\,[x^2-(g^2-k^2)]\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{k\,dk}{\sqrt{K}} \\ &= im^5\,[2\lambda x^2 + (\mu - x^2)]\,(x^2-\lambda)\frac{dx}{\sqrt{X}}\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour en faciliter le calcul,

$$(109)\qquad g^2 - k^2 = \lambda, \qquad\qquad g'^2 + k^2 = \mu,$$

d'où

$$(110)\qquad \lambda + \mu = 1, \qquad \mu = 1 - \lambda, \qquad \lambda - \mu = \lambda - (1-\lambda) = 2\lambda - 1.$$

Or, ayant ainsi

$$2\lambda x^2 + (\mu - x^2) = (2\lambda - 1)\,x^2 + \mu = (\lambda - \mu)\,x^2 + \mu,$$

on en déduira

$$\begin{aligned}[2\lambda x^2 + (\mu - x^2)]\,(x^2-\lambda) &= [(\lambda-\mu)\,x^2 + \mu]\,(x^2-\lambda) \\ &= (\lambda-\mu)\,x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu,\end{aligned}$$

le coefficient ν, qui est ici une fonction entière de k^2, ayant pour valeur

$$(111)\qquad \left\{\begin{aligned} \nu &= \mu - \lambda\,(\lambda-\mu) = \mu\,(1+\lambda) - \lambda^2 \\ &= (1-\lambda)\,(1+\lambda) - \lambda^2 = 1 - 2\lambda^2, \end{aligned}\right.$$

en sorte que l'élément en question sera ainsi définitivement :

$$(112)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{(s-t)\,[2st - m^2(s+t-f)]}{\sqrt{s+t+\varpi-f}}\frac{ds}{\sqrt{S}}\frac{dt}{\sqrt{T}} \\ &= im^5\,[(\lambda-\mu)\,x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu]\,\frac{dx}{\sqrt{X}}\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, l'intégrale double proposée (87) pourra être développée, en intégrant d'abord en x, ainsi qu'il suit

$$J^{(0)} = im^5 \int_g^k \left(\int_0^x [(\lambda - \mu) x^4 + \nu x^2 - \lambda\mu] \frac{dx}{\sqrt{X}} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} \right.$$

$$= \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) . 3 \int_0^x \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X}} + 3\nu \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} - 3\lambda\mu \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}},$$

c'est-à-dire, en employant de nouveau la formule de réduction (63) déjà utilisée pour le calcul analogue du paragraphe précédent,

$$J^{(0)} = \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) . \left(x\sqrt{X} - k^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + 2(1 + k^2) \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} \right) \right.$$

$$\left. + 3\nu \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} - 3\lambda\mu \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$

$$= \frac{1}{3} im^5 \int_g^k \left[(\lambda - \mu) x\sqrt{X} + A \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} + B \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right] \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}},$$

les nouveaux coefficients A et B étant encore les fonctions entières de k^2,

$$(113) \qquad \begin{cases} A = 2(\lambda - \mu)(1 + k^2) + 3\nu, \\ B = -(\lambda - \mu) k^2 - 3\lambda\mu, \end{cases}$$

auquel cas, si l'on convient de désigner par $\mathcal{K}$ l'intégrale simple en k

$$(114) \qquad \mathcal{K} = \frac{1}{3} im^5 \int_g^k (\lambda - \mu) x \sqrt{X} \frac{2k\,dk}{\sqrt{K}}$$

que nous allons calculer dans un instant, et qu'en outre on remplace encore une fois les quadratures en x par leurs interprétations (8), l'expression considérée de $J^{(0)}$ sera donc en fin de compte :

$$(115) \quad J^{(0)} = \mathcal{K} + \frac{1}{3} im^5 \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{A . 2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{B . 2k\,dk}{\sqrt{K}} \right].$$

Il convient, avant d'aller plus loin, de développer et d'ordonner les polynômes en k^2 que représentent les quantités A et B (113), introduites tout à l'heure. Or, en ayant égard aux définitions précédentes (109) de λ et μ, ainsi qu'à la valeur (111) de ν, et aux égalités (110), l'on trouvera sans peine, d'abord pour le coefficient A,

$$(116)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= 2(\lambda-\mu)(1+k^2)+3\nu = 2(-1+2\lambda)(1+g^2-\lambda)+3\nu \\ &= 2\left[-(1+g^2)+\left\{1+2(1+g^2)\right\}\lambda-2\lambda^2\right]+3(1-2\lambda^2) \\ &= \left\{3-2(1+g^2)\right\}+2(3+2g^2)\lambda-(4+6)\lambda^2 \\ &= (1-2g^2)+(6+4g^2)(g^2-k^2)-10(g^4-2g^2k^2+k^4) \\ &= (1+4g^2-6g^4)-(6-16g^2)k^2-10k^4; \end{aligned} \right.$$

et de même ensuite pour B, en changeant tous les signes :

$$(117)\quad \left\{ \begin{aligned} -B &= (\lambda-\mu)k^2+3\lambda\mu = (-1+2\lambda)(g^2-\lambda)+3\lambda(1-\lambda) \\ &= \left[-g^2+(1+2g^2)\lambda-2\lambda^2\right]+(3\lambda-3\lambda^2) \\ &= -g^2+\left\{(1+2g^2)+3\right\}\lambda-(2+3)\lambda^2 \\ &= -g^2+(4+2g^2)(g^2-k^2)-5(g^4-2g^2k^2+k^4) \\ &= 3g^2(1-g^2)-(4-8g^2)k^2-5k^4. \end{aligned} \right.$$

Reste maintenant à effectuer le calcul de l'intégrale simple en k (114), en calquant en quelque sorte nos procédés sur ceux déjà employés pour le calcul de la quadrature analogue qui formait de même le premier terme de l'expression (66) de $I^{(0)}$ dans le paragraphe précédent.

Or, d'une part, la différentiation de l'expression (76) obtenue pour ce même terme fournira l'égalité

$$(118)\quad \left\{ \begin{aligned} im^3 x\sqrt{X}\,\frac{2k\,dk}{\sqrt{K}} &= -\sqrt{S_2}\,\frac{\sqrt{\varpi+\theta}\cdot d\theta}{\sqrt{l^2-s_2+\theta}\,\sqrt{n^2+s_2+\theta}} \\ &= -\sqrt{S_2}\,(\varpi+\theta)\,\frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}}, \end{aligned} \right.$$

en employant de nouveau le symbole $\Delta\theta$ (41), et spécifiant par l'indice s_2 dont nous l'affectons la détermination de ϵ expressément considérée.

D'autre part, la définition (109) de λ donnant par le moyen de la dernière égalité de droite (71), en tenant compte de l'hypothèse actuelle (88) et de la valeur connexe (106) de $s_2 = s$,

$$\begin{aligned} m^2\lambda &= m^2(g^2 - k^2) = -(n^2 + s_2 - \theta) = -n^2 - s_2 + \theta \\ &= m^2(1 - g^2) + m^2g^2 - s_2 + \theta = (\varpi + \theta) + m^2g^2 - m^2x^2, \end{aligned}$$

l'égalité de droite (110) donnera donc pour le cas actuel

$$(119)\quad \left\{ \begin{aligned} m^2(\lambda - \mu) &= m^2(2\lambda - 1) = 2m^2\lambda - m^2 \\ &= 2[(\varpi + \theta) + m^2(g^2 - x^2)] - m^2 \\ &= -m^2(1 - 2g^2 + 2x^2) + 2(\varpi + \theta) \\ &= -m^2X_1 + 2(\varpi + \theta), \end{aligned} \right.$$

en faisant pour un instant :

$$(120)\qquad X_1 = 1 - 2g^2 + 2x^2.$$

En tenant compte de ces deux expressions (119) et (118), la quadrature en question $\mathcal{K}$ (114) sera donc, étant exprimée en θ à la place de k :

$$(121)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{3}\, im^5 \int_g^k (\lambda - \mu)\, x \sqrt{X}\, \frac{2k\, dk}{\sqrt{K}} \\ &= \frac{1}{3} \int_g^k m^2(\lambda - \mu).\, im^3\, x \sqrt{X}\, \frac{2k\, dk}{\sqrt{K}} \\ &= \frac{1}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [-m^2X_1 + 2(\varpi + \theta)].(-\sqrt{S_2})(\varpi + \theta) \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}} \\ &= \frac{\sqrt{S_2}}{3} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [m^2X_1(\varpi + \theta) - 2(\varpi + \theta)^2] \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}}\, . \end{aligned} \right.$$

Cela posé, changeons encore une fois de variable en prenant de nouveau, comme dans le cas précédent, à la place de θ la variable φ définie par les égalités (41) et (42) du § II, mais considérées encore expressément pour la détermination $\epsilon = \epsilon_2 = s_2$; en d'autres termes, ayant fait de même cette fois

$$(122)\quad \left\{ \begin{aligned} &L_2 = \varpi - l^2 + s_2, \qquad N_2 = \varpi + n^2 + s_2, \\ &(\Delta\theta)_{s_2} = \sqrt{(\varpi + \theta)(l^2 - s_2 + \theta)(n^2 + s_2 - \theta)}, \end{aligned} \right.$$

posons avec ces définitions

$$(123) \qquad k_2^2 = \frac{L_2}{N_2}, \qquad \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2) = \frac{\varpi + \theta}{L_2},$$

puis déduisons-en successivement comme alors

$$(124) \left\{ \begin{aligned} \varpi + \theta &= L_2 \operatorname{sn}^2 \varphi, \qquad l^2 - s^2 + \theta = - L_2 \operatorname{cn}^2 \varphi, \\ & \qquad\qquad n^2 + s_2 - \theta = N_2 \operatorname{dn}^2 \varphi, \end{aligned} \right.$$

$$(125) \qquad \frac{d\theta}{(\Delta\theta)_{s_2}} = \frac{2\,d\varphi}{i\sqrt{N_2}};$$

et enfin remarquons, qu'en rapprochant l'une de l'autre les premières égalités précédentes (124) et (123), et de même la définition (120) de X_1 de la valeur antérieurement trouvée (97) pour N_2, jointe à celle (28) de k_2^2, nous pourrons alors écrire à la fois :

$$(126) \left\{ \begin{aligned} & \varpi + \theta = N_2 . \frac{L_2}{N_2} \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2) = N_2 . k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2), \\ & m^2 X_1 = m^2(1 - 2g^2 + 2x^2) \\ & \qquad = m^2(x^2 - g^2) . \left(1 + \frac{x^2 + (1 - g^2)}{x^2 - g^2}\right) = N_2 . (1 + k_2^2). \end{aligned} \right.$$

Avec ces deux dernières valeurs et la précédente (125), la quadrature envisagée (121), étant exprimée en φ au lieu de θ, deviendra donc successivement

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{\sqrt{S_2}}{3} \int_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \Big(N_2 (1 + k_2^2) . N_2 k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2) \\ & \qquad\qquad - 2\,[N_2 k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2)]^2 \Big) \frac{2 d\varphi}{i\sqrt{N_2}} \\ &= \frac{-2i}{3} S_2^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{3}{2}} \int_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} \Big[(1 + k_2^2)\, k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2) - 2 k_2^4 \operatorname{sn}^4(\varphi, k_2) \Big] d\varphi \\ &= \frac{-2i}{3^2} S_2^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{3}{2}} \Big[3(1 + k_2^2) . \int_0^{\varphi} k_2^2 \operatorname{sn}^2(\varphi, k_2)\, d\varphi \\ & \qquad\qquad - 2.3 k_2^4 \int_0^{\varphi} \operatorname{sn}^4(\varphi, k_2)\, d\varphi \Big]_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_2^{(2)}}; \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ayant recours de nouveau à la formule de quadrature (94), puis employant encore les deux notations très commodes des symboles Φ (95) et $\overline{\mathrm{E}}$ (48) :

$$\mathfrak{K} = \frac{-2i}{3^2} (S_2 N_2)^{\frac{1}{2}} N_2 \left[3(1+k_2^2) Z(\varphi) - 2 \left\{ k_2^2 (\operatorname{sn}\varphi \operatorname{cn}\varphi \operatorname{dn}\varphi - \varphi) + 2(1+k_2^2) Z(\varphi) \right\} \right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$

$$= \frac{-2i}{3^2} N_2 \overline{S}_2 \left[-2k^2 \Phi + \left\{ 2k_2^2 \varphi - (1+k_2^2) Z(\varphi) \right\} \right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} ;$$

et par conséquent, celle (115) de $J^{(0)}$, qui doit constituer le premier membre de l'équation que nous nous proposons de former, sera elle-même :

$$J^{(0)} = -\frac{2i}{3^2} N_2 \overline{S}_2 \left[-2k_2^2 \Phi + \left\{ 2k_2^2 \varphi - (1+k_2^2) Z(\varphi) \right\} \right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$

$$+ \frac{1}{3} i m^5 \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{A.\, 2k\, dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{B.\, 2k\, dk}{\sqrt{K}} \right].$$

Nous n'avons plus à présent qu'à égaler cette dernière expression de $J^{(0)}$ à celle (99) [écrite en abrégé à l'aide de la notation suivante (100)], précédemment obtenue par le moyen du système de variables ω et θ, pour posséder la formule demandée, laquelle sera ainsi, sous réserve des réductions et transformations algébriques très simples qui nous restent encore à accomplir,

$$-\frac{2i}{3^2} N_2 \overline{S}_2 \left[-2k_2^2 \Phi + \left\{ 2k_2^2 \varphi - (1+k_2^2) Z(\varphi) \right\} \right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}}$$

$$+ \frac{1}{3} i m^5 \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{A.\, 2k\, dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{B.\, 2k\, dk}{\sqrt{K}} \right]$$

$$= -\frac{2i}{3^2} N_2 \overline{S}_2 \left[3k_2^2 \Phi + 3 \left\{ 2k_2^2 \varphi - (1+k_2^2) Z(\varphi) \right\} \right]_{\varphi_1^{(2)}}^{\varphi_2^{(2)}} + \Omega_4 ;$$

c'est-à-dire, en effectuant alors les réductions que nous venons d'annoncer, l'équation suivante dont le second membre se développera et se transformera ensuite exactement de la même façon que pour le calcul ci-dessus de la quantité Ω_4 (100), puisque en nous reportant de même aux considérations exposées dans le paragraphe précédent (pp. 31-33) nous aurons semblablement

$$\left\{\begin{aligned}
&\varphi_2^{(1)} = K_2 + iK_2', \qquad \varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)} = \varphi_2,\\
&Z(\varphi_2^{(2)}) - Z(\varphi_2^{(1)}) = Z(\varphi_2) - \Theta_2,\\
&\Phi_2^{(1)} = \operatorname{sn}\varphi_2^{(1)} \operatorname{cn}\varphi_2^{(1)} \operatorname{dn}\varphi_2^{(1)} = 0,\\
&\Phi_2^{(2)} = \operatorname{sn}\varphi_2^{(2)} \operatorname{cn}\varphi_2^{(2)} \operatorname{dn}\varphi_2^{(2)} = \Theta_2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)},
\end{aligned}\right.$$

à savoir l'équation

$$(127)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{3} im^5 \left[\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{A.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right)\frac{B.\,2k\,dk}{\sqrt{K}}\right]\\
&= -\frac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\left[5k_2^2\Phi + 2\left\{2k_2^2\varphi - (1+k_2^2)Z(\varphi)\right\}\right]_{\varphi_2^{(1)}}^{\varphi_2^{(2)}} + \Omega_4\\
&= -\frac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\Big[5k_2^2(\Phi_2^{(2)} - \Phi_2^{(1)}) + 2\cdot 2k_2^2(\varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)})\\
&\qquad\qquad - 2(1+k_2^2)\left\{(Z(\varphi_2^{(2)}) - Z(\varphi_2^{(1)})\right\}\Big] + \Omega_4\\
&= -\frac{2i}{3^2} N_2\overline{S_2}\Big[5k_2^2.\,\Theta_2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)} + 2\left\{2k_2^2\varphi_2\right.\\
&\qquad\qquad \left.- (1+k_2^2)(Z(\varphi_2) - \Theta_2)\right\}\Big] + \Omega\\
&= -\frac{2i}{3^2}\left[\Delta_2 + 2N_2\overline{S_2}\left\{2k_2^2\varphi_2 - (1+k_2^2)Z(\varphi_2)\right\}\right] + \Omega_4,
\end{aligned}\right.$$

en représentant comme plus haut [formule (104)] par Δ_2 la partie algébrique en x et k (au facteur constant $\frac{-2i}{3^2}$ près) du développement de ce second membre, savoir

$$(128)\qquad \Delta_2 = N_2\left\{5k_2^2 \operatorname{cn}^2\varphi_2^{(2)} + 2(1+k_2^2)\right\}\overline{S_2}\,\Theta_2,$$

laquelle reste ainsi seule à calculer, exactement de la même façon que la quantité analogue (104).

A cet effet, déduisant d'abord des valeurs (52) de $\overline{S}_2$ et (58) de Θ_2 celle du produit

$$(129)\quad \begin{cases} \overline{S}_2\Theta_2 = im^3x\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}.\dfrac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{g^2-x^2}}\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ \qquad = im^3x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}, \end{cases}$$

nous conclurons ensuite de cette valeur jointe à celles (97) de N_2, (28) de k_2 et (18) de $\mathrm{cn}^2\,\varphi_2^{(2)}$, pour la quantité ci-dessus (128), la suivante :

$$(130)\quad \begin{cases} \Delta_2 = m^2(x^2-g^2).\left[5\dfrac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\dfrac{g'^2+k^2}{x^2+g'^2} + 2\left(1+\dfrac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\right)\right]\overline{S}_2\Theta_2 \\ \quad = m^2\overline{S}_2\Theta_2.\left[5(1-g^2+k^2)+2\left\{(x^2-g^2)+(x^2+1-g^2)\right\}\right] \\ \quad = im^5\left[(7-9g^2)+4x^2+5k^2\right]x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}. \end{cases}$$

Cette dernière valeur ainsi obtenue, multiplions à présent par $\dfrac{-3i}{m^5}$ la suite d'égalités qui précède (127), en faisant abstraction de tous les membres intermédiaires et supposant, au dernier membre, le symbole Ω_1 remplacé par sa valeur (103); l'égalité qui résultera de cette opération, et qui est précisément celle à laquelle nous voulions arriver, sera

$$(131)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{A.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} + \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k},k\right)\frac{B.\,2k\,dk}{\sqrt{K}} \\ = -\dfrac{2}{3m^5}\left[\Delta_2 + 2N_2\overline{S}_2\left\{2k_2^2\varphi_2-(1+k_2^2)Z(\varphi_2)\right\}\right] \\ \quad + \dfrac{2}{3m^5}\left[3\Delta_4 + 3N_4\overline{T}_2\left\{2k_1^2\varphi_1-(1+k_1^2)Z(\varphi_1)\right\}\right] \\ = \dfrac{2}{3}\left[\nabla - 2\dfrac{N_2\overline{S}_2}{m^5}\left\{2k_2^2\varphi_2-(1+k_2^2)Z(\varphi_2)\right\}\right. \\ \qquad \left. + 3\dfrac{N_4\overline{T}_2}{m^5}\left\{2k_1^2\varphi_1-(1+k_1^2)Z(\varphi_1)\right\}\right], \end{cases}$$

en désignant encore par le symbole ∇ la nouvelle partie algébrique, qui sera dans cette équation, eu égard aux valeurs (130) de Δ_2 et (105) de Δ_4 :

$$
(132)\quad \begin{cases}
\nabla = \dfrac{1}{m^5}(-\Delta_2 + 3\Delta_4) \\
\quad = \dfrac{1}{m^5}\Big[- im^5 \{(7 - 9g^2) + 4x^2 + 5k^2\} \times \\
\qquad\qquad x\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2-k^2}\,\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\
\qquad + 3im^5\{2(1-k^2) - x^2\}\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\,\dfrac{x\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\Big] \\
\quad = ix\sqrt{x^2-k^2}\sqrt{g^2-k^2}\Big[-\{(7-g^2) + 4x^2 + 5k^2\}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\
\qquad + 3\{2(1-k^2) - x^2\}\dfrac{\sqrt{g'^2+k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\Big] \\
\quad = ix\,\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)\,\dfrac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}},
\end{cases}
$$

en convenant de représenter enfin par $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ le polynôme à deux variables dont l'indice marque le degré en x^2 et k^2, savoir

$$
\mathfrak{F}_2(x^2, k^2) = -[(7 - 9g^2) + 4x^2 + 5k^2](1 - x^2) \\
+ 3[2(1-k^2) - x^2](g'^2 + k^2),
$$

lequel polynôme $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ satisfera ainsi *à priori*, de par sa définition même, à la condition $\mathfrak{F}_2(1, -g'^2) = 0$, et représentera, étant développé et ordonné, l'expression suivante que procure un calcul très facile :

$$
(133)\quad \mathfrak{F}_2(x^2, k^2) = 4x^4 + 2x^2k^2 - 6k^4 - 6g^2x^2 - (5 - 6g^2)k^2 - (1 - 3g^2).
$$

D'ailleurs, les expressions (52) de $\overline{S_2}$ et $\overline{T_2}$, et (97) de N_2 et N_4 donneront aussi très aisément pour les valeurs respectives des

coefficients des deux parenthèses, à l'intérieur des crochets, dans la forme d'équation obtenue en dernier lieu (131), savoir :

$$(134)\quad \begin{cases} -2\,\dfrac{N_2\overline{S}_2}{m^5} = \dfrac{-2}{m^5}\,[-m^2(g^2-x^2)].\,im^3x\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2} \\ \qquad = 2ix\sqrt{1-x^2}\,(g^2-x^2)^{\frac{3}{2}}, \\ 3\,\dfrac{N_4\overline{T}_2}{m^5} = \dfrac{3}{m^5}\,(-m^2k^2).\,im^3k\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2} \\ \qquad = -3ik^3\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}. \end{cases}$$

En résumé, si pour donner au résultat de ce calcul, une forme analogue à celle des résultats obtenus dans les §§ I et II précédents, nous convenons de représenter par $\varpi_1(k^2)$ et $\varpi_2(k^2)$ les polynômes du second degré en k^2 que nous avons trouvés ci-dessus pour expressions des coefficients A (116) et — B (117), en ayant égard à ces dernières valeurs (134) et (133), ainsi qu'à celles (132) de ∇, et mettant alors en évidence le facteur i, l'on voit donc que nous pouvons formuler le dit résultat par l'énoncé du nouveau Théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on désigne respectivement par $\varpi_1(k^2)$ et $\varpi_2(k^2)$ les deux polynômes du second degré en k^2*

$$(135)\quad \begin{cases} \varpi_1(k^2) = (1+4g^2-6g^4)-(6-16g^2)\,k^2-10k^4, \\ \varpi_2(k^2) = 3g^2(1-g^2)-(4-8g^2)\,k^2-5k^4, \end{cases}$$

et par $\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)$ le polynôme à deux variables, dont l'indice marque le degré en x^2 et k^2,

$$(136)\quad \mathfrak{F}_2(x^2,k^2) = 4x^4+2x^2k^2-6k^4-6g^2x^2-(5-6g^2)\,k^2-(1-3g^2),$$

l'on aura, toujours avec les mêmes définitions, la troisième formule de quadrature :

$$(137)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\varpi_1(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} - \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{\varpi_2(k^2).\,2k\,dk}{\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}} \\ &= \frac{2i}{3}\Bigg[x\,\mathfrak{F}_2(x^2, k^2) \frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &\qquad + 2x\sqrt{1-x^2}\,(g^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \left\{ 2k_2^2\varphi_2 - (1+k_2^2)\,Z(\varphi_2, k_2) \right\} \\ &\qquad - 3k^3\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2} \left\{ 2k_1^2\varphi_1 - (1+k_1^2)\,Z(\varphi_1, k_1) \right\} \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Nous retrouvons également ce même résultat par deux autres méthodes absolument différentes de celle qui nous l'a procuré tout à l'heure, mais nous ne pourrions exposer encore ces deux nouvelles démonstrations sans étendre outre mesure le développement de ce Mémoire.

IV

La classe d'intégrales que nous avons en vue dans ce Mémoire est celle qui est comprise dans le type général

$$\int_g^k F\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}. 2k\,dk}{\sqrt{(g^2 - k^2)(g'^2 + k^2)}},$$

l'exposant n étant un entier positif ou négatif et le symbole F désignant indifféremment l'une ou l'autre des deux intégrales elliptiques normales F_1 ou F_2 (7), qui nous ont servi de point de départ pour cette étude.

Nous proposant comme but de ce travail d'en déterminer l'expression, si cela est possible à l'aide des fonctions connues ou, dans le cas contraire, de les ramener à leurs éléments irréductibles les plus simples, nous introduirons en conséquence, pour représenter chacune d'elles, un symbole spécial qui sera la lettre I ou la lettre J, suivant que ce sera la fonction F_1 ou la fonction F_2 qui figurera dans l'élément différentiel, la dite lettre étant dans les deux cas affectée de l'indice n ; en d'autres termes nous poserons :

$$(138) \quad I_n = \int_g^k F_1\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}. 2k\,dk}{\sqrt{K}}, \quad J_n = \int_g^k F_2\left(\frac{x}{k}, k\right) \frac{k^{2n}. 2k\,dk}{\sqrt{K}}.$$

Ces définitions étant admises, il est clair, d'une part, que les premiers membres de chacune des formules des trois Théorèmes démontrés jusqu'ici seront des fonctions linéaires et homogènes des premières de ces quantités I_n, J_n.

D'autre part, il résulte immédiatement des définitions (28) des deux modules k_1 et k_2, lesquelles donnent respectivement

$$\begin{cases} -k^2 k_1^2 = 1 - k^2, & -k^2(1+k_1^2) = 1 - 2k^2, \\ (x^2 - g^2)\,k_2^2 = x^2 + g'^2, & (x^2 - g^2)(1+k_2^2) = 2x^2 + (g'^2 - g^2), \end{cases}$$

qu'en adjoignant aux notations originaires (4), pour toute la suite de ce Mémoire également, ces nouvelles définitions

$$(139) \quad \mathfrak{X} = (1 - x^2)(g^2 - x^2), \qquad \Delta = \frac{\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{\sqrt{g^2 - k^2}}{\sqrt{g'^2 + k^2}},$$

l'on pourra écrire alors aussi bien

$$\begin{cases} \sqrt{\mathrm{K}}\, \dfrac{x\sqrt{x^2 - k^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = x(g'^2 + k^2)\,\Delta, \\[2ex] -k^3\sqrt{\mathrm{K}}\,\{ 2k_1^2\varphi_1 - (1 + k_1^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1) \} \\ \quad = k\sqrt{\mathrm{K}}\,\{ 2(1 - k^2)\,\varphi_1 - (1 - 2k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1) \}, \\[2ex] x\sqrt{1 - x^2}\,(g^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,\{ 2k_2^2\varphi_2 - (1 + k_2^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2, k_2) \} \\ \quad = x\sqrt{\mathfrak{X}}\,\{ 2(x^2 + g'^2)\,\varphi_2 - (2x^2 + g'^2 - g^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2, k_2) \}, \end{cases}$$

en sorte que les formules des trois Théorèmes démontrés jusqu'ici deviendront ainsi (en changeant tous les signes quant à la seconde), les quatre équations linéaires par rapport aux quantités I_n, J_n en question que nous allons écrire :

Tableau A

$$(\mathrm{I}) \quad \mathrm{J}_0 - (g^2\,\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_1) = 2ig'\,[\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)],$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} [(1 - 2g^2)\,\mathrm{J}_0 + 2\mathrm{J}_1] + [g^2(1 - g^2)\,\mathrm{I}_0 - 2(1 - 2g^2)\,\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2] \\ \qquad = 2i\,[x(g'^2 + k^2)\,\Delta - k\sqrt{\mathrm{K}}\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1)], \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} [(1 + 4g^2 - 6g^4)\,\mathrm{J}_0 - (6 - 16g^2)\,\mathrm{J}_1 - 10\mathrm{J}_2] - [3g^2(1 - g^2)\,\mathrm{I}_0 - (4 - 8g^2)\,\mathrm{I}_1 - 5\mathrm{I}_2] \\ = \dfrac{2i}{3}\,[x\,\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)\,\Delta + 2x\sqrt{\mathfrak{X}}\,\{ 2(x^2 + g'^2)\,\varphi_2 - (2x^2 + g'^2 - g^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_2, k_2) \} \\ \qquad + 3k\sqrt{\mathrm{K}}\,\{ 2(1 - k^2)\,\varphi_1 - (1 - 2k^2)\,\mathrm{Z}(\varphi_1, k_1) \}]. \end{cases}$$

En présence de ces premiers résultats, l'idée vient naturellement à l'esprit de chercher à reconnaître combien l'on pourra former, à l'aide des mêmes procédés, en partant à chaque fois d'un nouveau type d'intégrale double convenablement choisi, d'équations semblables distinctes, entre un nombre déterminé de ces quantités I_n, J_n, parce que si, par hasard, les deux nombres étaient les mêmes de part et d'autre, l'expression de chacune de ces quantités serait alors évidemment de la même forme que chacun des seconds membres des équations ci-dessus : c'est-à-dire qu'elle se composerait d'un terme algébrique de la forme $ix\,\mathfrak{F}(x^2, k^2)\,\Delta$, $\mathfrak{F}$ désignant un polynôme à deux variables, et d'une expression linéaire par rapport aux trois fonctions elliptiques relatives aux éléments φ_1, h_1, k_1 d'une part et φ_2, h_2, k_2 de l'autre; et que si, au contraire, le nombre des équations était constamment inférieur au nombre des inconnues d'un même nombre fixe, soit 2 par exemple, les dites quantités se ramèneraient toutes, dans ce cas, aux mêmes éléments que tout à l'heure, et en outre aux *deux* premières d'entre elles I_0 et J_0, qui seraient alors des éléments irréductibles, à la façon des trois intégrales elliptiques de Legendre dans le calcul des quadratures de différentielles algébriques de la forme $f(x, \sqrt{X})$, X étant un polynôme du 3^e ou du 4^e degré.

Or, malgré la présomption contraire, c'est la première de ces deux conjectures que l'événement réalise (*), et le fait se produit pour la première fois quant aux huit inconnues $I_0, J_0, \ldots I_3, J_3$. Nous ne pouvons, évidemment, à cause de la longueur de semblables calculs, former ici effectivement ces huit équations, ni même les reproduire toutes explicitement; nous nous bornerons donc à rapporter seulement les trois suivantes, qui suffisent pour indiquer les éléments analytiques qui figureront dans l'expression des huit inconnues I_n, J_n précitées, lesquelles équations seront

(*) En l'état actuel de la question, en effet, et jusqu'à complète et rigoureuse étude du problème, cette conjecture n'offre qu'une probabilité très faible, et si elle se trouve réalisée par le fait, comme le montrera la suite de ce travail, ce résultat est dû uniquement à la forme très particulière de la fonction algébrique de k^2, savoir $2k^{2n+1}(g^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}}(g'^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}}$, qui accompagne en qualité de facteur les intégrales elliptiques F_1 ou F_2 dans l'élément des quadratures envisagées ci-dessus.

obtenues en partant respectivement des trois types nouveaux d'intégrale double :

$$(140) \quad \mathrm{I}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} (s-t)[5(s+t-f)+2\varpi](s+t+\varpi-f)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

$$(141) \quad \mathrm{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} (s-t)[2st-m^2(s+t-f)](s+t+\varpi-f)^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}},$$

$$(142) \quad \mathfrak{J}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2} (s-t)\, st\, (st+m^2\varpi)\, (s+t+\varpi-f)^{-\frac{3}{2}} \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{S}}}\frac{dt}{\sqrt{\mathrm{T}}}.$$

En faisant, pour faciliter la lecture de ces équations,

$$(143) \quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{J}_2(x^2, k^2) &= 2x^4 + x^2k^2 - 12k^4 - 3g^2x^2 - (7-12g^2)k^2 + (4-3g^2),\\
\mathfrak{F}_3(x^2, k^2) &= -26x^6 + 2x^4k^2 + 144x^2k^4 - 15k^6\\
&\quad - (44-70g^2)x^4 + (58-190g^2)x^2k^2 - (9-15g^2)k^4\\
&\quad + (-32+37g^2+10g^4-20g^6)x^2 + (30+40g^2)k^2\\
&\quad + (42-47g^2-10g^4+20g^6),\\
\mathcal{J}_3(x^2, k^2) &= 16x^6 + 8x^4k^2 + 6x^2k^4 - 30k^6\\
&\quad - (2+40g^2)x^4 - 20g^2x^2k^2 - (21-60g^2)k^4\\
&\quad - (16-3g^2-30g^4)x^2 + (7+20g^2-30g^4)k^2\\
&\quad + (2+22g^2-15g^4),
\end{aligned}\right.$$

ces trois polynômes en x^2 et k^2 étant tels que, si on les confond sous le même symbole $\mathfrak{F}(x^2, k^2)$, ils vérifient tous les trois la condition $\mathfrak{F}(1, -g'^2) = 0$, les dites équations s'écriront alors respectivement :

Tableau B

$$
\text{(IV)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left[(2 + 5g^2 - 9g^4)\,J_0 - (9 - 26g^2)\,J_1 - 17J_2\right] \\
&-\left[(1 + 7g^2 - 9g^4)\,I_1 - (10 - 24g^2)\,I_2 - 15I_3\right] \\
&= \frac{2i}{3}\Big(x\,\mathcal{J}_2(x^2,k^2)\,\Delta + x\sqrt{\mathfrak{X}}\left[2(x^2 + g'^2)\,\varphi_2 - (2x^2 + g'^2 - g^2)\,Z(\varphi_2,k_2)\right] \\
&\qquad + 3k\sqrt{K}\left[(1 - k_2)\,\varphi_1 - 2\,(1 - 2k^2)\,Z(\varphi_1,k_1)\right]\Big),
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(V)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left[(2 + g^2 - 5g^4)\,J_0 + (-3 + 4g^2 + 10g^4)\,J_1 + (3 - 24g^2)\,J_2 + 14J_3\right] \\
&-\left[(1 - 7g^2 + 5g^4)\,I_1 - (8 - 12g^2)\,I_2 - 7I_3\right] \\
&= \frac{2i}{15}\Big(x\,\mathfrak{F}_3(x^2,k^2)\,\Delta + x\sqrt{\mathfrak{X}}\Big[\big\{16x^2 - (12 - 4g^2)\big\}\cdot(x^2 + g'^2)\,\varphi_2 \\
&\qquad - \big\{16x^4 - (4 + 12g^2)\,x^2 - (9 - 14g^2 + 4g^4)\big\}\,Z(\varphi_2,k_2)\Big] \\
&\qquad - 15k\sqrt{K}\left[(2k^2 - 1).(1 - k^2)\,\varphi_1 - 2(k^4 - k^2 + 1)\,Z(\varphi_1,k_1)\right]\Big),
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(VI)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left[(3g^2 + 2g^4 - 6g^6)\,J_0 - (3 + 10g^2 - 26g^4)\,J_1 + (8 - 34g^2)\,J_2 + 14J_3\right] \\
&-\left[3\,(g^4 - g^6)\,I_0 - (9 - 13g^4)\,I_1 + (6 - 17g^2)\,I_2 + 7I_3\right] \\
&= \frac{2i}{15}\Big(x\,\mathcal{J}_3(x^2,k^2)\,\Delta + 2x\sqrt{\mathfrak{X}}\Big[\big\{-8x^2 + (1 + 8g^2)\big\}\cdot(x^2 + g'^2)\,\varphi_2 \\
&\qquad + \big\{8x^4 + (3 - 16g^2)\,x^2 - (2 + 3g^2 - 8g^4)\big\}\,Z(\varphi_2,k_2)\Big] \\
&\quad + 15k\sqrt{K}\left[2(k^2 - g^2).(1 - k^2)\,\varphi_1 - \big\{2k^4 - (1 + 2g^2)\,k^2 + g^2\big\}\,Z(\varphi_1,k_1)\right]\Big).
\end{aligned}\right.
$$

Mais, si nous ne pouvons, à cause de leur longueur, effectuer ici les calculs d'intégration qui nous fourniraient par cette voie l'expression explicite des huit premières quantités I_n, J_n, nous allons, à la place, démontrer rigoureusement *a posteriori*, par la seule différentiation, la forme du résultat auquel nous auraient conduits les calculs précités, en nous proposant de résoudre la question suivante :

Problème. — *Etant considérées les deux expressions, savoir : d'une part celle-ci*

$$(144) \qquad I = \alpha I_0 + \beta J_0 + \gamma I_1 + \delta J_1 + \epsilon I_2 + \eta J_2 + \theta I_3 + \zeta J_3 + \xi I_4,$$

dans laquelle les neuf coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ *sont des constantes numériques arbitrairement données; et d'autre part la suivante*

$$(145) \quad \begin{cases} J = x\left(\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)\sqrt{X}\,\dfrac{\sqrt{g^2 - k^2}}{\sqrt{g'^2 + k^2}} + \mathcal{J}_2(x^2, k^2)\sqrt{K}\,\dfrac{\sqrt{k^2 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\right) \\ \quad + ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\dfrac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2} f_2(x^2)\,\varphi_2 + \dfrac{f_3(x^2)}{x^2 + g'^2} Z(\varphi_2, k_2)\right) \\ \quad + ik\sqrt{K}\left(\dfrac{1 - k^2}{- k^2} f_2(x^2)\,\varphi_1 + \dfrac{f_3(k^2)}{1 - k^2} Z(\varphi_1, k_1)\right) \\ \quad + \lambda i g' \left\{ \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1) \right\}, \end{cases}$$

dans laquelle, en outre des notations précédemment convenues, les symboles $\mathfrak{F}, \mathcal{J}, f$ *et* f *désignent des polynômes de deux ou une variable, à coefficients indéterminés, dont l'indice marque le degré : est-il possible de disposer de tous les coefficients de ces polynômes, ainsi que du dernier coefficient* λ, *de manière que l'on ait identiquement, c'est-à-dire quels que soient ceux* $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ *de* I :

$$(146) \qquad \frac{\delta^2 I}{\delta x\, \delta k} = \frac{\delta^2 J}{\delta x\, \delta k}\,?$$

Avant d'entreprendre l'étude de cette question, montrons tout d'abord, afin d'en faire comprendre l'intérêt, que, si elle est résolue affirmativement, cette réponse équivaudra en fait à la possession demandée de chacune des huit inconnues I_n, J_n précitées, et en outre de la neuvième I_4.

En effet, la condition proposée (146) équivaut tout d'abord à celle-ci

$$(147) \qquad I = J + \psi(x) + \varpi(k).$$

Mais on aperçoit de suite que chacune des fonctions I et J séparément est nulle lorsqu'on y fait à la fois $x = 0$ et $k = g$. Cela résulte immédiatement, quant à la première I, des défini-

tions (138) des quantités I_n, J_n; et quant à la seconde, des définitions (28) des arguments φ_1 et φ_2, ainsi que nous l'avons expliqué déjà à propos du Théorème I (p. 280).

Si donc on introduit en même temps la double supposition que nous venons de dire dans l'égalité précédente (147), elle se réduira par là à

$$0 = \psi(x) + \varpi(k), \qquad \text{ou} \qquad \psi(x) = -\varpi(k) = \text{const.},$$

(car c'est la seule façon dont cette condition puisse être vérifiée) et, par conséquent l'égalité (147) elle-même se réduira à $I = J$, à laquelle égalité équivaut ainsi complètement la condition (146) proposée par le problème.

Cela étant, si l'on suppose cette dernière remplie, c'est-à-dire si l'on suppose tous les divers coefficients de la seconde expression J déterminés en fonction de ceux de la première I, comme nous allons l'expliquer, de manière à satisfaire à la dite condition (146), il est clair que pour avoir successivement l'expression de chacune des quantités I_n, J_n considérées, il suffira de supposer à chaque fois les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \xi$ nuls sauf un seul, qu'on supposera égal à l'unité, et d'introduire dès lors cette hypothèse dans les valeurs obtenues pour les divers coefficients de J.

Abordons donc à présent le problème proposé qui équivaut ainsi, comme on le voit, à la connaissance synthétique des expressions cherchées.

Pour rendre plus claire l'exposition de cette démonstration, laquelle repose en grande partie sur la considération des degrés des différents polynômes qui y interviendront, nous aurons soin, en règle générale, d'affecter toujours les symboles de chacun de ces polynômes (à deux ou une variable) d'un indice qui en marquera le degré en x^2 et k^2, ainsi que nous l'avons déjà fait pour ceux qui figuraient dans l'énoncé du Problème.

Cette observation faite une fois pour toutes, si l'on tient compte des interprétations (8), qui permettent d'écrire la définition (138) des quantités I_n, J_n sous la forme

$$I_n = \int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right) \frac{k^{2n} . 2k\, dk}{\sqrt{K}}, \quad J_n = \int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X}} \right) \frac{k^{2n} . 2k\, dk}{\sqrt{K}},$$

on aura immédiatement, pour la dérivée seconde considérée de I,

$$(148)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} &= \frac{2k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}(\alpha + \beta x^2 + \gamma k^2 + \delta x^2k^2 + \epsilon k^4 + \eta x^2k^4 + \theta k^6 \\ &\qquad + \zeta x^2k^6 + \xi k^8) \\ &= \frac{2k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left[(\alpha + \gamma k^2 + \epsilon k^4 + \theta k^6 + \xi k^8)\right. \\ &\qquad \left. + x^2(\beta + \delta k^2 + \eta k^4 + \zeta k^6)\right]. \end{aligned}\right.$$

C'est donc à cette forme qu'il s'agit de voir s'il est possible de ramener l'autre dérivée seconde $\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$.

Pour cela, en vue de faciliter l'écriture des calculs, nous poserons successivement

$$(149)\qquad x\sqrt{X}\,\frac{\sqrt{g^2 - k^2}}{\sqrt{g'^2 + k^2}} = \Delta', \qquad x\sqrt{K}\,\frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = \Delta'',$$

$$(150)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}_2(x^2, k^2) &= \alpha' x^4 + \beta' x^2k^2 + \gamma' k^4 + \delta' x^2 + \epsilon' k^2 + \eta' = P', \\ \mathcal{F}_2(x^2, k^2) &= \alpha'' x^4 + \beta'' x^2k^2 + \gamma'' k^4 + \delta'' x^2 + \epsilon'' k^2 + \eta'' = P'', \end{aligned}\right.$$

$$(151)\quad \left\{\begin{aligned} &ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\frac{x^2 + g'^2}{x^2 - g^2} f_2(x^2)\,\varphi_2 + \frac{f_3(x^2)}{x^2 + g'^2} Z(\varphi_2, k_2)\right) = Q', \\ &ik\sqrt{K}\,\left(\frac{1 - k^2}{- k^2} f_1(k^2)\,\varphi_1 + \frac{f_3(k^2)}{1 - k^2} Z(\varphi_1, k_1)\right) = Q'', \end{aligned}\right.$$

$$(152)\qquad \lambda i g' \,\{\, \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1) \,\} = R,$$

$$(153)\qquad P'\Delta' + P''\Delta'' = P, \qquad Q' + Q'' = Q;$$

et, avec ces diverses notations, l'expression (145) de J s'écrira dès lors sous l'une ou l'autre des trois formes

$$(154)\quad \left\{\begin{aligned} J = P + Q + R &= (P'\Delta' + P''\Delta'') + (Q' + Q'') + R \\ &= (P'\Delta' + Q') + (P''\Delta'' + Q'') + R, \end{aligned}\right.$$

et donnera, quant à la dernière :

$$(155)\qquad \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} = \frac{\delta^2(P'\Delta' + Q')}{\delta x\,\delta k} + \frac{\delta^2(P''\Delta'' + Q'')}{\delta x\,\delta k} + \frac{\delta^2 R}{\delta x\,\delta k}.$$

Nous allons calculer successivement ces trois termes.

Pour le dernier tout d'abord, la définition (152) de R, rapprochée de la formule (27) du Théorème I, donnant, en tenant compte des expressions (8) des fonctions F_1 et F_2,

$$R = \frac{1}{2}\lambda . 2ig' \left\{ \Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda . \left[\int_g^k \left(\int_0^x \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X}} \right) \frac{2k\, dk}{\sqrt{K}} - \int_g^k \left(\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} \right) (g^2 - k^2) \frac{2k\, dk}{\sqrt{K}} \right],$$

on obtiendra donc immédiatement :

$$(156) \quad \frac{\delta^2 R}{\delta x\, \delta k} = \frac{1}{2}\lambda \frac{x^2 - (g^2 - k^2)}{\sqrt{X}} \frac{2k}{\sqrt{K}} = \lambda (x^2 + k^2 - g^2) \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}.$$

Cela fait, pour calculer le premier terme, nous tirerons de la définition (149) de Δ', eu égard à celle (4) de X,

$$l\Delta' = l(x\sqrt{1 - x^2}) + \frac{1}{2} l(k^2 - x^2) + \frac{1}{2} l(g^2 - k^2) - \frac{1}{2} l(g'^2 + k^2),$$

$$(157) \quad \frac{\delta . l\Delta'}{\delta k} = k\left(\frac{1}{k^2 - x^2} + \frac{1}{k^2 - g^2} - \frac{1}{k^2 + g'^2} \right) = \frac{kV'}{U'},$$

en faisant :

$$(158) \quad \left\{ \begin{aligned} U' &= (k^2 - x^2)(k^2 - g^2)(k^2 + g'^2), \\ V' &= (k^2 - g^2)(k^2 + g'^2) + (k^2 + g'^2)(k^2 - x^2) - (k^2 - x^2)(k^2 - g^2) \\ &= k^4 + 2g'^2 k^2 - \left\{ g^2 g'^2 + (g'^2 - g^2)x^2 \right\} \\ &= (k^4 + 2g'^2 k^2 + g'^4) - \left\{ (g'^4 + g^2 g'^2) + x^2 \right\} \\ &= (k^2 + g'^2)^2 - \left\{ g'^2 (g'^2 + g^2) + x^2 \right\} = (k^2 + g'^2)^2 - (g'^2 + x^2). \end{aligned} \right.$$

Nous aurons donc alors, par le moyen de cette valeur (157) de $\frac{\delta . l\Delta'}{\delta k}$, d'une part,

$$\frac{\delta . P'\Delta'}{\delta k} = \Delta'\left(P' \frac{\delta l\Delta'}{\delta k} + \frac{\delta P'}{\delta k} \right) = \Delta'\left(P' \frac{kV'}{U'} + \frac{\delta P'}{\delta . k^2} 2k \right)$$

$$= \frac{k\Delta'}{U'}\left(P'V' + 2U' \frac{\delta P'}{\delta . k^2} \right),$$

expression pour laquelle les définitions (149) de Δ' et (158) de U' donneront

$$(159)\quad \begin{cases} \dfrac{k\Delta'}{U'} = k.x\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}\dfrac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\cdot\dfrac{1}{-(k^2-x^2)(g^2-k^2)(g'^2+k^2)} \\ \quad = \dfrac{-k}{(g'^2+k^2)\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}}\,\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}} \\ \quad = \dfrac{-k}{(g'^2+k^2)\sqrt{K}}\,\Theta, \end{cases}$$

en faisant de nouveau

$$(160)\qquad \Theta = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

et qui deviendra donc successivement, par le moyen de cette valeur (159) puis de celle (158) de V' :

$$(161)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta.\,P'\Delta'}{\delta k} = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\,\dfrac{P'V' + 2U'\dfrac{\delta P'}{\delta.\,k^2}}{g'^2+k^2} \\ \quad = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left(P'\dfrac{V'}{k^2+g'^2} + 2\dfrac{U'}{k^2+g'^2}\,\dfrac{\delta P'}{\delta.\,k^2}\right) \\ \quad = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left[P'\left((k^2+g'^2) - \dfrac{g'^2+x^2}{k^2+g'^2}\right) + 2\dfrac{U'}{k^2+g'^2}\,\dfrac{\delta P'}{\delta.\,k^2}\right] \\ \quad = \dfrac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left[\left(P'(k^2+g'^2) - (g'^2+x^2)\dfrac{P'}{k^2+g'^2}\right) + 2\dfrac{U'}{k^2+g'^2}\,\dfrac{\delta P'}{\delta.\,k^2}\right]. \end{cases}$$

Or, la définition (150) de P' donnant

$$\begin{cases} P' = \mathfrak{F}_2(x^2, k^2) = \gamma'(k^2)^2 + (\beta' x^2 + \epsilon')k^2 + (\alpha' x^4 + \delta' x^2 + \eta'), \\ \dfrac{P'}{k^2+g'^2} = \gamma' k^2 + \{-\gamma' g'^2 + (\beta' x^2 + \epsilon')\} - \dfrac{\mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)}{k^2+g'^2}, \\ \dfrac{\delta P'}{\delta.\,k^2} = 2\gamma' k^2 + (\beta' x^2 + \epsilon'), \end{cases}$$

l'expression précédente (161) deviendra donc, en y remettant ces valeurs, ainsi que celle (158) de U',

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta P'\Delta'}{\delta k} &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\Bigg[\Big\{P'(k^2+g'^2)-(x^2+g'^2)\times \\ &\qquad\left(\gamma'k^2+(-\gamma'g'^2+\beta'x^2+\epsilon')+\frac{\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)}{k^2+g'^2}\right)\Big\} \\ &\qquad+2(k^2-x^2)(k^2-g^2)(2\gamma'k^2+\beta'x^2+\epsilon')\Bigg] \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left(\mathfrak{F}_3(x^2,k^2)-\frac{(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)}{k^2+g'^2}\right), \end{aligned}\right.$$

en faisant encore une fois :

$$(163)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{F}_3(x^2,k^2) = \mathfrak{F}_2(x^2,k^2)(k^2+g'^2) & \\ -(x^2+g'^2)\{\gamma'k^2+(-\gamma'g'^2+\beta'x^2+\epsilon')\} & \\ +2(k^2-x^2)(k^2-g^2)\{2\gamma'k^2+(\beta'x^2+\epsilon')\}. & \end{aligned}\right.$$

D'autre part, si l'on se rappelle la définition de la fonction elliptique de deuxième espèce $Z(\omega, k)$, savoir

$$Z(\omega, k) = \int_0^\omega k^2\,\mathrm{sn}^2(\omega, k)\,d\omega,$$

la définition (151) de Q, donnera, en tenant compte toujours de celles (28) des éléments k_2 et φ_2,

$$(164)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta Q'}{\delta k} &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}+\frac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2}k_2^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_2,k_2)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}\right) \\ &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)+\frac{f_3(x^2)}{x^2+g'^2}\,\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\right)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k} \\ &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)+\frac{f_3(x^2)}{x^2-g^2}\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right)\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}. \end{aligned}\right.$$

Or, quant au dernier facteur $\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}$, ayant ($k_2$ étant indépendant de k)

$$(165) \qquad \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k} = \frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta\varphi_2}\,\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\varphi_2}{\delta k} = \frac{\dfrac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k}}{2\,\mathrm{sn}\,\varphi_2\,\mathrm{cn}\,\varphi_2\,\mathrm{dn}\,\varphi_2},$$

nous tirerons successivement de la deuxième ligne (28)

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{sn}^2(\varphi_2, k_2) &= \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2},\\
\mathrm{cn}^2(\varphi_2, k_2) &= 1 - \mathrm{sn}^2(\varphi_2, k_2) = 1 - \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\\
&= \frac{(g'^2+k^2)+(g^2-k^2)}{g'^2+k^2} = \frac{1}{g'^2+k^2},\\
\mathrm{dn}^2(\varphi_2, k_2) &= 1 - k_2^2\,\mathrm{sn}^2(\varphi_2, k_2) = 1 - \frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}\,\frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\\
&= \frac{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)+(x^2+g'^2)(g^2-k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}\\
&= \frac{(g'^2x^2-g^2g'^2+x^2k^2-g^2k^2)+(g^2x^2+g^2g'^2-x^2k^2-g'^2k^2)}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}\\
&= \frac{(g'^2+g^2)x^2-(g^2+g'^2)k^2}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)} = \frac{x^2-k^2}{(x^2-g^2)(g'^2+k^2)}\\
&= \frac{k^2-x^2}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)},\\
\mathrm{sn}^2\varphi_2\,\mathrm{cn}^2\varphi_2\,\mathrm{dn}^2\varphi_2 &= \frac{-(g^2-k^2)}{g'^2+k^2}\,\frac{1}{g'^2+k^2}\,\frac{k^2-x^2}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)}\\
&= \frac{-(g^2-k^2)(k^2-x^2)}{(g^2-x^2)(g'^2+k^2)^3},\\
\frac{\delta.\,\mathrm{sn}^2\,\varphi_2}{\delta k} &= \frac{(g'^2+k^2)+(g^2-k^2)}{(g'^2+k^2)^2}\,2k = \frac{2k}{(g'^2+k^2)^2},
\end{aligned}\right.$$

et nous en conclurons dès lors pour la valeur précédente (165) de $\frac{\delta\varphi_2}{\delta k}$:

$$\frac{\delta\varphi_2}{\delta k} = \frac{\frac{2k}{(g'^2+k^2)^2}}{2\,\frac{i\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g^2-x^2}}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{(g'^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{k\sqrt{g^2-x^2}}{i\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\sqrt{k^2-x^2}}.$$

Cela fait, reportant à présent cette valeur dans celle ci-dessus (164) de $\frac{\delta Q'}{\delta k}$, et tenant compte en même temps des définitions (4) de K et (139) de $\mathfrak{X}$, nous trouverons alors

$$(166)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta Q'}{\delta k} &= ix\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}\times \\ &\quad \left(\frac{x^2+g'^2}{x^2-g^2}f_2(x^2)+\frac{f_3(x^2)}{x^2-g^2}\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right)\frac{k\sqrt{g^2-x^2}}{i\sqrt{K}\sqrt{k^2-x^2}} \\ &= \frac{-ix\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}}\left((x^2+g'^2)f_2(x^2)+f_3(x^2)\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right)\frac{k}{i\sqrt{K}} \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left((x^2+g'^2)f_2(x^2)+f_3(x^2)\,\frac{k^2-g^2}{k^2+g'^2}\right), \end{aligned}\right.$$

eu égard à la définition (160) du symbole Θ.

Ces deux expressions (162) et (166) étant ainsi obtenues donneront maintenant, en les ajoutant,

$$(167)\quad \frac{\delta(P'\Delta'+Q')}{\delta k} = \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\left(\mathfrak{F}_3(x^2,k^2)+(x^2+g'^2)f_2(x^2)+\frac{\mathfrak{F}_4(x^2,k^2)}{k^2+g'^2}\right),$$

en désignant par $\mathfrak{F}_4(x^2,k^2)$ le nouveau polynôme en x^2 et k^2 :

$$(168)\quad \mathfrak{F}_4(x^2,k^2) = -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)+f_3(x^2)(k^2-g^2).$$

Or ce polynôme, étant considéré par rapport à k^2, deviendra divisible par $k^2+g'^2$, si l'on a

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{F}_4(x^2,-g'^2) &= -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)+f_3(x^2)(-g'^2-g^2) \\ &= -(x^2+g'^2)\,\mathfrak{F}_2(x^2,-g'^2)-f_3(x^2), \end{aligned}$$

condition qui détermine complètement le polynôme $f_3(x^2)$ et lui assigne l'expression :

$$
(169)\quad \left\{ \begin{aligned} & f_3(x^2) = -(x^2 + g'^2)\, \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2), \\ \text{d'où} \quad & \frac{f_3(x^2)}{x^2 + g'^2} = -\mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2). \end{aligned} \right.
$$

Supposons-la donc remplie : les égalités précédentes (168) puis (169) donneront alors

$$
\frac{\mathfrak{F}_4(x^2, k^2)}{k^2 + g'^2} = f_3(x^2) = -(x^2 + g'^2)\, \mathfrak{F}_2(x^2, k^2),
$$

valeur qui étant remise dans l'égalité ci-dessus (167), la transformera dans la suivante

$$
(170)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta(P'\Delta' + Q')}{\delta k} &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}} \Big[\{ \mathfrak{F}_3(x^2, k^2) + (x^2 + g'^2) f_2(x^2) \} \\ &\qquad - (x^2 + g'^2)\, \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2) \Big] \\ &= \frac{-k\Theta}{\sqrt{K}}\, \Phi_3(x^2, k^2), \end{aligned} \right.
$$

en faisant encore une fois, en tenant compte de la définition (163) du symbole $\mathfrak{F}_3(x^2, k^2)$:

$$
(171)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_3(x^2, k^2) &= \mathfrak{F}_3(x^2, k^2) + (x^2 + g'^2) \{ f_2(x^2) - \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2) \} \\ &= \Big[\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)(k^2 + g'^2) \\ &\quad - (x^2 + g'^2) \{ \gamma' k^2 + (-\gamma' g'^2 + \beta' x^2 + \epsilon') \} \\ &\quad + 2(k^2 - x^2)(k^2 - g^2) \{ 2\gamma' k^2 + (\beta' x^2 + \epsilon') \} \Big] \\ &\quad + (x^2 + g'^2) \{ f_2(x^2) - \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2) \}. \end{aligned} \right.
$$

Cette dérivée première en k étant ainsi calculée, nous en déduirons, en la différentiant de nouveau en x :

$$
(172)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2(P'\Delta' + Q')}{\delta x\, \delta k} &= \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta(P'\Delta' + Q')}{\delta k} \right) = \frac{-k}{\sqrt{K}}\, \frac{\delta.\, \Theta\Phi_3(x^2, k^2)}{\delta x} \\ &= \frac{-k}{\sqrt{K}} \left(\Theta \frac{\delta\Phi_3}{\delta x} + \Phi_3(x^2, k^2) \frac{\delta\Theta}{\delta x} \right). \end{aligned} \right.
$$

Or, la définition (160) de Θ donnant successivement

$$\left\{\begin{aligned} l\Theta &= lx + \frac{1}{2}l(1-x^2) - \frac{1}{2}l(k^2-x^2), \\ \frac{\delta.\, l\Theta}{\delta x} &= \frac{1}{x} + \frac{-x}{1-x^2} - \frac{-x}{k^2-x^2} \\ &= x\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-k^2}\right) = \frac{x\mathrm{W}'}{x^2\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{W}'}{x\mathrm{X}}, \end{aligned}\right.$$

en faisant de nouveau

$$(173)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{W}' &= (x^2-1)(x^2-k^2) + (x^2-k^2)x^2 - x^2(x^2-1) \\ &= \{x^4 - (1+k^2)x^2 + k^2\} - k^2x^2 + x^2 \\ &= x^4 - 2k^2x^2 + k^2, \end{aligned}\right.$$

on aura donc encore, par le moyen de cette expression de $\frac{\delta.\, l\Theta}{\delta x}$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Theta}{\delta x} &= \Theta\,\frac{\delta.\, l\Theta}{\delta x} = \Theta\,\frac{\mathrm{W}'}{x\mathrm{X}} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x^2}}\;\frac{\mathrm{W}'}{x.(1-x^2)(k^2-x^2)} \\ &= \frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{1-x^2}\,(k^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

valeur qui étant remise dans l'égalité précédente (172), en même temps que celle (160) de Θ, la transformera successivement dans la suivante :

$$(174)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta^2(\mathrm{P}'\Delta' + \mathrm{Q}')}{\delta x\,\delta k} &= \frac{-k}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{k^2-x}}\,\frac{\delta\Phi_3}{\delta x} + \Phi_3(x^2,k^2)\,\frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{1-x^2}\,(k^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= \frac{-k}{\sqrt{\mathrm{K}}}\left[\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{\mathrm{X}}}\cdot\frac{\delta\Phi_3}{\delta.\, x^2}\,2x + \frac{\Phi_3(x^2,k^2)}{k^2-x^2}\,\frac{\mathrm{W}'}{\sqrt{\mathrm{X}}}\right] \\ &= \frac{k}{\sqrt{\mathrm{X}}\sqrt{\mathrm{K}}}\left[2x^2(x^2-1)\,\frac{\delta\Phi_3}{\delta.\, x^2} + \frac{\Phi_3(x^2,k^2)\,\mathrm{W}'}{x^2-k^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

La valeur du premier terme de l'expression cherchée (155) étant ainsi calculée, nous obtiendrons évidemment celle du second terme par des moyens tout semblables.

Calquant donc, en quelque sorte, nos procédés ainsi que nos notations sur ceux et celles employés dans le calcul précédent, nous tirerons de même de la définition (149) de Δ''

$$\left\{\begin{aligned} l\Delta'' &= \frac{1}{2}\, l\mathrm{K} + lx + \frac{1}{2}\, l\,(k^2 - x^2) - \frac{1}{2}\, l\,(1 - x^2). \\ \frac{\delta.\, l\Delta''}{\delta x} &= \frac{1}{x} + \frac{-x}{k^2 - x^2} - \frac{-x}{1 - x} \\ &= x\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{k^2 - x^2} + \frac{1}{1 - x^2}\right) = x\,\frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{U}''}, \end{aligned}\right.$$

en faisant encore

$$(175)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U}'' &= x^2\,(k^2 - x^2)\,(1 - x^2), \\ \mathrm{V}'' &= (k^2 - x^2)\,(1 - x^2) - (1 - x^2)\,x^2 + x^2\,(k^2 - x^2) \\ &= \{ k^2 - (1 + k^2)\,x^2 + x^4 \} - x^2 + x^2k^2 = k^2 - 2x^2 + x^4 \\ &= (k^2 - 1) + (1 - 2x^2 + x^4) = (x^2 - 1)^2 + (k^2 - 1), \end{aligned}\right.$$

et nous en déduirons, comme plus haut, d'une part,

$$\begin{aligned} \frac{\delta.\, \mathrm{P}''\Delta''}{\delta x} &= \Delta''\left(\mathrm{P}''\,\frac{\delta.\, l\Delta''}{\delta x} + \frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta x}\right) = \Delta''\left(\mathrm{P}''\,\frac{x\mathrm{V}''}{\mathrm{U}''} + \frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta.\, x^2}\,2x\right) \\ &= \frac{x\Delta''}{\mathrm{U}''}\left(\mathrm{P}''\mathrm{V}'' + 2\mathrm{U}''\,\frac{\delta \mathrm{P}''}{\delta.\, x^2}\right), \end{aligned}$$

expression pour laquelle les définitions (149) de Δ'' et (175) de U'' donnant cette fois

$$(176)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x\Delta''}{\mathrm{U}''} &= x.\, x\sqrt{\mathrm{K}}\,\frac{\sqrt{k^2 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\,\frac{1}{x^2\,(k^2 - x^2)\,(1 - x^2)} \\ &= \frac{1}{1 - x^2}\,\frac{\sqrt{\mathrm{K}}}{\sqrt{1 - x^2}\,\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1}\,\frac{\sqrt{\mathrm{K}}}{\sqrt{\mathrm{X}}}, \end{aligned}\right.$$

et qui deviendra donc encore successivement, par le moyen de cette dernière valeur (176), puis de celle (175) de V'',

$$(177)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\delta.\,P''\Delta''}{\delta x} &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\,\frac{P''V'' + 2U''\dfrac{\delta P''}{\delta.\,x^2}}{x^2-1}\\
&= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left(P''\frac{V''}{x^2-1} + 2\,\frac{U''}{x^2-1}\,\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right)\\
&= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[P''\left((x^2-1) + \frac{k^2-1}{x^2-1}\right) + 2U''\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right]\\
&= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\left(P''(x-1) + (k^2-1)\frac{P''}{x^2-1}\right) + 2U''\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2}\right].
\end{aligned}\right.$$

Or, la définition (150) de P'' donnant

$$\left\{\begin{aligned}
&P'' = \mathcal{F}_2(x^2, k^2) = \alpha''(x^2)^2 + (\beta''k^2 + \delta'')x^2 + (\gamma''k^4 + \epsilon''k^2 + \eta''),\\
&\frac{P''}{x^2-1} = \alpha''x^2 + \{\alpha'' + (\beta''x^2 + \delta'')\} + \frac{\mathcal{F}_2(1, k^2)}{x^2-1},\\
&\frac{\delta P''}{\delta.\,x^2} = 2\alpha''x^2 + (\beta''k^2 + \delta''),
\end{aligned}\right.$$

l'expression précédente (177) deviendra donc encore, en y remettant ces dernières valeurs, ainsi que celle (175) de U'',

$$(178)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\delta.\,P''\Delta''}{\delta x} &= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\Bigg[\Big\{P''(x^2-1) + (k^2-1)\times\\
&\qquad\left(\alpha''x^2 + (\alpha'' + \beta''k^2 + \delta'') + \frac{\mathcal{F}_2(1, k^2)}{x^2-1}\right)\Big\}\\
&\qquad + 2x^2(x^2 - k^2)\{2\alpha''x^2 + (\beta''k^2 + \delta'')\}\Bigg]\\
&= -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left(\mathcal{F}_3(x^2, k^2) + \frac{(k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1, k^2)}{x^2-1}\right),
\end{aligned}\right.$$

en faisant encore une fois :

$$(179) \begin{cases} \mathcal{F}_3(x^2, k^2) = \mathcal{F}_2(x^2, k^2)(x^2-1) \\ \qquad + (k^2-1)\,\{\alpha'' x^2 + (\alpha'' + \beta'' k^2 + \delta'')\} \\ \qquad + 2x^2(x^2-k^2)(2\alpha'' x^2 + \beta'' k^2 + \delta''). \end{cases}$$

D'autre part, la définition (151) de Q'' donnera, comme plus haut, eu égard aux valeurs (28) des éléments φ_1 et k_1,

$$(180) \begin{cases} \dfrac{\delta Q''}{\delta x} = ik\sqrt{K}\left(\dfrac{1-k^2}{-k^2} f_2(k^2)\dfrac{\delta\varphi_1}{\delta x} + \dfrac{f_3(k^2)}{1-k^2} k_1^2 \operatorname{sn}^2(\varphi_1, k_1)\dfrac{\delta\varphi_1}{\delta x}\right) \\ \quad = ik\sqrt{K}\left(\dfrac{1-k^2}{-k^2} f_2(k^2) + \dfrac{f_3(k^2)}{1-k^2}\,\dfrac{1-k^2}{-k^2}\,\dfrac{-x^2}{1-x^2}\right)\dfrac{\delta\varphi_1}{\delta x} \\ \quad = ik\sqrt{K}\left(\dfrac{1-k^2}{-k^2} f_2(k^2) + \dfrac{f_3(k^2)}{-k^2}\,\dfrac{-x^2}{1-x^2}\right)\dfrac{\delta\varphi_1}{\delta x}. \end{cases}$$

Or, la valeur du dernier facteur $\dfrac{\delta\varphi_1}{\delta x}$ sera fournie aisément encore, le module k_1 étant indépendant de x, par l'égalité

$$\frac{\delta.\operatorname{sn}^2\varphi_1}{\delta x} = \frac{\delta.\operatorname{sn}^2\varphi_1}{\delta\varphi_1}\,\frac{\delta\varphi_1}{\delta x}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{\dfrac{\delta.\operatorname{sn}^2\varphi_1}{\delta x}}{2\operatorname{sn}\varphi_1\operatorname{cn}\varphi_1\operatorname{dn}\varphi_1},$$

en tirant successivement de la première ligne des égalités (28)

$$\begin{cases} \operatorname{sn}^2(\varphi_1, k_1) = \dfrac{-x^2}{1-x^2}, \\ \operatorname{cn}^2(\varphi_1, k_1) = 1 - \operatorname{sn}^2(\varphi_1, k_1) = 1 - \dfrac{-x^2}{1-x^2} \\ \qquad = \dfrac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x^2}, \\ \operatorname{dn}^2(\varphi_1, k_1) = 1 - k_1^2\operatorname{sn}^2(\varphi_1, k_1) = 1 - \dfrac{1-k^2}{-k^2}\,\dfrac{-x^2}{1-x^2} \\ \qquad = \dfrac{k^2(1-x^2)-(1-k^2)x^2}{k^2(1-x^2)} = \dfrac{k^2-x^2}{k^2(1-x^2)}, \\ \operatorname{sn}^2\varphi_1\operatorname{cn}^2\varphi_1\operatorname{dn}^2\varphi_1 = \dfrac{-x^2}{1-x^2}\,\dfrac{1}{1-x^2}\,\dfrac{k^2-x^2}{k^2(1-x^2)} = \dfrac{-x^2(k^2-x^2)}{k^2(1-x^2)^3}, \\ \dfrac{\delta.\operatorname{sn}^2\varphi_1}{\delta x} = \dfrac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^2}(-2x) = \dfrac{-2x}{(1-x^2)^2}, \end{cases}$$

car on trouvera ainsi sans peine, au moyen de ces dernières valeurs et eu égard à la définition (4) de X :

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta x} = \frac{\dfrac{-2x}{(1-x^2)^2}}{2\dfrac{ix\sqrt{k^2-x^2}}{k(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{ik}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{ik}{\sqrt{X}}.$$

Remettant donc à présent cette dernière valeur dans celle obtenue tout à l'heure (180) pour $\frac{\delta Q''}{\delta x}$, celle-ci deviendra

$$(181)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta Q''}{\delta x} = ik\sqrt{K}\left(\dfrac{1-k^2}{-k^2}f_2(k^2) + \dfrac{f_3(k^2)}{-k^2}\,\dfrac{-x^2}{1-x^2}\right)\dfrac{ik}{\sqrt{X}} \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left((1-k^2)f_2(k^2) + f_3(k^2)\,\dfrac{x^2}{x^2-1}\right). \end{cases}$$

Cela fait, les deux expressions (178) et (181) étant ajoutées donneront maintenant

$$(182)\quad \frac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x} = -\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\mathcal{F}_3(x^2,k^2) + (k^2-1)f_2(k^2) + \frac{\mathcal{F}_4(x^2,k^2)}{x^2-1}\right],$$

en désignant par $\mathcal{F}_4(x^2, k^2)$ le nouveau polynôme en x^2 et k^2 :

$$(183)\qquad \mathcal{F}_4(x^2,k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2) - f_3(k^2)\,x^2.$$

Or, ce même polynôme, considéré par rapport à x^2, deviendra divisible par x^2-1, si l'on a

$$0 = \mathcal{F}_4(1,k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2) - f_3(k^2),$$

condition qui détermine complètement le polynôme $f_3(k^2)$, et lui assigne l'expression :

$$(184)\quad f_3(k^2) = (k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f_3(k^2)}{1-k^2} = -\mathcal{F}_2(1,k^2).$$

Cette condition étant donc encore supposée remplie, les égalités précédentes (183) puis (184) donneront alors

$$\frac{\mathcal{F}_4(x^2,k^2)}{x^2-1} = -f_3(k^2) = -(k^2-1)\,\mathcal{F}_2(1,k^2),$$

valeur qui, étant remise dans l'égalité (182), la transformera dans la suivante

$$(185)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x} = -\dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\left[\{\mathcal{F}_3(x^2,k^2)+(k^2-1)f_2(k^2)\} - (k^2-1)\mathcal{F}_2(1,k^2)\right] \\ \qquad = -\dfrac{\sqrt{K}}{\sqrt{X}}\Psi_3(x^2,k^2), \end{cases}$$

en faisant encore une fois, eu égard à la définition (179) du symbole $\mathcal{F}_3(x^2, k^2)$:

$$(186)\quad \begin{cases} \Psi_3(x^2,k^2) = \mathcal{F}_3(x^2,k^2) + (k^2-1)\{f_2(k^2) - \mathcal{F}_2(1,k^2)\} \\ \quad = [\mathcal{F}_2(x^2,k^2)(x^2-1) + (k^2-1)\{\alpha''x^2 + (\alpha''+\beta''k^2+\delta'')\} \\ \qquad + 2x^2(x^2-k^2)(2\alpha''x^2+\beta''k^2+\delta'')] \\ \qquad + (k^2-1)\{f_2(k^2) - \mathcal{F}_2(1,k^2)\}. \end{cases}$$

Ce résultat acquis, il nous faut différentier à nouveau, en k, cette expression de la première dérivée, en x, que nous venons d'obtenir. Il convient donc de mettre en évidence le facteur de $\sqrt{X}$ indépendant de k, en récrivant la dite expression sous la forme

$$\frac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2-x^2}}\,\Psi_3(x^2,k^2) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,H\Psi_3(x^2,k^2),$$

le nouveau symbole H tenant lieu dès lors de la quantité

$$(187)\qquad H = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2-x^2}} = \frac{\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2-k^2}}{\sqrt{k^2-x^2}},$$

auquel cas, la différentiation en question nous donnera :

$$(188)\quad \begin{cases} \dfrac{\delta^2(P''\Delta''+Q'')}{\delta x\,\delta k} = \dfrac{\delta}{\delta k}\left(\dfrac{\delta(P''\Delta''+Q'')}{\delta x}\right) \\ \qquad = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\dfrac{\delta.\,H\Psi_3(x^2,k^2)}{\delta k} \\ \qquad = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\left(H\,\dfrac{\delta\Psi_3}{\delta k} + \Psi_3(x^2,k^2)\,\dfrac{\delta H}{\delta k}\right). \end{cases}$$

Or, la définition (187) de cette quantité H donnant

$$lH = \frac{1}{2} l(g^2 - k^2) + \frac{1}{2} l(g'^2 + k^2) - \frac{1}{2} l(k^2 - x^2),$$

$$\frac{\delta . lH}{\delta k} = \frac{-k}{g^2 - k^2} + \frac{k}{g'^2 + k^2} - \frac{k}{k^2 - x^2}$$
$$= k\left(\frac{1}{k^2 - g^2} + \frac{1}{k^2 + g'^2} - \frac{1}{k^2 - x^2}\right) = \frac{k . W''}{-(k^2 - x^2) K},$$

en faisant de nouveau

$$(189) \left\{ \begin{aligned} W'' &= (k^2 + g'^2)(k^2 - x^2) + (k^2 - x^2)(k^2 - g^2) - (k^2 - g^2)(k^2 + g'^2) \\ &= \{ k^4 + (g'^2 - x^2) k^2 - g'^2 x^2 \} + \{ k^4 - (x^2 + g^2) k^2 + g^2 x^2 \} \\ &\quad - \{ k^4 + (g'^2 - g^2) k^2 - g^2 g'^2 \} \\ &= k^4 - 2x^2 k^2 - \{ (g'^2 - g^2) x^2 - g^2 g'^2 \}, \end{aligned} \right.$$

on aura donc de nouveau, comme plus haut,

$$\frac{\delta H}{\delta k} = H \frac{\delta . lH}{\delta k} = H \frac{k W''}{-(k^2 - x^2) K} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \frac{-k W''}{(k^2 - x^2) K}$$
$$= \frac{-k W''}{\sqrt{K} (k^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

valeur qui, étant remise dans l'égalité précédente (188) en même temps que celle (187) de H, la transformera successivement dans la suivante :

$$(190) \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2 (P''\Delta'' + Q'')}{\delta x \, \delta k} &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \left[\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{k^2 - x^2}} \frac{\delta \Psi_3}{\delta k} + \Psi_3 (x^2, k^2) \frac{-k W''}{\sqrt{K} (k^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{-1}{\sqrt{X}} \left[\frac{K}{\sqrt{K}} \cdot \frac{\delta \Psi_3}{\delta . k^2} 2k + \frac{-\Psi_3 (x^2, k^2)}{k^2 - x^2} \frac{k W''}{\sqrt{K}} \right] \\ &= \frac{-k}{\sqrt{X} \sqrt{K}} \left[2K \frac{\delta \Psi_3}{\delta . k^2} + \frac{\Psi_3 (x^2, k^2) W''}{x^2 - k^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ayant ainsi calculé successivement les trois termes de l'expression (155), nous aurons donc, en ajoutant les trois égalités (174), (190) et (156), réduites à leurs premiers et derniers membres,

$$(191)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} &= \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(2x^2(x^2-1)\frac{\delta\Phi_3}{\delta.\,x^2} + \frac{\Phi_3(x^2,k^2)\,W'}{x^2-k^2}\right) \\ &\quad + \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(-2K\frac{\delta\Psi_3}{\delta.\,k^2} - \frac{\Psi_3(x^2,k^2)\,W''}{x^2-k^2}\right) \\ &\quad + \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\lambda(x^2+k^2-g^2) \\ &= \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\left(\Phi_4(x^2,k^2) + \frac{\Psi_5(x^2,k^2)}{x^2-k^2}\right), \end{aligned}\right.$$

en désignant encore une fois par Φ_4 et Ψ_5 les nouveaux polynômes en x^2 et k^2

$$(192)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_4(x^2,k^2) &= 2x^2(x^2-1)\frac{\delta\Phi_3}{\delta.\,x^2} - 2K\frac{\delta\Psi_3}{\delta.\,k^2} + \lambda(x^2+k^2-g^2), \\ \Psi_5(x^2,k^2) &= \Phi_3(x^2,k^2)\,W' - \Psi_3(x^2,k^2)\,W'' \\ &= \Phi_3(x^2,k^2)(x^4-2k^2x^2+k^2) \\ &\quad - \Psi_3(x^2,k^2)\,\{k^4-2x^2k^2-(g'^2-g^2)\,x^2+g^2g'^2\}, \end{aligned}\right.$$

eu égard aux définitions (173) de W′ et (189) de W″.

Or, le second de ces polynômes $\Psi_5(x^2, k^2)$, considéré par rapport à x^2, sera divisible par x^2-k^2, si l'on a, quel que soit k^2,

$$\begin{aligned} 0 = \Psi_5(k^2,k^2) &= \Phi_3(k^2,k^2)(-k^4+k^2) \\ &\quad - \Psi_3(k^2,k^2)\,\{-k^4-(g'^2-g^2)\,k^2+g^2g'^2\} \\ &= -\Phi_3(k^2,k^2)(k^4-k^2) \\ &\quad + \Psi_3(k^2,k^2)\,\{k^4+(g'^2-g^2)\,k^2-g^2g'^2\} \\ &= -\Phi_3(k^2,k^2)(k^2-1)\,k^2 \\ &\quad + \Psi_3(k^2,k^2)(k^2-g^2)(k^2+g'^2), \end{aligned}$$

condition qui pourra être écrite aussi bien, en divisant par le produit $k^2(k^2-1)(k^2-g^2)(k^2+g'^2)$:

$$(193) \qquad 0 = -\frac{\Phi_3(k^2,k^2)}{(k^2-g^2)(k^2+g'^2)} + \frac{\Psi_3(k^2,k^2)}{k^2(k^2-1)}.$$

Calculons donc les deux polynômes en k^2, $\Phi_3(k^2,k^2)$ et $\Psi_3(k^2,k^2)$.

Quant au premier, la définition (171) du symbole $\Phi_3(x^2,k^2)$ donnera immédiatement

$$\begin{aligned}
\Phi_3(k^2,k^2) &= [\mathfrak{F}_2(k^2,k^2)(k^2+g'^2) - (k^2+g'^2)\{\gamma' k^2 + (-g'^2\gamma' + \beta' k^2 + \epsilon')\} \\
&\qquad + (k^2+g'^2)\{f_2(k^2) - \mathfrak{F}_2(k^2,-g'^2)\}] \\
&= (k^2+g'^2)[\mathfrak{F}_2(k^2,k^2) - \{\gamma' k^2 + (-g'^2\gamma' + \beta' k^2 + \epsilon')\} \\
&\qquad + \{f_2(k^2) - \mathfrak{F}_2(k^2,-g'^2)\}] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\alpha'+\beta'+\gamma')k^4 + (\delta'+\epsilon')k^2 + \eta'\} \\
&\qquad - \{(\beta'+\gamma')k^2 - \gamma' g'^2 + \epsilon'\} + f_2(k^2) \\
&\qquad - \{\alpha' k^4 - \beta' g'^2 k^2 + \gamma' g'^4 + \delta' k^2 - \epsilon' g'^2 + \eta'\}] \\
&= (k^2+g'^2)[\beta' k^2(k^2-1+g'^2) + \epsilon'(k^2-1+g'^2) \\
&\qquad + \gamma'\{(k^4-g'^4) - (k^2-g'^2)\} + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[(\beta' k^2+\epsilon')(k^2-1+g'^2) \\
&\qquad + \gamma'(k^2-g'^2)\{(k^2+g'^2)-1\} + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\beta' k^2+\epsilon') + \gamma'(k^2-g'^2)\}\{k^2-(1-g'^2)\} \\
&\qquad + f_2(k^2)] \\
&= (k^2+g'^2)[\{(\beta'+\gamma')k^2 - (g'^2\gamma'-\epsilon')\}(k^2-g^2) + f_2(k^2)],
\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$(194) \qquad \frac{\Phi_3(k^2,k^2)}{(k^2-g^2)(k^2+g'^2)} = \{(\beta'+\gamma')k^2 - (g'^2\gamma'-\epsilon')\} + \frac{f_2(k^2)}{k^2-g^2}.$$

Semblablement, la définition (186) du symbole $\Psi_3\,(x^2,\,k^2)$ donnera

$$
\begin{aligned}
\Psi_3\,(k^2,\,k^2) = {} & [\mathcal{J}_2\,(k^2,k^2)\,(k^2-1) + (k^2-1)\,\{(\alpha''+\beta'')\,k^2 + (\alpha''+\delta'')\}\,] \\
& \qquad + (k^2-1)\,\{f_2\,(k^2) - \mathcal{J}_2\,(1,k^2)\} \\
= {} & (k^2-1)\,[\,\{(\alpha''+\beta''+\gamma'')\,k^4 + (\delta''+\epsilon'')\,k^2 + \eta''\} \\
& \qquad + \{(\alpha''+\beta'')\,k^2 + (\alpha''+\delta'')\} \\
& \qquad + \{f_2\,(k^2) - (\alpha''+\beta''k^2+\gamma''k^4+\delta''+\epsilon''k^2+\eta'')\}\,] \\
= {} & (k^2-1)\,[\,\{\alpha''\,(k^4+k^2) + \beta''k^4 + \delta''k^2\} + f_2\,(k^2)\,] \\
= {} & (k^2-1)\,[k^2\,\{\alpha''\,(k^2+1) + \beta''k^2 + \delta''\} + f_2\,(k^2)\,] \\
= {} & (k^2-1)\,[k^2\,\{(\alpha''+\beta'')\,k^2 + (\alpha''+\delta'')\} + f_2\,(k^2)\,],
\end{aligned}
$$

d'où par conséquent :

$$
(195) \qquad \frac{\Psi_3\,(k^2,\,k^2)}{k^2\,(k^2-1)} = \{(\alpha''+\beta'')\,k^2 + (\alpha''+\delta'')\} + \frac{f_2\,(k^2)}{k^2}.
$$

En retranchant donc l'égalité (194) de cette dernière (195), la condition (193), qu'il est nécessaire de remplir pour arriver à la forme voulue, deviendra tout d'abord

$$
\begin{aligned}
0 = {} & -\left[(\beta'+\gamma')\,k^2 - (g'^2\gamma' - \epsilon') + \frac{f_2\,(k^2)}{k^2-g^2}\right] \\
& + \left[(\alpha''+\beta'')\,k^2 + (\alpha''+\delta'') + \frac{f_2\,(k^2)}{k^2}\right].
\end{aligned}
$$

Cela posé, pour plus de précision, faisons, comme pour les polynômes $\mathfrak{F}_2\,(x^2,\,k^2)$ et $\mathcal{J}_2\,(x^2,\,k^2)$ (150),

$$
(196) \qquad \left\{
\begin{aligned}
f_2\,(x^2) &= \theta'x^4 + \zeta'x^2 + \xi', \\
f_2\,(k^2) &= \theta''k^4 + \zeta''k^2 + \xi''.
\end{aligned}
\right.
$$

En récrivant simplement k^2 à la place de x^2 dans le premier trinôme, puis effectuant les divisions, la condition en question sera donc définitivement

$$0 = -\left[(\beta' + \gamma')\,k^2 - (g'^2\gamma' - \epsilon') + \left(\theta' k^2 + (\theta' g^2 + \zeta') + \frac{f_2(g^2)}{k^2 - g^2}\right)\right]$$

$$+\left[(\alpha'' + \beta'')\,k^2 + (\alpha'' + \delta'') + \left(\theta'' k^2 + \zeta'' + \frac{\xi''}{k^2}\right)\right]$$

$$= [-(\beta' + \gamma' + \theta') + (\alpha'' + \beta'' + \theta'')]\,k^2$$

$$+ [(g'^2\gamma' - \epsilon') - (\theta' g^2 + \zeta') + (\alpha'' + \delta'') + \zeta''] - \frac{f_2(g^2)}{k^2 - g^2} + \frac{\xi''}{k^2},$$

et, devant être remplie quel que soit k^2, elle équivaudra par conséquent en fait aux quatre suivantes :

$$(197)\quad \begin{cases} 0 = -(\beta' + \gamma' + \theta') + (\alpha'' + \beta'' + \theta''), \\ 0 = (g'^2\gamma' - \epsilon') - (g^2\theta' + \zeta') + (\alpha'' + \delta'') + \zeta'', \\ 0 = f_2(g^2) = \theta' g^4 + \zeta' g^2 + \xi', \\ 0 = \xi''. \end{cases}$$

Les deux premières détermineront deux des coefficients des trinômes (196) en fonction des autres, soit par exemple θ'' et ζ'', en leur assignant les valeurs :

$$(198)\quad \begin{cases} \theta'' = (\beta' + \gamma' + \theta') - (\alpha'' + \beta''), \\ \zeta'' = -(g'^2\gamma' - \epsilon') + (g^2\theta' + \zeta') - (\alpha'' + \delta''). \end{cases}$$

Cela fait, en tirant de même de la troisième la valeur

$$\xi' = -(\theta' g^4 + \zeta' g^2),$$

l'expression du premier trinôme (196) deviendra

$$\begin{aligned} f_2(x^2) &= (\theta' x^4 + \zeta' x^2) - (\theta' g^4 + \zeta' g^2) \\ &= \theta'(x^4 - g^4) + \zeta'(x^2 - g^2) \\ &= [\theta'(x^2 + g^2) + \zeta'](x^2 - g^2), \end{aligned}$$

et, dès lors, on aura à la fois, eu égard à la quatrième condition (197),

$$\frac{f_2(x^2)}{x^2-g^2} = \theta' x^2 + (g^2\theta' + \zeta'), \qquad \frac{f_2(k^2)}{k^2} = \theta'' k^2 + \zeta'';$$

d'où il suit qu'en tenant compte des valeurs précédemment acquises (169) et (184), les deux quantités Q′ et Q″ (151) deviendront elles-mêmes respectivement :

$$(199)\quad \left\{ \begin{aligned} Q' &= ix\sqrt{\mathfrak{X}}\big[(x^2+g'^2)\,\{\,\theta' x^2 + (g^2\theta'+\zeta')\,\}\,\varphi_2 \\ &\qquad\qquad - \mathfrak{F}_2(x^2, -g'^2)\,Z(\varphi_2, k_2)\big], \\ Q'' &= ik\sqrt{K}\,[-(1-k^2)(\theta'' k^2 + \zeta'')\,\varphi_1 - \mathcal{F}_2(1, k^2)\,Z(\varphi_1, k_1)]. \end{aligned} \right.$$

Cela fait, la condition proposée (193) étant ainsi satisfaite, nous aurons maintenant, en effectuant la division,

$$\frac{\Psi_5(x^2, k^2)}{x^2 - k^2} = \Psi_4(x^2, k^2),$$

cette dernière fonction Ψ_4 étant encore un polynôme du quatrième degré en x^2 et k^2, et par conséquent l'expression précédente (191) de $\frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$ se trouvera bien, comme on le voulait, réduite à la forme

$$(200)\quad \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k} = \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\,[\Phi_4(x^2, k^2) + \Psi_4(x^2, k^2)] = \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}}\,\Pi_4(x^2, k^2),$$

le symbole Π_4 désignant un nouveau polynôme du quatrième degré en x^2 et k^2.

En se reportant à l'expression antérieure (148) de $\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k}$, on voit donc que la condition originairement proposée par l'énoncé même du problème, savoir $\frac{\delta^2 I}{\delta x\,\delta k} = \frac{\delta^2 J}{\delta x\,\delta k}$, sera vérifiée à l'aide de la simple identification de deux polynômes à deux variables du 4ᵉ degré, c'est-à-dire en établissant un nombre $\frac{1}{2}5.6 = 5.3 = 15$

d'équations entre les coefficients des termes correspondants dans les deux polynômes, équations linéaires par rapport aux inconnues, à savoir les coefficients indéterminés des polynômes $\mathfrak{F}_2$, $\mathcal{J}_2$, f_2, f_2 et la constante λ de la quantité J, mais qui ne seront pas homogènes par rapport à ces inconnues, du moment que les seconds membres seront les coefficients de la dérivée $\frac{\delta^2 I}{\delta x\, \delta k}$, c'est-à-dire, en fait, ceux de la quantité I elle-même qui sont supposés donnés.

Pour que le problème soit possible et déterminé, il faut donc qu'après toutes les déterminations déjà effectuées, nous disposions encore de 15 coefficients indéterminés dans J, et de *quinze* seulement. Or, tel est bien effectivement l'état actuel de la question, car il nous reste uniquement les quinze coefficients disponibles

$$(201) \qquad \begin{cases} \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', & \epsilon', & \eta', & \theta', & \zeta', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \delta'', & \epsilon'', & \eta'', & \lambda, \end{cases}$$

lesquels permettront l'identification demandée et seront alors complètement déterminés par elle, de la façon que nous venons de dire, en fonction des valeurs arbitrairement données des coefficients α, β, ..., ξ de la quantité I.

Si l'on veut symboliser commodément le système des quinze équations linéaires sur lequel repose la détermination en question, il faudra poser, suivant le mode de notation de l'Algèbre Supérieure moderne,

$$x^2 = u, \qquad k^2 = v, \qquad 1 = w;$$

et alors le polynôme $\Pi_4(x^2, k^2)$ de l'expression précédente (200) représentera une forme ternaire du 4^e degré, telle que

$$\Pi_4(x^2, k^2) = \sum_{l,m,n} \mathcal{A}_{l,m,n}\, u^l v^m w^n, \qquad \begin{cases} l, m, n = 0, 1, 2, 3, 4, \\ l + m + n = 4. \end{cases}$$

le coefficient $\mathcal{A}_{l,m,n}$ étant une fonction linéaire et homogène, complètement déterminée par la série des opérations que nous

avons indiquées, des quinze coefficients seuls disponibles, c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{A}_{l,m,n} = \Phi_{l,m,n}\,(\alpha', \beta', \ldots, \theta', \zeta'; \alpha'', \beta'', \ldots, \eta''; \lambda),$$

les coefficients de cette forme $\Phi_{l,m,n}$ étant eux-mêmes entiers par rapport à g^2 ou g'^2, ainsi qu'il résulte des opérations successives dont elle procède (*), en sorte que l'expression précitée (200) de $\frac{\delta^2 J}{\delta x\, \delta k}$ se présentera elle-même sous la forme :

$$\frac{\delta^2 J}{\delta x\, \delta k} = \frac{k}{\sqrt{X}\sqrt{K}} \sum_{l,m,n} \Phi_{l,m,n}(\alpha', \beta', \ldots, \zeta'; \alpha'', \beta'', \ldots, \eta''; \lambda)\, u^l v^m w^n.$$

Or, avec le même système de notation, l'expression (148) de $\frac{\delta^2 I}{\delta x\, \delta k}$ s'écrivant semblablement

$$\frac{\delta^2 I}{\delta x\, \delta k} = \frac{2k}{\sqrt{X}\sqrt{K}} \left[u^0 (\alpha\, v^0 w^4 + \gamma\, v^1 w^3 + \epsilon\, v^2 w^2 + \theta\, v^3 w^1 + \xi\, v^4 w^0) \right.$$
$$\left. + u^1 (\beta\, v^0 w^3 + \delta\, v^1 w^2 + \eta\, v^2 w^1 + \zeta\, v^3 w^0)\right],$$

l'identification des expressions des deux dérivées secondes sera dès lors assurée en posant, entre les quinze inconnues, les quinze équations linéaires et non homogènes, dont les coefficients sont entiers en g^2 ou g'^2, savoir

$$\left\{\begin{array}{llll}
\Phi_{0,0,4} = 2\alpha, & \Phi_{0,1,3} = 2\gamma, & \Phi_{0,2,2} = 2\epsilon, & \Phi_{0,3,1} = 2\theta, \\
 & \Phi_{0,4,0} = 2\xi, & \Phi_{1,0,3} = 2\beta, & \Phi_{1,1,2} = 2\delta, \\
 & & \Phi_{1,2,1} = 2\eta, & \Phi_{1,3,0} = 2\zeta, \\
 & \Phi_{2,0,2} = 0, & \Phi_{2,1,1} = 0, & \Phi_{2,2,0} = 0, \\
 & \Phi_{3,0,1} = 0, & \Phi_{3,1,0} = 0, & \Phi_{4,0,0} = 0;
\end{array}\right.$$

(*) En effet, les fonctions originaires $\mathcal{F}_1$ (168) et $\mathcal{J}_1$ (183) étant elles-mêmes entières en g^2 ou g'^2, les seules divisions que nous ayons effectuées l'ont été par les diviseurs $k^2 + g'^2$, $x^2 - 1$, et $x^2 - k^2$, dont les coefficients de la variable étant l'unité n'ont pu par suite introduire g^2 ou g'^2 en dénominateur. Il en est de même de toutes les autres opérations, qui se réduisent à des additions (algébriques), des multiplications ou des différentiations.

et pour déterminer l'expression explicite de chacune des neuf quantités I_0, J_0, ..., I_4 séparément, il suffira dans ce système de supposer égal à l'unité le coefficient de la quantité considérée dans la définition (144) de I, et égal à zéro le coefficient de chacune des autres, ainsi que nous l'avons déjà dit au début de cette démonstration.

Une fois la résolution de ce système effectuée, et les valeurs ainsi trouvées pour les quinze coefficients (201), ainsi que celles qui en résulteront pour θ'' et ζ'' par les deux équations (198), étant supposées remises dans les définitions (150) de P′ et P″, (152) de R, et les expressions (199) obtenues pour Q′ et Q″, puis celles-ci elles-mêmes étant remises dans les valeurs (153) de P et Q, la dite valeur de P pourra être ramenée alors, en tenant compte des définitions (149) de Δ′ et Δ″, à la forme plus simple

$$\left\{\begin{aligned} P = P'\Delta' + P''\Delta'' &= \mathfrak{F}_2(x^2, k^2).\, x\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} \\ &\quad + \mathcal{J}_2(x^2, k^2).\, x\sqrt{(g^2-k^2)(g'^2+k^2)}\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\,\frac{\sqrt{k^2-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\left[\mathfrak{F}_2(x^2, k^2)(1-x^2) + \mathcal{J}_2(x^2, k^2)(g'^2+k^2)\right] \\ &= ix\,\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}}\,\mathfrak{F}_3(x^2, k^2), \end{aligned}\right.$$

ce nouveau polynôme $\mathfrak{F}_3(x^2, k^2)$ — qui n'est évidemment pas celui que nous avons introduit dans nos calculs par la définition (163) — vérifiant ainsi, de par sa définition même, la condition $\mathfrak{F}_3(1, -g'^2) = 0$. Et l'on voit dès lors, eu égard à la première expression (154) de J ainsi qu'à la définition (139) de $\mathfrak{X}$, qu'en désignant, maintenant que tous les calculs sont achevés, par α', β', ..., ϵ'; α'', β'', ..., ϵ'', d'autres constantes que celles qui figurent dans ces calculs, nous avons en définitive démontré le nouveau Théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Les neuf premières quantités* I_n, J_n *ont, chacune séparément, une expression de la forme*

$$(202)\quad \left.\begin{matrix} I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 \\ J_0, J_1, J_2, J_3 \end{matrix}\right\} = i\Bigg[x\,\mathfrak{F}_3(x^2, k^2)\frac{\sqrt{x^2-k^2}}{\sqrt{1-x^2}}\frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{g'^2+k^2}} + x\sqrt{1-x^2}\sqrt{g^2-x^2}\,\big\{(\alpha' x^2+\beta')(x^2+g'^2)\varphi_2 + (\gamma' x^4+\delta' x^2+\epsilon')\,Z(\varphi_2, k_2)\big\} - k\sqrt{g^2-k^2}\sqrt{g'^2+k^2}\,\big\{(\alpha'' k^2+\beta'')(1-k^2)\varphi_1 + (\gamma'' k^4+\delta'' k^2+\epsilon'')\,Z(\varphi_1, k_1)\big\} + \lambda g'\,\big\{\Pi(\varphi_2, h_2, k_2) - \Pi(\varphi_1, h_1, k_1)\big\}\Bigg],$$

le symbole $\mathfrak{F}_3(x^2, k^2)$ *désignant un polynôme du troisième degré en* x^2 *et* k^2 *qui vérifie la condition* $\mathfrak{F}_3(1, -g'^2) = 0$, *et dont les divers coefficients, ainsi que les constantes* $\alpha', \beta', \ldots, \epsilon'$; $\alpha'', \beta'', \ldots, \epsilon''$; *et* λ *sont des fonctions rationnelles de* g^2 *ou* g'^2.

Il est bien évident, d'ailleurs, d'après la façon même dont ces expressions ont été obtenues, que les degrés des divers polynômes mis en évidence par cet énoncé sont simplement ici des *degrés maximum* et, par conséquent, que ces degrés pourront éventuellement se trouver abaissés, soit pour quelques polynômes seulement dans l'expression d'une même inconnue, soit pour tous à la fois dans les expressions de certaines inconnues, par le fait de la disparition d'une ou plusieurs des puissances les plus élevées des variables dans ces polynômes.

(A continuer.)

FIN DE LA SECONDE PARTIE

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

	PAGES
Statuts	5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques	9
Lettres de S. S. le Pape Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles	11
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles	15
Liste des membres fondateurs	15
— des membres honoraires	16
— générale	18
— géographique	40
— des membres décédés	46
— des membres inscrits dans les sections	47
Membres du Conseil 1901-1902	53
— — 1902-1903	54
Bureaux des sections 1902-1903	55
Questions de concours proposées en 1902	56
Sessions de 1902-1903. Extraits des procès-verbaux	57
Session du jeudi 30 octobre 1902 à Liége	57
Séances des sections : Première section	57
Deuxième —	65
Troisième —	74

PAGES

Assemblée générale 86
Conférence de M. A. de Lapparent 86
Discours de S. G. Mgr Rutten 87
Session du jeudi 29 janvier 1903 à Bruxelles 89
Séances des sections : Première section 89
Deuxième — 96
Troisième — 105
Quatrième — 105
Assemblée générale 113
Conférence du R. P. F. Dierckx, S. J. 113
Session des mardi 21, mercredi 22 et jeudi 23 avril 1903 à Bruxelles . 115
Séances des sections : Première section 115
Deuxième — 127
Troisième — 142
Quatrième — 153
Cinquième — 155
Assemblée générale du 21 avril 1903 157
Rapport du Secrétaire général. 157
Conférence de M. le chanoine Boulay 165
Assemblée générale du 22 avril 1903 166
Rapport du Délégué de la *Société bibliographique de Paris*. . . 166
Conférence de M. le D[r] Lemière 169
Assemblée générale du 23 avril 1903 172
Rapport du Trésorier. 172
Conférence du R. P. J.-D. Lucas, S. J. 173
Résultat des élections pour le renouvellement du Conseil . . . 174
Liste des ouvrages offerts à la *Société scientifique de Bruxelles* du 1[er] mai 1902 au 1[er] mai 1903 175

COMMUNICATIONS DIVERSES

Sur la séparatrice d'ombre et de lumière dans le serpentin, par M. Hanocq 57
Analyse du mémoire du R. P. H. Bosmans, S. J., intitulé : Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent, par M. P. Mansion 57
Rapport de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin sur le mémoire du R. P. Pepin, S. J., intitulé : Étude sur quelques équations indéterminées de la forme $x^2 + cy^2 = z^3$. 58
Sur la convergence de certaines fractions continues algébriques, par M. le V[te] R. de Montessus de Ballore 60
Exposé synthétique de la théorie des erreurs d'observation, par M. Éd. Goedseels 64

PAGES

Sur la géométrie riemannienne dite simplement elliptique, par M. P. Mansion 64
Rapport de M. P. Mansion sur un mémoire, établissant par voie analytique la formule empirique de la dispersion, du physicien Ketteler, par M. E. Ferron 65
Sur les machines d'électricité statique, par le R. P. V. Schaffers, S. J. . 68
Sur l'emploi du mot *ion* en électro-chimie, par M. A. de Hemptinne. . 73
De l'importance des nouvelles éditions de la correspondance de Galilée, de Descartes et de Huygens, par Mgr G. Monchamp 74
Sur les hyménoptères *Terebrantia*, par M. F. Meunier. 76
Supplément aux chasses hyménoptérologiques et diptérologiques des environs de Bruxelles, par M. F. Meunier 76
Le révélateur du noyau cellulaire, par le R. P. H. Bolsius, S. J. . . . 82
Étude sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman. 82
La dissémination des spores chez le Coprin chevelu *(Coprinus comosus)*, par M. l'abbé M. Lefebvre 83
Sur l'état actuel de nos connaissances des houilles de la Campine, par le R. P. G. Schmitz, S. J. 85
Méthode nouvelle pour la solution des équations linéaires, par M. Éd. Goedseels 89
Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités, par M. P. Mansion. 89
Sur la définition de l'aire des surfaces courbes, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. 90
Démonstration d'un théorème de Richelot, par M P. Mansion . . . 91
Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin 92
Analyse du *Procès de Galilée* de Favaro, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 95
Sur deux complexes du troisième ordre, par M. J. Neuberg 95
Sur l'état sphéroïdal des liquides, par M. G. Van der Mensbrugghe . . 96
Le glycol hexaméthylénique normal $(H_2C)_6 (OH)_2$, par M. l'abbé Hamonet. 100
Sur le glycol adipique, par M. L. Henry 101
Les électrons, par le R. P. V. Schaffers, S. J. 103
Sur les essais récents de traction électrique à grande vitesse, par M. E. Gerard. 103
Sur la salamandre, par M. le Dr H. Lebrun 105
Schémas d'analyse de diverses roches, par M. P. Nyssens 105
Discours de M. le Dr Faidherbe à la mémoire de M. le professeur Lefebvre et de M. le docteur Dumont. 105
Un cas de tumeur oculaire, par le Dr Rutten 109
Un cas de tumeur oculaire, par le Dr J. De Lantsheere 109
Sur un cas de tumeur cérébrale, par le Dr Cuylits 110
Quelques cas d'altérations du système musculaire, par le Dr Glorieux . 111
Rapport de M. J. Neuberg, sur le mémoire intitulé : Sur la séparatrice d'ombre et de lumière du serpentin, par M. Hanocq. 115
Sur les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique à plusieurs variables indépendantes, par M. le Vte d'Adhémar. . . . 116
Note de M. Lechalas : la géométrie projective est-elle indépendante de la géométrie métrique? — Réponse de M. Mansion. 120
Analyse du mémoire de M. d'Ocagne, intitulé : Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie, par M. le Vte d'Adhémar. 121
Une particularité de l'astronomie chinoise au XVIIe siècle, par le R. P. Bosmans, S. J. 122
Sur la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Weierstrass; sur la simplification des notations elliptiques de Weierstrass. Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités, par M. P. Mansion . . . . 125 et 126
Lettre de M. E. Ferron relative à un rapport de M. P. Mansion. . . . 127
Sur une relation des forces moléculaires et la solubilité, par M. G. Van der Mensbrugghe 127

	PAGES
Préparation de certains alcools à l'état de liberté par la saponification de leurs éthers à l'aide d'autres alcools, par M. L. Henry.	129
Méthodes photométriques en électricité. par M. J. Carlier	134
Monochlorhydrines propyléniques, par M. L. Henry	134
Nouvel appareil de démonstration pour les lois des gaz et des vapeurs, par le R. P. Schaffers, S. J.	138
Sur la capacité uniformément répartie, par M. A. Willame	142
Observation d'un arc-en-ciel blanc, par M. J. Leclercq	143
Sur un bananier du Congo, par M. E. De Wildeman	143
Photographie d'un nid de pigeons, par le R. P. Bolsius, S. J. . . .	144
Analyse de l'*Abrégé de géologie* de M. de Lapparent, par le R. P. Schmitz, S. J.	144
La fable des Amazones chez les indigènes de l'Amérique précolombienne, par M. E. Beauvois	144
Nouvelles cécidomyides xylophiles ; étude sur les cécidomyides gallicoles, par M. l'abbé Kieffer.	145
Exode des araignées, par M. J. H. Fabre.	145
Le Transafricain, par M. le Mis de Nadaillac	145
Sur le genévrier millénaire monosperme ; de la restauration par la mise en défends des montagnes pastorales, par M. C. de Kirwan . .	145
Historique du bassin houiller de la Campine, par M. A. Dumont. . .	145
Observations du R. P. Schmitz, S. J. à propos du mémoire de M. Bourgeat, intitulé : Sur la brèche de Bachant et quelques formations analogues.	146
La race Alpine, par M. l'abbé Claerhout.	146
Les écoles ménagères agricoles en Belgique, par M. A. Proost	150
Les acalyptères de l'ambre, par M. F. Meunier	150
Rapport de M. F. Meunier sur le mémoire de M. l'abbé Kieffer, intitulé : Description de trois genres nouveaux et cinq espèces nouvelles de la famille des Sciaridae	150
L'œuf ovarien de *Batrococeps attenuatus*, par le Dr H. Lebrun	151
Le fœticide médical	153
Les théories sociales du physiocrate Mercier de la Rivière, par M. F. Deschamps	154
La baisse de l'argent et l'Union latine, par M. Ed. Van der Smissen . .	154

CONFÉRENCES

L'Éruption de la Martinique, par M. A. de Lapparent.	86
Les Volcans de Java, par le R. P. F. Dierckx, S. J.	113
Les Hépatiques aux points de vue historique, biologique et philosophique, par M. le Chanoine Boulay.	165
Les moyens de défense contre les agents pathogènes, par M. le Dr Lemière	169
Les phénomènes sonores dans l'arc électrique : arc chantant et arc-téléphone, par le R. P. J.-D. Lucas, S. J.	173

AUTEURS

d'Adhémar. 116, 121. — Beauvois, 144. — Bolsius, 82, 144. — Bosmans, 95, 122. — Boulay, 165. — Carlier, 134. — Claerhout, 146. — Cuylits, 110. — De Lantsheere (Dr J.), 109. — Deschamps (F.), 154. — De Wildeman, 82, 143. — Dierckx, 113. — Dumont, 145. — Fabre, 145. — Faidherbe, 105. — Ferron, 127. — Gerard, 103. — Glorieux, 111. — Goedseels, 64, 89. — Hamonet, 100. — Hanocq, 57. — de Hemptinne, 73. — Henry (L.), 101, 129, 134. — Kieffer, 145 — de Kirwan, 145. — de Lapparent, 86. — Lebrun (Dr H.), 105, 151. — Lechalas, 120. — Leclercq, 143. — Lefebvre (M.), 83. — Lemière, 169. — Lucas, 173. — Mansion, 57, 64, 65, 89, 91, 120, 125, 126. — Meunier (F.), 76, 150. — Monchamp, 74. — de Montessus de Ballore (R.), 60. — de Nadaillac (Mis), 145. — Neuberg, 95, 115. — Nyssens (P.), 105. — Proost, 150. — Rutten (Dr), 109. — Schaffers, 68, 103, 138. — Schmitz, 85, 144, 146. — de la Vallée Poussin (Ch.-J.), 58, 90, 92. — Van der Mensbrugghe, 96, 127. — Van der Smissen, 154. — Willame, 142.

PAGES

Sur la géométrie riemannienne dite simplement elliptique, par M. P. Mansion 64
Rapport de M. P. Mansion sur un mémoire, établissant par voie analytique la formule empirique de la dispersion, du physicien Ketteler, par M. E. Ferron 65
Sur les machines d'électricité statique, par le R. P. V. Schaffers, S. J. . 68
Sur l'emploi du mot *ion* en électro-chimie, par M. A. de Hemptinne. . 73
De l'importance des nouvelles éditions de la correspondance de Galilée, de Descartes et de Huygens, par Mgr G. Monchamp 74
Sur les hyménoptères *Terebrantia*, par M. F. Meunier. 76
Supplément aux chasses hyménoptérologiques et diptérologiques des environs de Bruxelles, par M. F. Meunier 76
Le révélateur du noyau cellulaire, par le R. P. H. Bolsius, S. J. . . . 82
Étude sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman. 82
La dissémination des spores chez le Coprin chevelu *(Coprinus comosus)*, par M. l'abbé M. Lefebvre 83
Sur l'état actuel de nos connaissances des houilles de la Campine, par le R. P. G. Schmitz, S. J. 85
Méthode nouvelle pour la solution des équations linéaires, par M. Éd. Goedseels 89
Sur une intégrale considérée par Poisson en calcul des probabilités, par M. P. Mansion. 89
Sur la définition de l'aire des surfaces courbes, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. 90
Démonstration d'un théorème de Richelot, par M. P. Mansion . . . 91
Sur la fonction sans dérivée de Weierstrasse, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin 92
Analyse du *Procès de Galilée* de Favaro, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 95
Sur deux complexes du troisième ordre, par M. J. Neuberg 95
Sur l'état sphéroïdal des liquides, par M. G. Van der Mensbrugghe . . 96
Le glycol hexaméthylénique normal $(H_2C)_6(OH)_2$, par M. l'abbé Hamonet. 100
Sur le glycol adipique, par M. L. Henry 101
Les électrons, par le R. P. V. Schaffers, S. J. 103
Sur les essais récents de traction électrique à grande vitesse, par M. E. Gerard. 103
Sur la salamandre, par M. le Dr H. Lebrun 105
Schémas d'analyse de diverses roches, par M. P. Nyssens 105
Discours de M. le Dr Faidherbe à la mémoire de M. le professeur Lefebvre et de M. le docteur Dumont. 105
Un cas de tumeur oculaire, par le Dr Rutten 109
Un cas de tumeur oculaire, par le Dr J. De Lantsheere 109
Sur un cas de tumeur cérébrale. par le Dr Cuylits 110
Quelques cas d'altérations du système musculaire, par le Dr Glorieux . 111

CONFÉRENCES

PAGES

L'Éruption de la Martinique, par M. A. de Lapparent 86
Les Volcans de Java, par le R. P. F. Dierckx, S. J. 113
Les Hépatiques aux points de vue historique, biologique et philosophique, par M. le Chanoine Boulay 165
Les moyens de défense contre les agents pathogènes, par M. le Dr Lemière 169
Les phénomènes sonores dans l'arc électrique : arc chantant et arc-téléphone, par le R. P. J.-D. Lucas, S. J. 173

AUTEURS

Bolsius, 82. — Bosmans, 95. — Boulay, 165. — Cuylits, 110. — De Lantsheere (Dr J.), 109. — De Wildeman, 82. — Dierckx, 113. — Faidherbe, 105. — Gerard, 103. — Glorieux, 111. — Goedseels, 64, 89. — Hamonet, 100. — Hanocq, 57. — de Hemptinne, 73. — Henry (L.), 101. — de Lapparent, 86. — Lebrun (Dr H.), 105. — Lefebvre (M.), 83. — Lemière, 169. — Lucas, 173. — Mansion, 57, 64, 65, 89, 91. — Meunier (F.), 76. — Monchamp, 74. — de Montessus de Ballore (R.), 60. — Neuberg, 95. — Nyssens (P.), 105. — Rutten (Dr), 109. — Schaffers, 68, 103. — Schmitz, 85. — de la Vallée Poussin (Ch.-J.), 58, 90, 92. — Van der Mensbrugghe, 96.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

PAGES

Un cas d'hémiatrophie faciale gauche, par M. le Dr Rutten 1

Documents inédits sur Grégoire de Saint-Vincent, par le R. P. Henri Bosmans, S. J. 21

La croix chez les Scandinaves d'Amérique au moyen âge, par M. Eug. Beauvois 65

Gliome ou sarcome de l'œil, par M. le Dr Rutten 71

De la présence de la bile dans le lait de certaines nourrices, par M. le Dr Alexandre Faidherbe 75

Les espèces du genre " *Haemanthus L.* „ (sous-genre *Nerissa Salisb.*), par M. É. De Wildeman. 84

Sur quelques équations de la forme $X^2 + cY^2 = Z^3$, par le R. P. Pepin, S. J. 121

La congélation appliquée aux batardeaux, par M. L. Cousin 171

Simple recherche trigonométrique sur la nutation eulérienne de l'axe instantané, par M. F. Folie 175

Sur la séparatrice d'ombre et de lumière du serpentin, par M. Ch. Hanocq 180

Sur la conductibilité électrique des solutions d'hydrate de chloral, par M. R. de Muynck 186

Observations sur l'anatomie macroscopique de l'appareil salivaire de *Nepa Cinerea*, par M. M. Lefebvre 192

Description de trois genres nouveaux et de cinq espèces nouvelles de la Famille des *Sciaridae* (Diptères), par M. l'abbé J. J. Kieffer . . . 196

Sur la brèche de Bachant et les formations analogues, par M. le chanoine Bourgeat 205

Relations géologiques des régions stables et instables du nord-ouest de l'Europe, par M. le comte F. de Montessus de Ballore. 216

Mémoires sur une classe de quadratures de fonctions elliptiques par rapport à leur module, par M. le vicomte de Salvert (1re partie) . . 263

AUTEURS

Beauvois, 65. — Bosmans, 21. — Bourgeat, 205. — Cousin, 171. — De Muynck, 186. — De Wildeman, 84. — Faidherbe, 75. — Folie, 175. — Hanocq, 180. — Kieffer, 196. — Lefebvre (M.), 192. — de Montessus de Ballore (F.), 216. — Pepin, 121. — Rutten (Dr), 1, 71. — de Salvert, 263.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins; à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVII, 1877 à 1903.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, commencée en 1902.

Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, se vendent fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . fr. **7 50**

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Notice sur son but, son organisation et ses travaux. Brochure de 32 pages, in-18, distribuée gratuitement à ceux qui en font la demande au Secrétariat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique,** réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.

Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris,** 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la *Revue des Questions scientifiques* est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** °/₀ ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

La collection complète et les volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ

En vente à Paris, chez Gauthier-Villars, 55, quai des Augustins ; à Louvain, au Secrétariat de la Société, 11, rue des Récollets.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à XXVII, 1877 à 1903.

Prix de chaque volume in-8° de 400 à 600 pages . . . . fr. **20 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Première série, 1877 à 1891. Trente volumes.
Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes.
Troisième série, commencée en 1902.

Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, se vendent fr. **20 00**

LE JUBILÉ DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE. Notice et discours par le R. P. Van den Gheyn, M. P. Mansion et le Dr Lefebvre. Brochure in-8° de 75 pages . . . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition, 1889 (150 pages in-8°) . . . . fr. **7 50**

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Notice sur son but, son organisation et ses travaux. Brochure de 32 pages, in-18, distribuée gratuitement à ceux qui en font la demande au Secrétariat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS

Envoi franco contre mandat-poste ou valeur sur Paris

BOREL (Émile), Maître de conférences à l'École Normale Supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la théorie des ensembles.* Grand in-8° ; 1898 . . . . 3 fr. 50

—— **Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions.** Grands in-8° se vendant séparément :

Leçons sur les fonctions entières ; 1900 . . . . 3 fr. 50
Leçons sur les séries divergentes ; 1901 . . . . 4 fr. 50
Leçons sur les séries à termes positifs. . . . . 3 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *Échauffement par contact et échauffement par rayonnement. Conductibilité des aiguilles, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* . . . (Sous presse.)

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès International de Physique**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, 4 volumes gr. in-8°.
Tomes I, II et III. Rapports présentés au Congrès 1900 ; 3 vol. ensemble 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme* ; 1900 . . . . 18 fr.
TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique* ; 1900. . . . . 18 fr.
TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres* ; 1901 . . 6 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. *(Technologie et Chimie).* Prix de l'ouvrage complet. . . . . 100 fr.

TOME I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*
TOME II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*
TOME III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris**, 2 volumes grand in-8°.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Un premier fascicule (368 pages) est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs . . . . 17 fr.
TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations* . . . . (En préparation.)

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Directeur adjoint du Bureau international des Poids et Mesures. — **La convention du Mètre et le Bureau international des Poids et Mesures.** In-4° avec nombreuses figures ; 1902. . . . . 7 fr. 50

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) 3 volumes in-8° se vendant séparément :

TOME I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Grand in-8° de VI-329 pages avec 145 figures ; 1901 . . . . 10 fr.
TOME II : *(Sous presse.)*
TOME III : *(En préparation.)*

WOLF (C.), Membre de l'Institut. — **Histoire de l'Observatoire de Paris,** *de sa fondation à* 1793. Grand in-8°.

Bruxelles. — Imp. Polleunis et Ceuterick, rue des Ursulines, 37.